

C^1 -closing lemma

都立大 守安 一峰

(Kazumine Moriyasu)

力学系理論の基礎となる定理に C^1 -closing lemmaがある。この定理は微分同相写像に対してだけではなく正則写像に対しても成り立つことが L. Wen [6]によって解明された。L. Wenの証明は、C. Pugh - C. Robinson [5]や J. Mai [2]の微分同相写像の場合の証明に比べ非常に簡潔なものとなっている。

ここでは、L. Wen の証明の概略を述べる。ただし、正則写像の場合には記号が煩雑になるので、微分同相写像に対して述べる。

§ 1. 定義と定理

いま、 M を閉多様体とし、 $\text{Diff}^1(M)$ を C^1 微分同相写像全体の集合で C^1 -位相を持つものとする。 $f \in \text{Diff}^1(M)$ に対して M の点 x が非遊走点であるとは x の任意の近傍 U に対して $U \cap f^n(U) \neq \emptyset$ なる $n > 0$ が存在するときをいう。非遊走点の全体を

$\Omega(f)$ で表す。このとき、 $\Omega(f)$ は f 不変な閉集合である。 M の点 x がある $n>0$ に対して $f^n(x)=x$ を満たすとき x を周期点といい、周期点の全体を $P(f)$ で表す。特に、 $f(x)=x$ を満たすとき x を固定点という。

定理 A. (C^1 -closing lemma)

M の点 q を $f \in \text{Diff}^1(M)$ の非遊走点とする。このとき、 f の任意の近傍 $U(f)$ に対してある $m>0$ が存在して次を満たす。 q の任意の近傍 U に対して

$$(1) \quad f(y)=g(y) \quad (y \in M - \bigcup_{i=0}^m f^{-i}(U))$$

$$(2) \quad P(g) \cap U \neq \phi.$$

を満たす $g \in U(f)$ が存在する。

定理 B. (C^1 -general density theorem)

集合 $R = \{f \in \text{Diff}^1(M) : \Omega(f) = \overline{P(f)}\}$ は、 $\text{Diff}^1(M)$ の residual 集合である。

§ 2. 定理 B の証明

この章では、定理 A を認めた上で定理 B の証明を与える。

いま、 $f \in \text{Diff}^1(M)$ とする。 f の固定点 p が双曲的であるとは、 f の点 p での微分 $D_x f$ の固有値が大きさ 1 を持たないときを

いう。

補題 2.1. (Hartman-Grobmann)

p を $f \in \text{Diff}^1(M)$ の双曲型固定点とする。このとき、 x の任意の近傍 U に対して次のことを満たす f の近傍 $U(f)$ が存在する。
 $U(f)$ に属する任意の g は、 U の中に g の双曲型固定点を持つ。

補題 2.2. (Franks[1])

$f \in \text{Diff}^1(M)$ とする。このとき、 f の任意の近傍 $U_0(f)$ に対してある $\varepsilon(1) > 0$ と f の近傍 $U_1(f)$ が存在して次のことを満たす。すべての $g \in U_1(f)$ と互いに素な有限集合 $\{x(1), x(2), \dots, x(N)\} \subset M$ と $\|L_i - D_{x(i)}g\| < \varepsilon(1)$ を満たす線形同型写像 $L_i: T_{x(i)}M \rightarrow T_{g(x(i))}M$ ($1 \leq i \leq N$) に対してある $g' \in U_0(f)$ と $B_{4\delta}(\{x(1), \dots, x(N)\}) \subset U$ を満たす $\delta > 0$ が存在して

$$(1) \quad g'(x) = x \quad (x \in \{x(1), \dots, x(N)\})$$

$$U \setminus \{M - B_{4\delta}(\{x(1), \dots, x(N)\})\}$$

$$(2) \quad g'(x) = \exp_{g(x(i))} \circ L_i \circ \exp_{x(i)}^{-1}(x) \quad (x \in B_\delta(x(i)))$$

を満たす。ただし、 $B_\delta(x) = \{y \in M : d(x, y) \leq \delta\}$ 。

定理 B の証明. $\{W_k\}$ を M の可算基とする。このとき、

$\text{Diff}^1(M)$ の部分集合 F_k と H_k を次のように定義する

$$F_k = \{f \in \text{Diff}^1(M) : P(f) \cap W_k = \emptyset\},$$

$$H_k = \{f \in \text{Diff}^1(M) : HP(f) \cap W_k \neq \emptyset\}.$$

ここで、 $HP(f)$ は f の双曲型周期点全体の集合である。

補題 2.1. より、あきらかに H_k は $\text{Diff}^1(M)$ の中で開集合である。さらに、補題 2.2. より、もし $f \in \text{Diff}^1(M)$ が W_k の中に周期点 p を持てば f にいくらでも近い g で p を双曲型周期点として持つものが存在することが解る。したがって、 $H_k \cup \{\text{int} F_k\}$ は $\text{Diff}^1(M)$ の中で稠密な開集合である。

$B = \bigcap_k \{H_k \cup \{\text{int} F_k\}\}$ とする。このとき、 B は residual 集合である。さらに、 $f \in B$ ならば $\Omega(f) = \overline{P(f)}$ が成り立つ。なぜなら、 U を $x \in \Omega(f)$ の任意の近傍とする。このとき、ある $W_k \in \{W_k\}$ が存在して $x \in W_k \subset U$ を満たす。定理 A よりある $g \in H_k \cup \{\text{int} F_k\}$ が存在して $P(g) \cap W_k \neq \emptyset$ を満たす。さらに、 $f \in H_k \cup \{\text{int} F_k\}$ なので、 $f \in H_k$ となる。従って、 $U \cap P(f) \neq \emptyset$ 。 U は任意の近傍だったので $x \in \overline{P(f)}$ すなわち $\Omega(f) = \overline{P(f)}$ 。

§ 3. 定理 A の証明

まず、基本的な摂動方法を 2 つ準備する。 $\|\cdot\|$ は TM のリーマン計量、そして $T_p M(\varepsilon) = \{v \in T_p M : \|v\| \leq \varepsilon\}$ とする。このとき、ある $\varepsilon > 0$ が存在してすべての点 $p \in M$ に対して $\exp_p : T_p M(\varepsilon) \rightarrow M$ を埋め込み写像とすることが出来る。

補題 3.1. 任意の $\eta > 0$ に対してある $\varepsilon > 0$ が存在して次を満たす。すべての $f \in \text{Diff}^1(M)$ と M の点 p と $B(v(2), \|v(1) - v(2)\| / \varepsilon) \subset T_p M(\xi)$ を満たす $T_p M$ の点 $v(1), v(2)$ に対してある微分同相写像 $h = h(p, \varepsilon, v(1), v(2)) : M \rightarrow M$ が存在して

$$(1) \quad h(\exp_p(v(2))) = \exp_p(v(1)),$$

$$(2) \quad \text{supp}(h) \subset \exp_p(B(v(2), \|v(1) - v(2)\| / \varepsilon)),$$

$$(3) \quad d_1(hf, f) < \eta.$$

ただし、 $B(v, r) = \{u \in T_p M : \|v - u\| < r\}$,

d_1 は $\text{Diff}^1(M)$ 上の距離。

$q \in M$ を $f \in \text{Diff}^1(M)$ の周期点ではない点とする。このとき、 $m > 0$ と $\lambda > 0$ に対して $f_1 = f_1(q, m, \lambda) : M \rightarrow M$ を次のように定義する。

$W(x) = \{y \in M : d(x, y) \leq \lambda\}$, $V(x) = \{y \in M : d(x, y) \leq \lambda/4\}$ とおく。

さらに、 $x = f^{-n}(q)$ ($1 \leq n \leq m$) に対して

$$F_x(y) = \begin{cases} \exp_{f(x)}(D_x f) \exp_x^{-1}(y) & (y \in V(x)) \\ f(y) & (y \notin W(x)) \end{cases} \text{ とする。}$$

このとき、

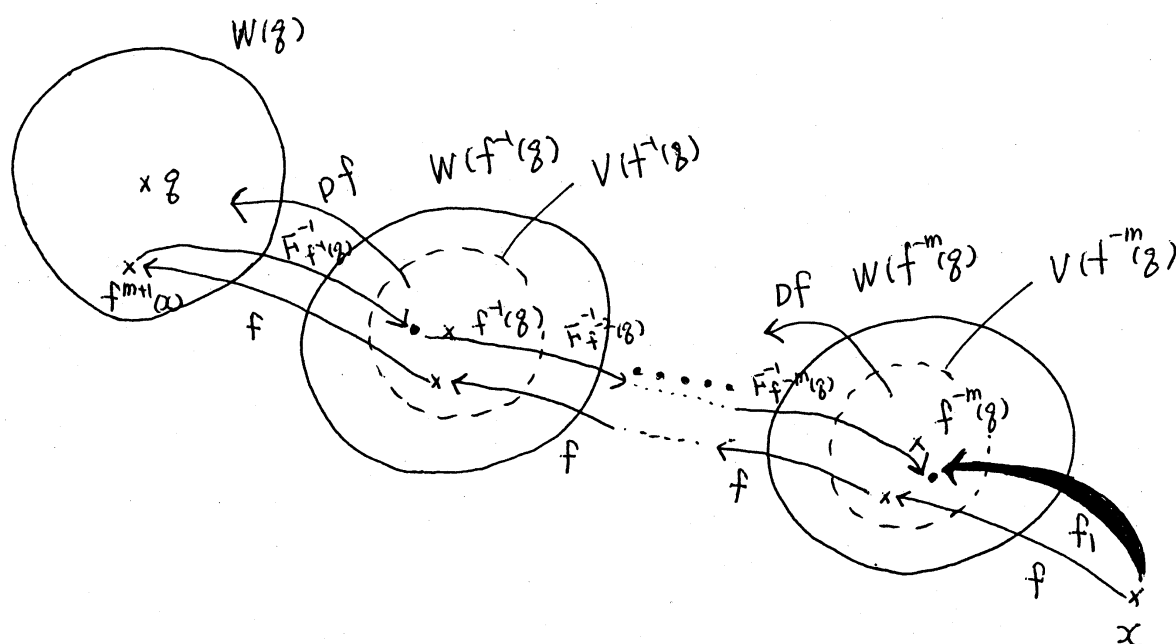
$$f_1(y) = \begin{cases} F_{f^{-n}(q)}(y) & (y \in f^{-n}(W(q)) \quad (1 \leq n \leq m)) \\ F_{f^{-m}(q)}^{-1} \circ F_{f^{-m+1}(q)}^{-1} \circ \cdots \circ F_{f^{-1}(q)}^{-1} f^{m+1}(y) & \text{その他} \end{cases}$$

とする。補題 2.2. より $\lambda > 0$ を十分小さくとれば f と f_1 はいくらでも近くとれる。この摂動を局所線形摂動という。

L. Wenのアイデアは、この f_1 の構成と次の定理3.2.である。

f_1 は、局所的に線型部分を持つというだけではなく、次のような性質を持つ。もし $z, f_1^k(z) \notin \bigcup_{n=0}^m \bigcup_{i=0}^{m-n} f^{-i}(W(f^{-n}(q)))$ ならば $f_1^k(z) = f^k(z)$ が成り立つ。この性質を使うことにより周期点を構成するために行う写像の摂動は、非常に簡単なものとなる。

注意) 補題2.2.は C^1 -位相に対してのみ成り立つ結果である。従って、 f_1 を C^2 -位相で f に近いものとしてとることは出来ない。



次の定理3.2.は、摂動の基準となる点を決定する結果である。この定理は楕円形の最長部分と最短部分の長さを比較するという初等的な計算によって示されている。

定理 3.2. M の点 q は $f \in \text{Diff}^1(M)$ の周期点ではない点とする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\rho > 2$ と $m \geq 1$ が存在して $T_q M$ 上の任意の有限集合 $P = \{p(0), p(1), \dots, p(t)\}$ に対して次を満たす点 $y \in P \cap B(p(t), \rho \|p(0) - p(t)\|)$ と $w \in P \cap B(p(t), \rho \|p(0) - p(t)\|)$ と $c(0), c(1), \dots, c(m) \in B(p(t), \rho \|p(0) - p(t)\|)$ が存在する

(1) $y = p(s), w = p(s')$ とすると $s' < s$ となる

(2) $c(0) = w, c(m) = y$

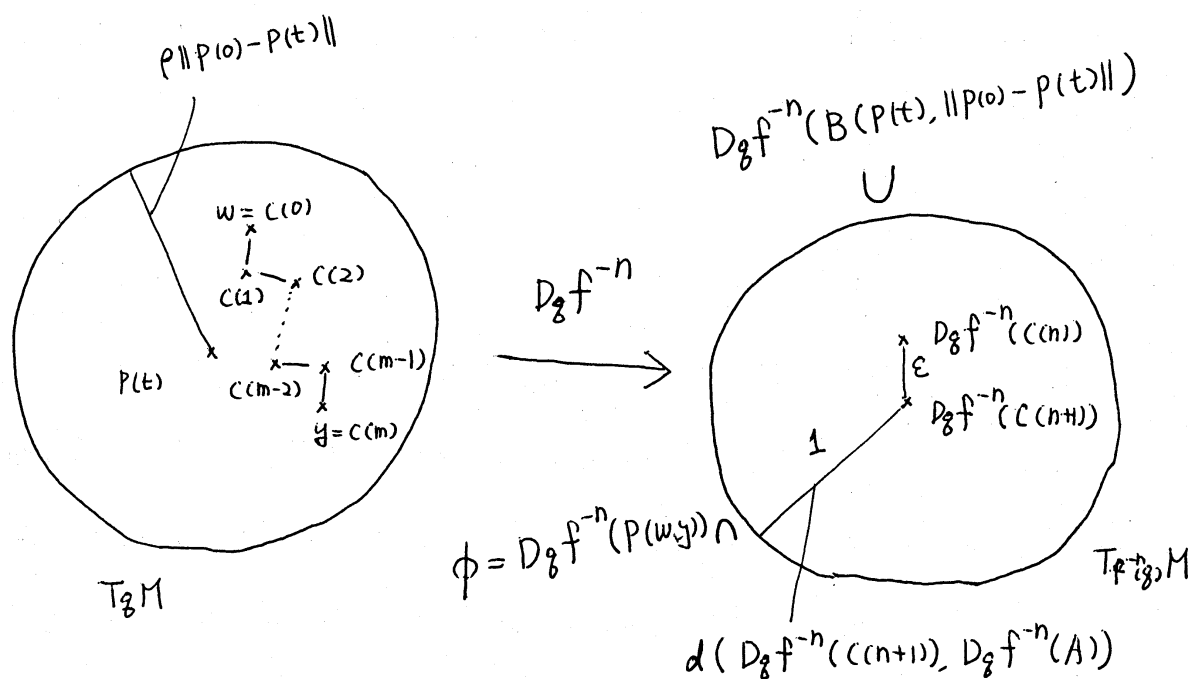
(3) $\|D_q f^{-n}(c(n)) - D_q f^{-n}(c(n+1))\|$

$$\leq \varepsilon d(D_q f^{-n}(c(n+1)), D_q f^{-n}(A)) \quad (0 \leq n \leq m-1).$$

ここで、 $A = P(w, y) \cup \partial B(p(t), \rho \|p(0) - p(t)\|)$,

$P(w, y) = \{p(s'+1), \dots, p(s-1)\}$,

d は $\|\cdot\|$ によって与えられた $T_q M$ 上の距離。



定理 A の証明

$q \in \Omega(f)$ は周期点ではないとしてよい。与えられた f の近傍 $U(f)$ に対して $\eta > 0$ を、もし $d_1(f, g) < 2\eta$ を満たせば $g \in U(f)$ となるようにとれる。 $\varepsilon > 0$ は補題 3.1. のもの、 $\rho > 2$ と $m \geq 1$ は定理 3.2. のものとする。また、 m に対して次を満たすように $\lambda > 0$ を十分小さくとる

$$(1) \quad d_1(f_1, f) < \eta,$$

$$(2) \quad W(q) \subset U,$$

$$(3) \quad W(f^{-n}(q)) \cap W(f^{-n'}(q)) = \emptyset \quad (1 \leq n \neq n' \leq m).$$

$W(q)$ 上の距離 d' を次のように定義する

$$d'(x, y) = \|\exp_q^{-1}x - \exp_q^{-1}y\| \quad (x, y \in W(q)).$$

q の近傍 V を $f^{-n}(\bar{V}) \subset V(f^{-n}(q))$ かつ $f^{-n}(\bar{V}) \subset V(f^{-n}(q))$ ($0 \leq n \leq m$) を満たすようにとる。このとき、 $q \in \Omega(f)$ より、ある $a \geq 1$ と $p \in \bar{V}$ が存在して $B(f^a(p), \rho d'(p, f^a(p)); d') \subset \bar{V}$ を満たす。いま、 $P = \{p, f^1(p), \dots, f^a(p)\} \cap \bar{V}$ ($= \{p(0), p(1), \dots, p(t)\}$) とおく ($p(i) = f^{a_i}(p)$ としたとき $i < j$ ならば $a_i < a_j$)。このとき、 $B(p(t), \rho d'(p(0), p(t)); d') \subset \bar{V}$ が成り立つ。さらに、 $P' = \exp_q^{-1}(P)$ そして $p'(i) = \exp_q^{-1}p(i)$ とすると、 $P' = \{p'(0), \dots, p'(t)\}$ かつ $B(p'(t), \rho \|p'(0) - p'(t)\|) \subset \bar{V}' = \exp_q^{-1}\bar{V}$ が成り立つ。従って、定理 3.2. より $y' \in P' \cap B(p'(t), \rho \|p'(0) - p'(t)\|)$ と $w' \in P' \cap B(p'(t), \rho \|p'(0) - p'(t)\|)$ と $c'(0)$,

$c'(1), \dots, c'(m) \in B(p'(t), \rho \| p'(0) - p'(t) \|)$ が存在して
次を満たす。

(1) $y' = p'(s), w' = p'(s')$ とすると $s' < s$ となる

(I) (2) $c'(0) = w', c'(m) = y'$

(3) $\| D_{\alpha} f^{-n}(c'(n)) - D_{\alpha} f^{-n}(c'(n+1)) \|$

$$\leq \varepsilon d(D_{\alpha} f^{-n}(c'(n+1)), D_{\alpha} f^{-n}(A)) \quad (0 \leq n \leq m-1).$$

いま、 $y = \exp_{\alpha} y', w = \exp_{\alpha} w'$ とすると、ある $b > m+1$ が存在して

$f^b(w) = y, f^i(w) \neq y \quad (1 \leq i \leq b-1)$ を満たす。

(I) (3) と補題 3.1. よりある微分同相写像 $h_{f^{-n}(q)}: M \rightarrow M \quad (0 \leq n \leq m-1)$ が存在して

$$(1) \quad h_{f^{-n}(q)}(\exp_{f^{-n}(q)} D_{\beta} f^{-n}(c'(n+1))) = \exp_{f^{-n}(q)} D_{\beta} f^{-n}(c'(n)),$$

$$(2)(i) \quad \text{supp}(h_{f^{-n}(q)}) \cap \exp_{f^{-n}(q)}(D_{\beta} f^{-n}(A)) = \phi,$$

$$(II) \quad (ii) \quad \text{supp}(h_{f^{-n}(q)})$$

$$\subset \exp_{f^{-n}(q)} D_{\beta} f^{-n}(B(p'(t), \rho \| p'(0) - p'(t) \|)),$$

$$(3) \quad d_1(h_{f^{-n}(q)} f_1, f_1) < \eta$$

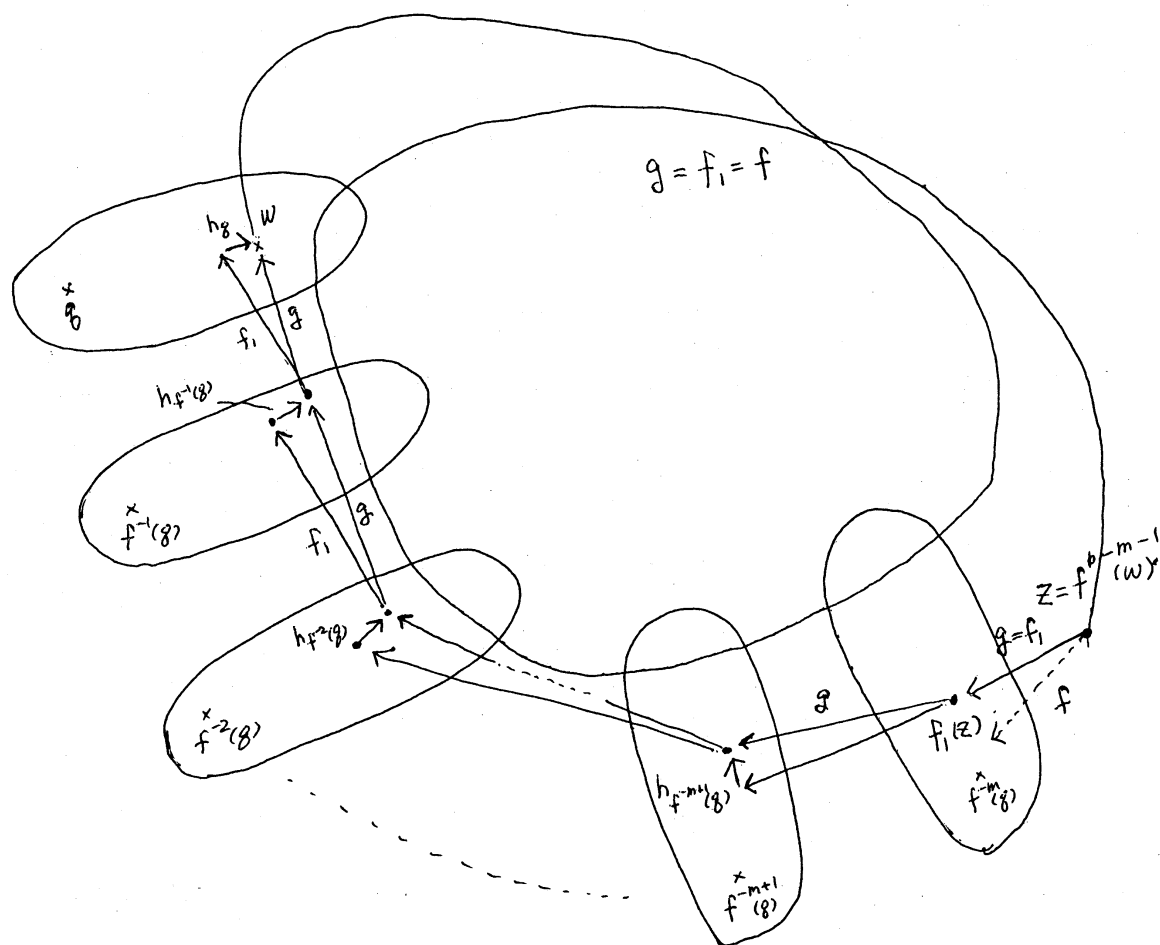
を満たす。

また、 $B(p'(t), \rho \| p'(0) - p'(t) \|) \subset \bar{V}'$ なので (II) (2)

(ii) よりもし $n \neq n'$ ならば $\text{supp}(h_{f^{-n}(q)}) \cap \text{supp}(h_{f^{-n'}(q)}) = \phi$ である。

微分同相写像 g を次のように定義する

$$g(x) = \begin{cases} h_{f^{-n+1}(q)} \circ f_1(x) & (x \in W(f^{-n}(q)) \quad (1 \leq n \leq m)) \\ f_1(x) & (x \notin \bigcup_{n=1}^m W(f^{-n}(q))). \end{cases}$$



このとき、

$$d_1(f, g) \leq d_1(f, f_1) + d_1(f_1, g) < 2\eta$$

よって、 $g \in U(f)$ を満たす。

また、 $z = f^{b-m-1}(w)$ としたとき、次が成り立つ

$$(a) \quad g^{b-m-1}(w) = z,$$

$$(b) \quad g^{m+1}(z) = w.$$

なぜなら、

(a): (I)(3)と(II)(2)(ii)よりすべての $0 \leq l \leq b-m-1$ と $0 \leq n \leq$

$m-1$ に対して $f_1^i(w) \notin \text{supp}(h_{f^{-n}(q)})$ 、さらに f_1 の構成方法よりもし $x, f_1^k(x) \notin \bigcup_{h=0}^m \bigcup_{j=0}^{m-n} f^{-j}(W(f^{-n}(q)))$ ならば $f_1^k(x) = f^k(x)$ が成り立つ。従って、

$$g^{b-m-1}(w) = f_1^{b-m-1}(w) = f^{b-m-1}(w) = z。$$

(b): $z = f^{-m-1}(y) \in f^{-m-1}(\bar{V})$ なので f_1 の構成方法より

$$\begin{aligned} g(z) &= f_1(z) \\ &= \exp_{f^{-m}(z)} D_z f^{-m} \exp_z^{-1} f^{m+1}(z) \\ &= \exp_{f^{-m}(z)} D_z f^{-m}(y')。 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} g^{m+1}(z) &= g^m(g(z)) \\ &= h_z \circ f_1 \circ h_{f^{-1}(z)} \circ f_1 \circ \cdots \circ h_{f^{-m}(z)} \circ f_1(g(z)) \\ &= w。 \end{aligned}$$

従って、(a), (b) より $w \in P(g) \cap U$ 。

REFERENCES

- [1] J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, Trans. A. M. S., 158(1971), 301-308.
- [2] J. Mai, A simpler proof of C^1 closing lemma, Scientica Sinica (Series A), Vol. XXIX No. 10(1986), 1021-1031.

[3]C. Pugh, The closing lemma, Amer. J. Math., 89(1967), 956-1009.

[4]C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem, Amer. J. Math., 89(1967), 1010-1021.

[5]C. Pugh and C. Robinson, The C^1 closing lemma, including Hamiltonians, Ergodic Th. and Dynam. Sys., 3 (1983), 261-313.

[6]L. Wen, The C^1 closing lemma of non-singular endomorphisms, Ergodic Th. and Dynam. Sys., 11(1991), 393-412.