

アーベルの非線形微分方程式に関連した2次元力学系

山口大教養 松野 好雅 (Yoshimasa Matsuno)

I. 序論

複素変数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ に関する次の非線形常微分方程式を考える。

$$\dot{z} = I_m z + \lambda |z|^2 z, \quad (1)$$

ここで、 $\lambda (= \alpha + i\beta)$ は複素パラメータとする。(1)を成分に分けて書くと

$$\dot{x} = y + (\alpha x - \beta y)(x^2 + y^2), \quad (2a)$$

$$\dot{y} = (\beta x + \alpha y)(x^2 + y^2). \quad (2b)$$

上式は (x, y) 平面内での点 z の力学運動を記述する。

$\lambda = 0$ のとき (1) は、 $z = y_0 t + x_0 + iy_0$ なる直線運動を表す解を有する。ここではこの直線運動への非線形効果を調べる。非線形項としては、 z に関して3次の項を考える。(1)はこの時適当な変換でアーベルの非線形微分方程式に還元でき、解はパラメータ λ の値に応じて種々の分岐現象を

示す。以下の議論の詳細については J. Math. Phys.

33 (1992) NO 1 を参照のこと。

II. アーベルの方程式への還元

A. アーベルの非線形微分方程式

第1種アーベルの非線形微分方程式は次の形をもつ。¹⁻³

$$\dot{y} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3, \quad a_j = a_j(x). \quad (3)$$

$a_3 = 0$ のとき、上式はリッカチの方程式になる。また、 $a_0 = 0, a_1 \neq 0$ のとき、 $a_2 = 0, a_3 \neq 0$ 、あるいは $a_2 \neq 0, a_3 = 0$ ならばバベルヌイ型の微分方程式となり、その厳密解は既知である。

B. アーベルの方程式への還元

(2)は平面極座標、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を導入すると次の方程式系へ変換される：

$$\dot{r} = r \sin \theta \cos \theta + \alpha r^3, \quad (4a)$$

$$\dot{\theta} = -\sin^2 \theta + \beta r^2. \quad (4b)$$

さらに従属変数変換

$$\rho = r^2 / (\beta r^2 - \sin^2 \theta), \quad (5)$$

により (4) は

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \dot{\rho} / \dot{\theta} = 2\rho(\beta\rho - 1)[-(\alpha + \beta \cot \theta)\rho + 2 \cot \theta], \quad (6)$$

となり、アーベルの方程式(3)に帰着される。

Ⅲ. 特別なケース

以下(6)を初期条件、 $r=1$, $\theta=\pi/2$ の下で解く。ここでは $\alpha \neq 0$, $\beta=0$ と $\alpha=0$, $\beta \neq 0$ の特別なケースについて考える。

A. $\alpha \neq 0$, $\beta=0$

このとき(6)は

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 2\rho(\alpha\rho - 2\cot\theta), \quad (7)$$

となるが、これはベルヌーイの微分方程式 $\dot{y} = ay^n + by$ の特別なケースであり、その解は直ちに得られる:

$$\rho = (w^2+1)^2 / [2\alpha(\frac{w^3}{3}+w)-1], \quad w = \cot\theta. \quad (8)$$

r と θ の関係は

$$r^2 = (\cot^2\theta+1) / [1-2\alpha(\frac{1}{3}\cot^3\theta + \cot\theta)], \quad (9)$$

となる。 r , および θ の時間依存性は(2)を積分することにより次のように表せる。

$$r^2 = (x^2+1) / [1-2\alpha(\frac{x^3}{3}+x)], \quad \cot\theta = x. \quad (10)$$

以下では $\alpha > 0$ と $\alpha < 0$ の場合を分けて考える。

1. $\alpha > 0$.

この場合(10)からわかるように解は、 $x^3 + 3x - \frac{3}{2\alpha} = 0$ を満たす $x (= x_b)$ で発散する。図1に x_b を α の関数として図示する。また図2には α の種々の値に対する r の時間発展を示す。

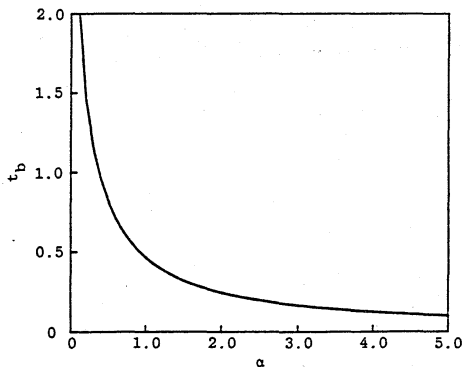


図 1

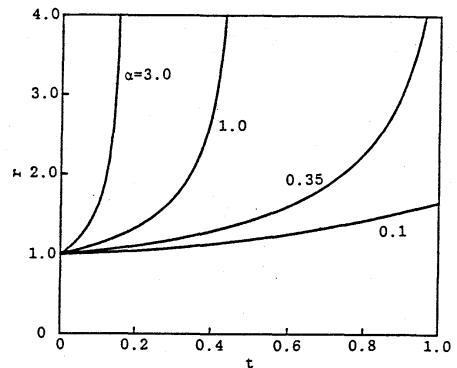


図 2

え. $\alpha < 0$

負の α では発散は起こらず、 $t \rightarrow \infty$ で $y \rightarrow 0$ となる。図 3 は y の時間発展を示す。また図 4 には種々の α の値に対する (x, y) 平面内の解の軌跡を図示する。

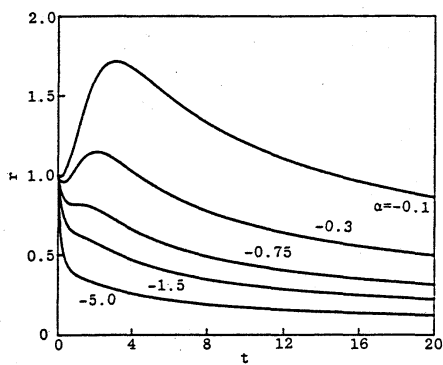


図 3

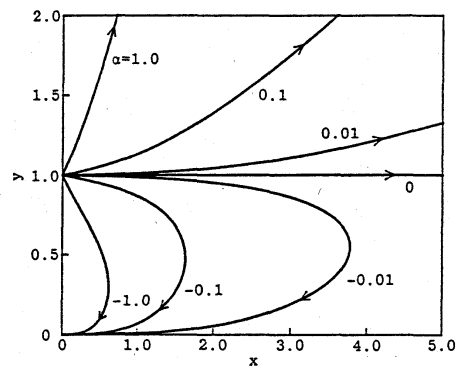


図 4

B. $\alpha = 0, \beta \neq 0$

このとき (6) は

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 2\rho(\beta\rho - 1)(-\beta\rho + 2)\cot\theta, \quad (11)$$

となる。これは変数分離型の微分方程式であり、解は直ちに得られ次のように得る：

$$\rho(\beta\rho - 2)/(\beta\rho - 1)^2 = c/\sin^4\theta, \quad (12)$$

ここで c は積分定数。 r と θ で表わすと (12) は

$$r^4 - \frac{2}{\beta} r^2 \sin^2\theta - (\beta - 2)/\beta = 0, \quad (13)$$

となる。 r 、および θ の時間発展はヤコビの積分関数で表わすことができる。 β の値に応じて解は異なる振舞いをするが、その詳細は省略し、ここでは典型的な β の値に対する解の (x, y) 平面内の軌跡を図 5 に示す。

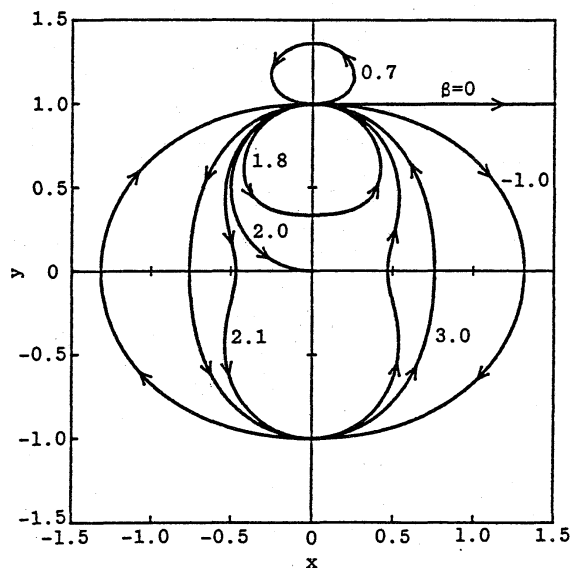


図 5

IV. 一般のケース

ここでは $\alpha \neq 0$ 、 $\beta \neq 0$ の一般のケースについて考える。

A. 定常解、および安定性

最初に (4) の定常解、およびその安定性を調べる。定常解は (4) で $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$ とおくと直ちに得られ次のようになる。

$$r_s = \sqrt{\beta / (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \tan \theta_s = -\beta / \alpha, \quad (\beta > 0). \quad (14)$$

解 (14) の線形安定性を調べるために $r = r_s + \delta r$, $\theta = \theta_s + \delta \theta$ とおいて (4) を r_s, θ_s のまわりで線形化する。そして、 $\delta r \propto e^{\omega t}$, $\delta \theta \propto e^{\omega t}$ と仮定すると ω に関する次の固有値方程式が導かれる：

$$\omega^2 - \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \omega + \frac{2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = 0. \quad (15)$$

上式の根は

$$\omega = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \pm \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{2(\alpha^2 - \beta^2)}. \quad (16)$$

従って $\alpha > 0$ ならば $\text{Re } \omega > 0$ となり解は不安定。他方 $\alpha < 0$ ならば $\text{Re } \omega < 0$ となり解は α の値に依らず安定となる。

B. 一般解

ここでは $\alpha \neq 0$ 、 $\beta \neq 0$ の場合の解の性質を調べる。 α 、 β の正負に応じて以下の 4 ケースを考える。

1. $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$\alpha > 0$ の場合は解は常に有限時間で発散する。 $\beta \gg 1$ の

とき(4)の近似解は

$$r^2 = \left[1 - \frac{\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \right] \exp \left[\frac{2\alpha}{\beta} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (17)$$

と表わせる。このとき r 、および θ の時間依存性は

$$r = \frac{\sqrt{\tilde{\beta}/\beta}}{\sqrt{1 - 2\tilde{\alpha}t}}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2\alpha} \ln(1 - 2\tilde{\alpha}t), \quad (18a)$$

ここで

$$\tilde{\alpha} = \alpha \left[1 - \frac{\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \right], \quad \tilde{\beta} = \beta \left[1 - \frac{\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \right]. \quad (18b)$$

(18)より解の発散時間 t_b は以下のようになる:

$$t_b = 1 / \left\{ 2\alpha \left[1 - \frac{\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \right] \right\}. \quad (19)$$

図6に t_b の β 依存性を示す。ここで $\alpha=1$ とした。実

線は(2)をルンゲ-クッタ-ジル法により数値積分して得ら

れた t_b を、また破線は(19)を表わす。図7には (α, β)

平面内での解の軌跡を種々の β の値に対して図示した。

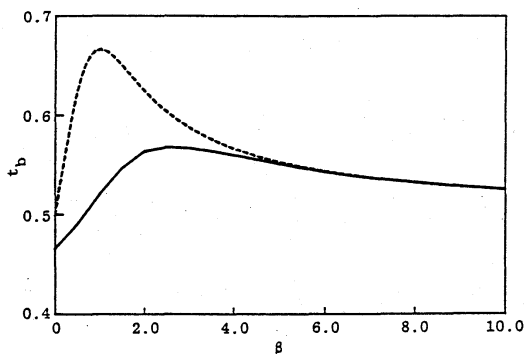


図 6

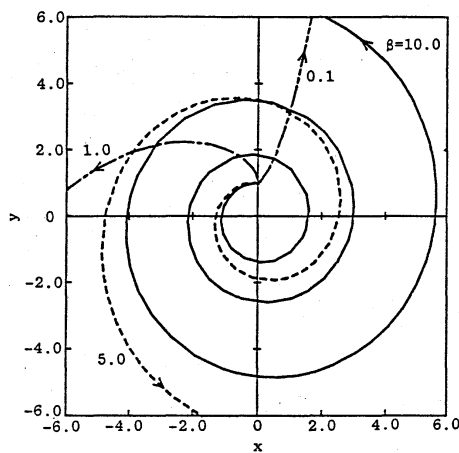


図 7

2. $\alpha > 0, \beta < 0$

解の振舞いはケース1と類似している。図8に解の軌跡を示す。

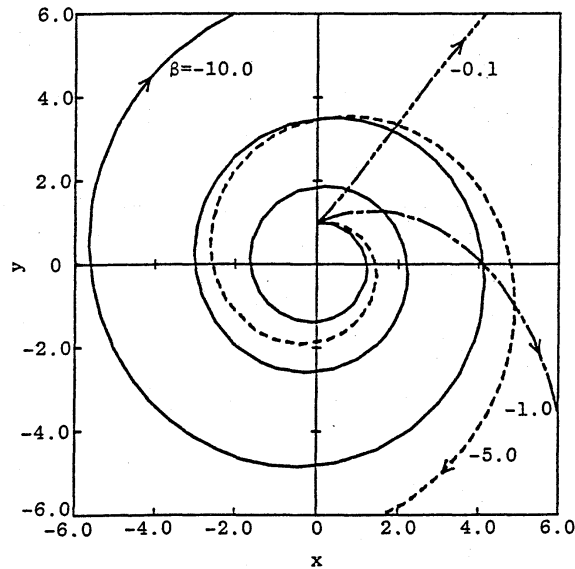


図 8

3. $\alpha < 0, \beta > 0$

負の α に対しては解は $t \rightarrow \infty$ で有限値に収束する。ここでは $\alpha = -1$ とした。解の軌跡を図9に示す。(16)からわかるように $\alpha = -1$ のとき固有値 ω は、 $0 < \beta \leq 1$ に対して負の実数となる。対応する定常点は安定なノードを表す。他方 $\beta > 1$ では ω は負の実部をもった複素共役量となり、それは安定なフォーカスに対応する。

4. $\alpha < 0, \beta < 0$

この場合、安定な定常点は存在せず、解は $t \rightarrow \infty$ のとき原

漸近する。図10に解の軌跡を示す。

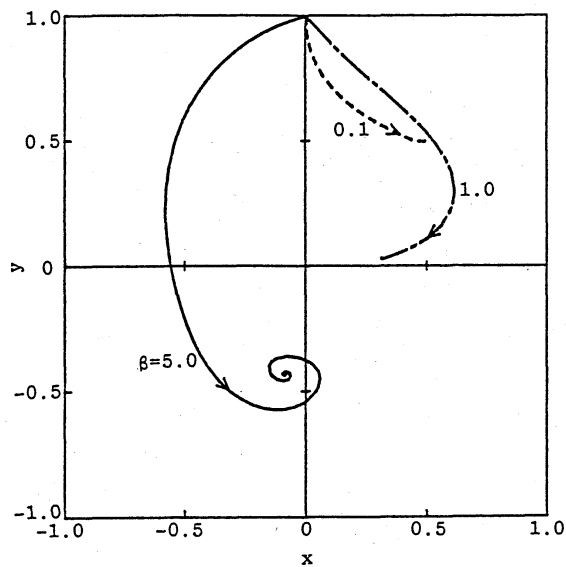


図 9

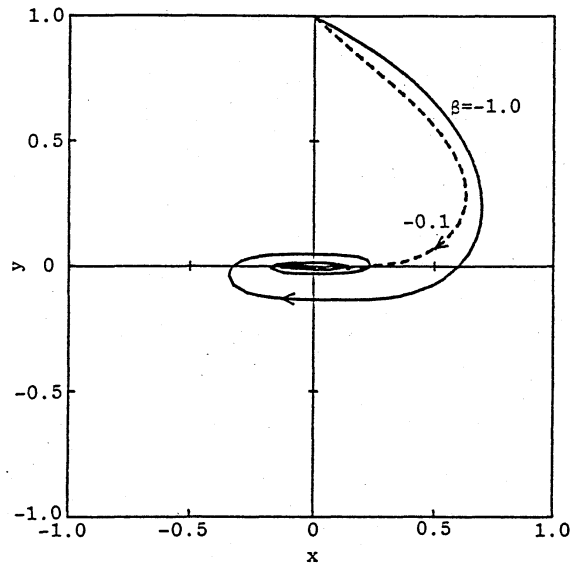


図 10

V. 議論

ここではアーベルの微分方程式に還元できる2次元の力学系を考察した。非線形項として3次の項を取り入れたがもっと一般化して

$$\dot{z} = \text{Im } z + \lambda g(|z|^2)z, \quad (20)$$

のような形の方程式を考える。ここで $g = g(r)$ は r の実関数とする。たとえば $g = r^{2\nu}$ (ν : 実定数) とすると

$$\rho = r^{2\nu} / (\beta r^{2\nu} - \sin^2 \theta), \quad (21)$$

なる変換で (20) は以下に示すようなアーベルの微分方程式に帰着できる:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 2\rho(\beta\rho - 1)[- \nu(\alpha + \beta \cot\theta)\rho + (\nu+1)\cot\theta]. \quad (22)$$

$\nu = 1$ のとき上式は (6) と一致する。 $\nu = -1$, $\nu = 0$ に対しては (22) は厳密に解くことができる。

もうひとつの一般化は、(1) の z に空間依存性を入れることである。 すなわち $z = z(\xi, t)$ 。 (1) は空間微分を含まないので空間変数 ξ はパラメータとみなすことができる。

このとき (1) の初期値問題は、 $t = 0$ で $z(\xi, 0)$ を与えれば解くことができる。 λ が純虚数のとき (1) は双一次方程式

$$\dot{z}^* z + z^* \dot{z} = \text{Im } z^2, \quad (23)$$

を満たすことに注意する。 (23) はサイン-ヒルベルト方程式

$H\theta_t = -\sin\theta$, $\theta = \theta(\xi, t)$ (H : ヒルベルト変換) の線形化の過程において得られた方程式である。⁴⁻⁶ 従って (1) の

解は z が ξ に関して適当な解析的条件を満足すればサイン-ヒルベルト方程式の解となる可能性がある。 これについては将来検討する予定である。

参考文献

1. G. Murphy, Ordinary Differential Equations and Their Solutions (D. Van Nostrand, New York, 1960),
2. H.T. Davis, Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations(Dover, New York, 1962).
3. D. Zwillinger, Handbook of Differential Equations(Academic, New York, 1989).
4. Y. Matsuno, J. Phys. A : Math. Gen. 20, 3587(1987).
5. Y. Matsuno, Phys. Lett. A119,229(1986); A120, 187(1988).
6. Y. Matsuno, in Proceeding of the Workshop on Finite Dimensional Integrable Nonlinear Dynamical Systems, edited by P.G.L. Leach and W.-H. Steeb(World Scientific, Singapore, 1988), p. 205.