

Hasse-Weil L関数の岩澤理論の構想

東京工業大学 加藤和也 (Kazuya Kato)

様々な種類の zeta 関数の、整数点での値の、数論的な意味を知ることは、数論の重要な主題である。岩澤理論は、部分 Riemann zeta 関数の整数点での値を、円分体の ideal 類群と結びつけるもので、部分 Riemann zeta 関数の値の数論的意味についての、現在考えられる最高の理論である。任意の Hasse-Weil L関数についてもこのような岩澤理論を開拓することは、数論における最も大きな夢の一つであると言えるであろう。

志村五郎氏の言葉（「数学」13号、「保型形式と整数論Ⅱ」）

「整数論いたる所 zeta 関数あり」

今、

「zeta 関数ある所 岩澤理論あり」

と続けたい。

本稿では、Fontaine, Faltings 他の人々によって近年発展させられた p 進 Hodge 理論 (p 進 period の理論) を局所理論として、
「任意の Hasse-Weil L関数の岩澤 main conjecture」を定式化す

る。ここに述べる一般化された岩澤 main conjecture は、Bloch との共同研究 (Grothendieck 記念号) にもとづき、Fontaine と Perrin-Riou の idea もとりいれたもので、Deligne 予想、Beilinson 予想、古典的岩澤 main conjecture 等、zeta 関数・L 関数の値についての、知られている大多数の予想を含む。

§1. 円单数は zeta の化身

$1 - \alpha$ (α は 1 の巾根, $\alpha \neq 1$)

を円单数と呼ぶ。(実際は $1 - \alpha$ は α の位数が素数巾でない時に限り「单数」であり、位数が素数 p の巾なら $\mathbb{Z}[\alpha, \frac{1}{p}]$ の可逆元でしかないのがたゞか、簡単のため円单数、と呼んて。)

円单数の絶対値の \log をとると、zeta の値が次のようにあらわされる: $\alpha = \exp\left(\frac{2\pi i a}{N}\right)$, $(a, N) = 1$ とおくと,

$$\log|1 - \alpha| = - \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} (\zeta_{\equiv a(N)}(s) + \zeta_{\equiv -a(N)}(s)).$$

ここで

$$\zeta_{\equiv a(N)}(s) \underset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \pmod{N}}} \frac{1}{n^s}$$

は部分 Riemann zeta 関数と呼ばれ, $\operatorname{Re}(s) > 1$ で絶対収束し, ① 全体へ解析接続されて $s = 1$ 以外で正則である。

円单数はこれ以外にもさまざまな仕方で zeta の値と関係す

る。 α の位数を N とし $p^n | N$ とし $m = p^{-n}N$ とおくとき、

$u \in \mathbb{Z}_p[\alpha]^\times$ に対して、1 の原始 p^n 乗根 α^m を用いた Hilbert symbol $(1-\alpha, u) \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の値は、

$$\text{Trace}_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p}\left(\left(\frac{1}{2\pi i}(\zeta_{\Xi=\alpha(N)}(u) - \zeta_{\Xi=-\alpha(N)}(u))\right) \log(u)\right) \quad (\log \text{は } p\text{-進 } \log)$$

の $\text{mod } p^n$ は等しい。また円単数の p -進 \log をとると、部分

p -進 Riemann zeta 関数の $s=1$ での値があらわれる。

このようなことから、円単数は zeta の化身であると言える。少なくとも、zeta の精がニリかたまってでききたものであることは疑えない。(IR や C も、 \mathbb{Q}_p 上でも、セータに関係する、という離れわざ)

円単数は岩澤理論において次のように重要な役割を演す。

p を素数とし、簡単のため $p \neq 2$ とする。 $n \geq 1$ に対して 1 の原始 p^n 乗根 β_n を、 $\beta_{n+1}^p = \beta_n$ がみたされるようにとる。

$C_n = \mathbb{Q}(\beta_n)$ の ideal 類群の p 巾部分

$$C = \varprojlim_n C_n \quad (\text{逆系は 1 ルム写像 } C_{n+1} \rightarrow C_n \text{ につけて})$$

$$\Lambda = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\text{Gal}(\mathbb{Q}(\beta_n)/\mathbb{Q})]$$

とおく。 C は Λ 加群とみなせる。 $\mathbb{Z}[\beta_n, \frac{1}{p}]^\times$ を $\mathbb{Z}[\beta_n, \frac{1}{p}]$ の可逆元全体の乗法群とし、

$$E = \varprojlim_n \left(\mathbb{Z}_p[\beta_n, \frac{1}{p}]^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \right) \quad (\text{逆系は 1 ルムにつけて})$$

とおく。 E も Λ 加群である。最後に

$$z = (1 - \beta_n)_n \in E$$

とおく。 $(1 - \beta_{n+1}) \in \mathbb{Z}_p[\beta_{n+1}, \frac{1}{p}]^\times$ の $\mathbb{Z}_p[\beta_n, \frac{1}{p}]^\times$ への 1 ルムは $1 - \beta_n$ である。

さて Λ は 2 次元の正則半局所環であり, C 及び $E/\Lambda\mathbb{Z}$ は, ともに有限生成ねじれ Λ 加群であり ('ねじれ' とは Λ のある非零因子によって零化されることを意味する), Mazur-Wiles によって証明された岩澤 main conjecture は

$$\text{length}_{\Lambda_p}(C_p) = \text{length}_{\Lambda_p}(E/\Lambda\mathbb{Z})_p$$

が Λ のすべての高さ 1 の素 ideal p について成立することである。

以上まとめると, 円単数は部分 Riemann zeta の化身であって, しかも classical な岩澤 main conjecture は円単数にもついて述べられる。

本稿に述べる「Hasse-Weil L 関数の岩澤 main conjecture」の主張する所は, すべての Hasse-Weil L 関数が, 「円単数」のごとき「zeta の化身」を有するとということである。さらには, これらの「化身」は, 大域体のすべての P 進 Galois 表現 (モチーフから来るとは限らない) に対しても定義されるということである。「化身」はどこに定義されるのかというと, それは, 「その P 進 Galois 表現に対応する P 進層の cohomology の, determinant 加群」の生成元として存在しているはずなのである。

以下では素数 P を固定し, 簡単のため $P \neq 2$ とする。

§2. 準備

一般化された岩澤 main conjecture を述べるための準備をおこなう。

(2.1) perfect complex. Λ を可換環とする。 $D(\Lambda)$ で、 Λ 加群の圏の導來圏をあらわす。 Λ 上の perfect complex とは、 $D(\Lambda)$ の対象であって、有限生成射影 Λ 加群の有限複体で代表されるもののことである。

(2.2) determinant 加群. Λ を可換環とし、 P を Λ 上の perfect complex とするとき、 P の determinant 加群と呼ばれる可逆 Λ 加群 $\det_{\Lambda} P$ が定義される。

例えば、もし P が rank r の有限生成自由 Λ 加群を、degree m の Λ においたものとすると、 $\det_{\Lambda} P$ は、 m が偶数の時は P の Λ 上の r 次外巾加群であり、 m が奇数の時はその逆加群である。

$$0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$$

が Λ 加群の複体の exact sequence で、 C, C', C'' がどれも $D(\Lambda)$ の中でみて perfect complex である時、標準同型

$$(2.2.1) \quad \det_{\Lambda}(C) \cong \det_{\Lambda}(C') \otimes_{\Lambda} \det_{\Lambda}(C'')$$

が与えられる。

(2.3) 以下では次の (a)(b) のいずれかをみたす可換環 Λ を考える。

(a) Λ は完備ネータ - 半局所環で、 Λ の任意の极大 ideal の剰余体は標数 p の有限体である。

(b) Λ は \mathbb{Q}_p の有限次拡大体の有限個の直積に同型。

(2.4) Λ を (2.3) のような環とし、 X を $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 上の有限型の scheme とする時、圏 $D_{\text{ctf}}(X, \Lambda)$ を次のように定義する。

(1) Λ が有限環の時、 $D(X, \Lambda)$ を étale site X_{et} 上の Λ 加群の層の圏の導來圏とし、 $D_{\text{ctf}}(X, \Lambda)$ を、次の条件 (i)(ii) をみたす $D(X, \Lambda)$ の対象 F 全体からなる、 $D(X, \Lambda)$ の full subcategory と定義する。

(i) cohomology 層 $H^q(F)$ は、ほとんどのすべての q について零であり、すべての q について constructible である。

(ii) すべての $x \in X$ に対し stalk F_x は、 Λ 上の perfect complex である。

(2) Λ が (2.3)(a) をみたす環の時、 $D_{\text{ctf}}(X, \Lambda)$ を次のように定義する。 Σ を、 Λ/I が有限環となる Λ の ideal I 全体の集合とする。 $D_{\text{ctf}}(X, \Lambda)$ の対象とは、各 $I \in \Sigma$ に対して $D_{\text{ctf}}(X, \Lambda/I)$ (すべてに (1) で定義したもの) の対象 F_I を与え、 $I, J \in \Sigma$ で $J \subset I$ の時、同型 $f_{I,J} : F_J \otimes_{\Lambda/J}^L \Lambda/I \xrightarrow{\cong} F_I$ (\otimes^L は導來圏におけるテンソル積) を与える system であり、

$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{I,I} \text{ は恒等射}, \\ I, I', I'' \in \Sigma \text{ で } I \subset I' \subset I'' \text{ なら } f_{I,I''} = f_{I,I'} \circ f_{I',I''} \end{array} \right.$
 をみたすもののことである。

(3) \wedge が (2.3)(b) をみたす環の時, $D_{ctf}(X, \wedge) = D_{ctf}(X, \mathcal{O}_\Lambda) \otimes \mathbb{Q}$ と定義する。ここで \mathcal{O}_Λ は, $\wedge = \prod_{i=1}^r F_i$, F_i は \mathbb{Q}_p の有限次拡大, \mathcal{O}_i を F_i の整数環とした時, $\mathcal{O}_\Lambda = \prod_{i=1}^r \mathcal{O}_i$ と定義する。つまり, $D_{ctf}(X, \wedge)$ は, 対象が $D_{ctf}(X, \mathcal{O}_\Lambda)$ と同じ, Hom が, $(D_{ctf}(X, \mathcal{O}_\Lambda)) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}) \otimes \mathbb{Q}$ と定義したものである。

(2.5) 以下では, 次のような三つ組 (X, \wedge, F) を考える。

$\left\{ \begin{array}{l} X \text{ は } \mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \text{ 上の有限型 scheme}, \\ \wedge \text{ は (2.3) の条件をみたす環}, \\ F \text{ は } D_{ctf}(X, \wedge) \text{ の対象}. \end{array} \right.$

この時, $R\Gamma(X, F)$, $R\Gamma(X \otimes R, F)$ は, ともに \wedge 上の perfect complex であることが証明できる。

$\Delta_\wedge(X, F) = (\det_\wedge R\Gamma(X, F))^{-1} \otimes_\wedge (\det_\wedge R\Gamma(X \otimes R, F(-1)))^{-1}$ と定義する。

§3. 一般化された岩澤 main conjecture.

次の予想 (3.1) が 一般化された岩澤 main conjecture である。
その中の条件 (v) は, 正確に述べられなかつた。

予想(3.1)。 (2.5) に述べたようなすべての三つ組 (X, Δ, F) に対して、可逆 Δ 加群 $\Delta_\Delta(X, F)$ の生成元 $\varepsilon_\Delta(X, F)$ を与えて、次の(i)-(v) が成立するようにすることが可能である。

(i) $(X, \Delta, F), (X, \Delta', F')$ とともに (2.5) に述べたような三つ組 (X は共通) で、環準同型 $\Delta' \rightarrow \Delta$ と、 $D_{ctf}(X, \Delta)$ における同型 $\phi: F \otimes_{\Delta'}^\Delta \Delta \xrightarrow{\cong} F$ がある時、 ϕ によって導かれ同型 $\Delta_{\Delta'}(X, F') \otimes_{\Delta'}^\Delta \Delta \xrightarrow{\cong} \Delta_\Delta(X, F)$ は $\varepsilon_\Delta(X, F') \otimes 1$ を $\varepsilon_\Delta(X, F)$ にうつす。

(ここで Δ' が (2.3)(a) をみたし、 Δ が (2.3)(b) をみたすという事態も許す。)

(ii) X, Δ は (2.5) にあるとおりとし、

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$$

は、 X_{et} 上の Δ 加群の層の複体の完全列で、 F, F', F'' は導來圏の中でみて、 $D_{ctf}(X, \Delta)$ に属するとする。この時、この完全列から導かれる同型

$$\Delta_\Delta(X, F) \cong \Delta_\Delta(X, F') \otimes_\Delta \Delta_\Delta(X, F'') \quad ((2.2.1) \text{によると})$$

は、 $\varepsilon_\Delta(X, F)$ を $\varepsilon_\Delta(X, F') \otimes \varepsilon_\Delta(X, F'')$ にうつす。

(iii) (X, Δ, F) は (2.5) にあるとおり、 Y は $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 上の scheme で、 $f: X \rightarrow Y$ を morphism とする。この時、同型

$$\Delta_\Delta(X, F) \cong \Delta_\Delta(Y, Rf_* F)$$

は $\varepsilon_\Delta(X, F)$ を $\varepsilon_\Delta(Y, Rf_* F)$ に移す。

(iv) (X, Λ, F) を (2.5) のとおりとし, X は素数 $\ell \neq p$ について $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ 上の scheme であるとする。この時, $\zeta_\Lambda(X, F)$ は次のように定義される。 $F \rightarrow I$ を F の移入分解とすると完全系列

$$0 \rightarrow \Gamma(X, I) \rightarrow \Gamma(X \otimes_{\overline{\mathbb{F}_\ell}} \overline{\mathbb{F}_\ell}, I) \xrightarrow{1-\varphi} \Gamma(X \otimes_{\overline{\mathbb{F}_\ell}} \overline{\mathbb{F}_\ell}, I) \rightarrow 0$$

($\varphi \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_\ell}/\mathbb{F}_\ell)$ は Frobenius 置換) から, 同型

$$\det_\Lambda \Gamma(X \otimes_{\overline{\mathbb{F}_\ell}} \overline{\mathbb{F}_\ell}, I) \cong (\det_\Lambda \Gamma(X, I)) \otimes_\Lambda (\det_\Lambda \Gamma(X \otimes_{\overline{\mathbb{F}_\ell}} \overline{\mathbb{F}_\ell}, I))$$

を得るが, ここで $\det_\Lambda \Gamma(X \otimes_{\overline{\mathbb{F}_\ell}} \overline{\mathbb{F}_\ell}, I)$ を cancel して,

$$\Lambda \cong \det_\Lambda \Gamma(X, I) = \det_\Lambda R\Gamma(X, F)$$

が得られる。(この最後の同型は移入分解のとり方にようない)

$\zeta_\Lambda(X, F) \in \Delta_\Lambda(X, F)$ は, この同型による $1 \in \Lambda$ の $\det_\Lambda R\Gamma(X, F)$ への像の逆元 $\in (\det_\Lambda R\Gamma(X, F))^{-1} = \Delta_\Lambda(X, F)$ である。

(v) (zeta の値との関係。もと詳しいことを (3.3) に述べる。) A を可換環で, \mathbb{Q} の有限次拡大体の有限個の直積になっているものとし, M を \mathbb{Q} 上の A 係数モチーフとする。(A 係数モチーフとは, A が作用しているモチーフのこと。) M_p を M の p 進 etale realization, X を $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ の空でない開集合で M_p が X 上で不分岐なるものとし, $\Lambda = A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ とおく。すると (X, Λ, M_p) は (2.5) をみたすが, $\zeta_\Lambda(X, M_p)$ は $M^*(1)$ の A 係数 zeta 関数 ((3.2) 参照) の値と関係し, その関係によって特徴づけられる ((3.3) 参照)。

ここで $M^*(1)$ は, M の双対モチーフ $\underline{\text{Hom}}_A(M, A) \cong \underline{\text{Hom}}(M, \mathbb{Q})$

を 1 回 Tate twist したもの。

(3.2) (3.1) の条件 (v) の補足説明として、まず A 係数 zeta 関数を論する。A を 可換環で、次の有限次拡大体の有限個の直積であるとし、 $\Lambda = A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ とし、この Λ について (X, Λ, F) を (2.5) のとおりとし、更に F は X 上の A 係数モチーフ M の P 進 etale realization であるとする。この時、 M の X 上の A 係数 zeta 関数 $\zeta_A(X, M, s)$ は 次のものである。

X の各閉点 x に対し 多項式 $P_x(t)$ を

$$P_x(t) = \det_{\Lambda} (1 - \psi_x^{-1} t : F_{\bar{x}}) \in \Lambda[t]$$

(ψ_x は x の Frobenius 置換) と定義する。 $P_x(t) \in \Lambda[t]$ と予想される。

$$\zeta_A(X; M, s) = \prod_x P_x(N(x)^{-s})^{-1}$$

(x は X の閉点を走り、 $N(x)$ は x の剰余体の元の個数) と定義される。これは \mathbb{C} 全体に有理型に解析接続されると考えられる。

(3.3) (3.1) の条件 (v) における $\zeta_{\Lambda}(X, M_p)$ と $\zeta_A(X, M^*(1), s)$ との関係を、もう少し詳しく説明する。

M を \mathbb{Q} 上のモチーフとすると、 M の Betti realization M_B 、 M の de Rham realization M_{dR} という有限次元 \mathbb{Q} -vector space が定まり、 M_B には $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ が作用し (その $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -fixed part を M_B^+ と書く)、 M_{dR} は 降 filtration $(M_{dR}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ をもつ。

X, A, M を (3.1) (v) のとおりとする。説明を略すが、 K 理論から定まる可逆 A 加群 $\Delta'_A(X, M)$ が定まり、

$$\Delta_A(X, M) = \det_A(M_{dR}^0) \otimes_A \det_A(M(-1)_B^+)^{-1} \otimes_A \Delta'_A(X, M)$$

とおくと、

$$(3.3.1) \quad \Delta_A(X, M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

$$(3.3.2) \quad \Delta_A(X, M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong \Delta_A(X, M_p)$$

が、(3.3.1) は、Hodge 理論、 K 群の regulator map, height pairing を用いて与えられ、(3.3.2) は、 p 進 Hodge 理論、 K 群の p 進 etale chern class map, $M(-1)_B^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong R\Gamma(\mathbb{R}, M(-1)_p)$ を用いて与えられる。そして (3.1) (v) にいう $z_A(X, M_p)$ と $\zeta_A(X, M^*(1), s)$ の関係は、

「 $z_A(X, M_p)$ は $\Delta_A(X, M)$ の或る元 $z_A(X, M)$ の (3.3.2) 1= よる像であり、しかも $z_A(X, M)$ の (3.3.1) 1= よる $A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ における像は、

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{-r} \zeta_A(X, M^*(1), s)$$

(ここで $r : \text{Spec}(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ は $\zeta_A(X, M^*(1), s)$ の $s=0$ における位数) に等しい」というものである。

§4. 例

例を述べる前にひとつこと、「部分 zeta 関数」か、abelian

Galois 群についての「 $\mathbb{Q}[G]$ -係数 zeta 関数」でとらえられることを説明する。

X, A, M を (3.2) のとおりとし, $f: Y \rightarrow X$ を finite etale abelian covering とし, G をその Galois 群とする。この時, $A[G] \otimes \mathbb{C}$ -値関数として,

$$\zeta_{A[G]}(X, f_* f^* M, s) = \sum_{\sigma \in G} \zeta_A(X, M, \sigma\text{-part}, s) \sigma$$

となる。ここで $\zeta_A(X, M, \sigma\text{-part}, s)$ は $\zeta_A(X, M, s)$ の部分 zeta 関数であり, 次のように定義される。

$$\zeta_A(X, M, s) = \sum_{G_i} c(G_i) N(G_i)^{-s} \quad c(G_i) \in A$$

と, $\zeta_A(X, M, s)$ の Dirichlet 級数としての表示とする。但しここに G_i は形式的有限積

$$\prod_{i=1}^r x_i^{n_i} \quad (r \geq 0, x_i \text{ は } X \text{ の開点}, n_i \geq 0)$$

を走り, $N(G_i) = \prod_{i=1}^r N(x_i)^{n_i}$ 。この時

$$\zeta_A(X, M, \sigma\text{-part}, s) = \sum_{(G_i, Y/X) = \sigma} c(G_i) N(G_i)^{-s}$$

ここで $(G_i, Y/X)$ は Artin symbol $\prod_{i=1}^r \varphi_{x_i}^{n_i}$ (φ_{x_i} は x_i の Frobenius 換算) $\in G$ を意味する。

$$(4.1) \quad X = \text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]), \quad Y = \text{Spec}(\mathbb{Z}[\beta_n, \frac{1}{p}]^+) \quad (\beta_n \text{ は } \S 1 \text{ の})$$

とおり $()^+$ は $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -fixed part), $f: Y \rightarrow X$ を標準写像とする。 $G = \text{Gal}(Y/X)$, $A = \mathbb{Q}_p[G]$, $A' = \mathbb{Z}_p[G]$, $A = \mathbb{Q}[G]$ とし, r を正の偶数として, $F = f_* f^* \mathbb{Q}_p(r)$, $F' = f_* f^* \mathbb{Z}_p(r)$, $M = f_* f^* \mathbb{Q}(r)$ とおく。

すると

$$H^m(X, F) = 0, \quad H^m(X \otimes \mathbb{R}, F(-1)) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

であり、よって $\zeta_{\wedge}(X, F) = \wedge$ である。また $\zeta_A(X, M) = A$ であり、同型 (3.3.1) (3.3.2) はそれぞれ恒等像に他ならない。

$$\zeta_A(X, M^*(I), s) = \sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}/p^n)^\times} \zeta_{\equiv \alpha(p^n)}(s+1-r) \sigma_\alpha$$

(σ_α は、 β_n を β_n^α にうつす $G\text{-}\ell(\mathbb{Q}(\beta_n)/\mathbb{Q})$ の元を $\mathbb{Q}(\beta_n)^+$ に制限して得られる G の元) であり、

$$\zeta_A(X, M) = \sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}/p^n)^\times} \zeta_{\equiv \alpha(p^n)}(1-r) \sigma_\alpha \in A,$$

$\zeta_{\wedge}(X, F)$ はこの元の \wedge への像である。

$$\zeta_{\wedge'}(X, F') \subset \zeta_{\wedge'}(X, F') \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \wedge$$

と見る時、(3.1)(i) は $\zeta_{\wedge}(X, F)$ が $\zeta_{\wedge'}(X, F')$ の \wedge' -基底である ($\zeta_{\wedge'}(X, F')$ に等しい) ことを言っているが、このことは実は classical な岩澤主予想の言い換えになっていることから確かめられる。

(4.2) X, f, \wedge, \wedge', A を (4.1) のとおりとし、 $F = f_* f^* \mathbb{Q}_p(I)$, $F' = f_* f^* \mathbb{Z}_p(I)$, $M = f_* f^* \mathbb{Q}(I)$ とおく。この時 $\zeta_A(X, M)$ は本質的に円単数である。 S を $\mathbb{Q}(\beta_n)^+$ の実素点全体の集合、 $\text{Map}(S, \mathbb{Q})$ を S から \mathbb{Q} への写像全体の集合とする。 $\text{Map}(S, \mathbb{Q})$ は rank 1 の自由 A 加群であり、 $M(-1)_B^+$ は $\text{Map}(S, \mathbb{Q})$ と同一視される。

$\text{Spec}(A) \setminus \{\text{原点}\}$ 上において

$$\Delta_A(X, M) = \mathbb{Z}[\beta_n, \frac{1}{p}]^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Map}(S, \mathbb{Q})^{-1}$$

$$\Delta_N(X, F) = H^1(\mathbb{Z}[\beta_n, \frac{1}{p}], (\mathbb{Q}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Q}} \text{Map}(S, \mathbb{Q})^{-1}$$

$$\Xi_A(X, M) := (1 - \beta_n)(1 - \beta_n^{-1}) \otimes \mathbb{C}^{-1}$$

但し $e \in \text{Map}(S, \mathbb{Q})$ は、 $\beta_n + \beta_n^{-1}$ を $\cos(\frac{2\pi}{p^n})$ にうつす S の元に 1 を、 S の他の元に 0 を対応させるもの。 $(3.1)(i)$ に言う所の、 $\Xi_N(X, F)$ が $\Delta_{N'}(X, F')$ の基底の像であるといふことか、§1 に紹介した classical な岩澤主予想の言い換えであることが確かめられる。

[補足] 本稿に述べたことの詳細は、筆者の次の論文にあります。

Iwasawa theory and p -adic Hodge theory (preprint),

Approach to Iwasawa theory of Hasse-Weil L-functions via BdR

(準備中),

p -adic Hodge theory and values of zeta functions of elliptic cusp forms (準備中)

なお本稿において、 p 進 Hodge 理論の役割がどこにあるかを十分述べなかつたか、同型 (3.3.2) の定義に、 p 進 Hodge 理論が不可欠なのである。 $(3.3.1)$ の方は、period integral や K -群の regulator の話として、すでに多くの人々が論じてきしたものである。)