

# 代数解析学と私

佐藤 幹夫 (京都大学)

Mikio Sato (Kyoto University)

[第一部] 3月26日 共同研究集会・講演記録 (大山陽介 記)  
p. 1 ~ 33

[第二部] 5月20日 大談話会(数理研) 講演記録 (織田孝幸 記)  
p. II 1 ~ II 4

[第三部] 補足 (大山陽介 記) p. III 1 ~ III 11;  
資料 a ~ e

[第一部]

## 代数解析学と私

京都大学・佐藤 幹夫 謙  
大阪大学・大山 陽介 記

.....どうも、ありがとうございました(0)。申し訳ないけど、何も話す支度をしていないので、日本語で話をさせていただきます。

今、小松先生から御紹介いただいたけれども、穴があったら入りたいところですが、私もいわゆる定年退官の歳になりました、普通ですと、これも先生によるのでしょうかけど、退官記念最終講義とかいうのを話されたりなんかするのでしょうかけど、私は今御紹介あった通り京大の教官としては last talk でしようけれども、mathematician としてはそうではないつもりですから、これからも数学者の仲間の一人と認めていただいて付き合いくださいるようにどうかよろしくお願ひします。まあ、給料が出なくなるだけの違いと自分では思っているのですけど、

河合：「ひょっとしたら *emeritus* では？」

*emeritus* か *demeritus* かわかりませんが.....。

先にちょっと訂正させていただきますと、概均質ベクトル空間のことをやったのは、実はさっき御紹介ありましたプリンストンにいた時でございまして、1958年に彌永先生の御紹介でその当時空いていた吉田先生の助手のポストに採用していただきまして、2年たらずでございましたが、教育大学に移るまでの2年弱の間、助手にしていただいて、その2年ちょっと後でプリンストンに行ったのは——超函数の仕事を発表したのは、英文で発表したのは59年だったと思いますが、その前に学士院紀要に短いあれを二つ、1変数の時と多変数の時の極く短いノートを書いたのが多分58年だったと思うのですが、それが André Weil 先生の目に止って、呼ぶようにということを、その時ニースに行っておられた佐武さんを通じて彌永さんの方に話がありまして——それで私は行ったわけですが、私は英語は全然その当時だめだったので、本当にお恥ずかしかったのですけれども、何も世間しらずで数学界というものの様子も何も知らなかったのですから、いろいろとんちんかんなことばかりやっておりまして、はたして、プラスだったかどうかは良くわかりませんが、まあその時にいろいろな方と知り合いになりました。数学者、物理学者、日本からも大勢そのころおられました。実は概均質ベクトル空間のことをやった理由は、色々なとこ

ろに、さっき引用してくださった数学のあゆみにもたぶん書いてあるんじゃないかなと思いますが、きっかけは要するにあの当時超函数の理論は大変評判悪くて、1変数のうちはそう悪くなかったのですが、多変数をしゃべり始めたら、皆から愛想を尽かされまして——近頃の string theory も肝心の物理学者からどうも見離されているらしいですが、数学者の方があれはもう数学になったと思ってよろしいのだと思いますが——ただ私の場合、肝心の数学者から見離されて、、。

それを書いた理由は、これも色々なときに書いたりしゃべったりしていて、お目に止っている方もあるかも知れませんが、私、大変生活に困窮しています、今は円高だなんだと言っておりますが、戦争が終わったとたんに1ドル2円から1ドル400円に200倍も円の価値が下がってしまいまして、親父がもう病気だったですから、私が母親とか兄弟とかみなければならぬ立場にあって、ひどく困窮しております。そういう訳で、旧制高等学校、今の駒場でございますが、それは昔は中学5年でて、あるいは4年でも受験資格はあるのですが、原則として5年から行って旧制3年、そして旧制大学を3年間。こういう昔はつまり 6-5-3-3 というシステムだった訳ですね。優秀な人は中学4年で中退して高等学校にはいる、そういう方は 6-4-3-3 で、多分、6-4-3-3 だったら今と同じになるのぢゃないかと思うのですが、合計して。そういうシステムだったわけです。旧制高校を出ますと中学校の免状がもらえるんです。私が一高を出たときに旧制中学の先生、その時には新制に切り替わっていましたので、旧制中学が新制高校に切り替わった訳で、実際には高校を出た途端に高校の先生の資格がもらえる。あまり大きな声で言われると困るんですが、本当は地方自治体の公務員な訳ですが、都立高校、私が出たところの校長に泣き付いて先生に採用してもらった。あの頃は要するにそういう時代ですから、あまりうるさいことを言わないでしてもらえた訳ですが、今と違います。私は都立高校の先生になったわけで、その年はたまたま一高を出てから一年浪人する羽になりますし、東大では僕は自分では自信があったんですけど、東大の数学の試験に落っこちてしまって、自分が先生になってみると落っこちる理由がよくわかるので、このような答案を書いたのでは落ちるのは無理がない気がして、自分では非常に自信があったんだけど、逆にやっぱりコツを知らなかつたような気がいたしますが、それでその年は浪人しまして、その時から働き始めた訳です。

翌年にまた受け直して入ったんですが、実際には、家が非常に辺鄙なところにありますし、片道2時間以上かかるようなところで、つまり、家が戦災で焼けた後、本当に田舎の方、軍隊の宿舎のようなところに寝泊まりしております、こここの場にはご存じの方はいらっしゃらないかも知れないけど、一時いらっしゃった方も、岩堀さんとかプリンストンの時の仲間の方もご存じだと思いますが、バラックの中

に大勢の家族で住んでいた。そういうところで暮らしておったわけで、働きに出るのも大学に出るのも時間が物凄い。西武電車があの頃は国分寺から、今でも国分寺から東の方へ行く、今は何と言うのでしょうか、あの頃川越線と言っておりましたが、川越鉄道、それが本当は国分寺からずっと川越の方にいったもので、所沢で西武本線と今は切り替わっておりますけれども、その頃は西武電車というのは大変ひどい電車で、その川越線なんかは時によっては貨物列車に積み込まれて、私もたとえば無蓋貨車なんかによじ登って、通勤した記憶もございます。それも、一日にほんの数台しかない、昼間なんかは3時間も4時間も時間が空いている訳ですね。夜、最終に乗り遅れると歩いて、今は沿線にもたくさん駅ができて賑やかになりましたけれど、その頃は——今は津田塾大がある何というところだったかな、いろいろ途中に駅ができていますけれども——昔は途中に駅がありませんで、山の中の本当に田舎で、月のない晩には、その、夜学の先生をしていたときには夜遅くなつて、採点なんかしたりいろんなことで遅くなつたりすると、もう着くのが12時過ぎてしまつて、もちろん歩いて帰るわけですね。そうすると真っ暗なときには、月が出ていないときには右も左もわからないような、いろいろドブというか、たんぽの脇の溝に落ち込んだりそんな情けない状態で、歩くのにもやっぱり非常に時間がかかる、1時間以上はかかったと思うが、何キロあったかな。そういう状態でございましたんで、

それで私の体験だとどうも25あたりを境にしてだんだん頭が硬くなってくる、ここにいる方もたぶんもう頭が硬くなってきて、私も憎まれ口をきいている訳ですが、どうもそういう感じが致します。25くらいまでは何をしていても横になれば、横になつた途端にはぱっと眠れるけれども、もう20代の後半になるとそういう若さというものはなくなつてきて、頭の中では色々考えていたくとも、なかなか要するに生活に追われてゆっくりあれする暇がなくなって、それで少し焦ってきて、物理の方もなかなか厳しくいろいろ、あの当時の独特の民主主義かなんかで、なかなか色々込み入ったことがあって就職が難しかった訳でございまして、それで、私、何かひとつ仕事をでっちあげて、と思って、そのころは若かったから色々なことに手を出して、いろいろなことを自分なりに考えたりやったりしておった訳ですが、何かまとまりそうなものをと思って、57年の夏休みに、夏休みしか自分の自由になる時間がありませんでしたから、夏休みに、ちょっとお恥ずかしい話ですけれど、素っ裸でパンツ1枚。軍隊の宿舎で、物凄く夏は暑いわけですね。窓を開け放しにしても暑くて、そういうところで超函数論を少し計算してみて、そしてそれを彌永先生のところに持つていって、それでやっと就職させてもらえた訳であります。今

からは想像もつかないような時代で、いろいろ年配の方にはあの頃のひどい生活を御記憶の方もいらっしゃると思いますが。

そんなことだったんですが、さっき言った訂正と申しましたのは、私、ただ、超函数のことを目的にした訳ではなくて、解析を少し体系づけたいという気持があつたわけですね。あの頃見る本はみんな海賊版ばかりですが、たとえば、Élie Cartan の Exterier differential system の本ですね。フランス語なんかはもちろん読めませんから、式だけ拾って読むようなものですけれども、そういうものとか、色々な本が海賊版で、Weyl の Classical Group なんかも戦後ずいぶん早い時期に海賊版で、海賊版というのはあまり大きな声で言うとこれもあれかもしれませんが、しかし、あの頃はそういう illegal なことがたくさんありますと、就職のことでも、地方公務員と国立大学の学生という身分はどうも両立しないらしい。

助手にしていただいて、給料はがくっと減りましたけれども、そのころは弟や妹も一応独立できる程度の歳になっておりましたので、非常にありがたかった訳です。そういうわけで一番何か手っ取り早そうなことを、超函数のことは気にはなっていましたことなんだけど、その時に気になったことを少し考えてみて、とにかく、非常に簡単なことありますと、たとえば Fourier 級数を考えますと、Fourier 級数というのは一種の Laurent 級数みたいなもので、つまり Fourier 級数を二つに分ければ、円内の正則函数と、円の外の正則函数。実際に解析函数を Laurent 展開したのであれば、あるリングの上では共通の正則域を持つわけですが、そうでない場合だったら当然共通の定義域がないわけだけど、でもその差に当たるもの、差でも和でもいいけど、それが円周上の勝手な実函数を表しているわけですから、要するに、1 変数の場合だったらば、実函数が解析函数の境界値と考えるのは、たとえば Fourier 級数ひとつ考えてもすぐわかることで、それが果たして局所的な性質を持っているか、つまり函数概念の拡張というからには、単に函数空間のベクトルというのぢゃなくて、局所化したり何かするような普通の函数概念に、そういうことを一々確かめていったわけです。つまり、自分のイメージで本当にいけるかどうか。そういうことが、高次元の場合にも、まず、2 変数だったらば、1 変数の場合のテンソル積みたいに考えれば、大体のところはうまく行く、実際は、それを completion みたいな、completion とは違いますけれども、そういうことが必要なわけですけど、そういうことを手掛かりにして考えていけば、高次元の場合もできて、その次に果たして座標に independent な、intrinsic な概念になっているかということ、それはちょうど、どうも cohomology というもの、境界値というのはつまり homology class らしい、obstruction class と言うのでしょうかね、そういうものらしいという感じをしましたので、その時ちょうど一松先生が紹介を書いてくださった Cousin 分布について総合報告を書いて下さった中に、五十何年でしたかね、そういう

sheaf の cohomology の解説があってこれはぴったりだと思いまして、それでそれをちょっと拡張して、相対 cohomology という形でやった、それがだいたい57年です。それで大体多変数の場合もそういうことでちゃんとつまり自然な概念として定義できるということに、細かい点はつめてなかったにせよ、自分としてはほぼ間違いないという確信を持ったところで年末に彌永先生に会ったというのが、だから目的としては実を言うとそれを、あまり Schwartz の仕事なんかをそんなに尊敬はしていなかったので、これを言うといろいろ語弊があるので面倒をおこすつもりはないので、わたしもそんなに自分で自慢するつもりはなかったのですが、ただ自然な形で定義して、それで解析をその上でやりたいという気持だった訳で、それで、プリンストンに行くことが決まった後、60年の夏休みにひかわ丸の最後の航海でシアトル経由でプリンストンに行ったのですが、その時に夏休み中にいろいろ、英語の研修みたいなものをやってくれましてね、多くの旅費をフルブライトで出してくれて、フルブライト関係の方でいろいろそういう面倒を見てくれて、だけど英語はあんまり上達しなかったですね。

そういうことがあったんで、夏休み直前に、東大で夏前と春でしたかそれとも暮れでしたか、1年に2回大談話会というのをやります。それで話す機会を与えられて、志村さんと私とがその時のスピーカーだったのですが、私はその時に私の持っている解析のプログラムをしゃべらせていただいた訳です。小松先生の、後の方が切れているけれど、だいたい前の方の半分ちょっとくらいはノート(1)が取っていると思いますが、東大数学教室の図書室に残っていると思いますが、それで、フィロソフィーがいくつかありますて、要するに、いわゆる代数幾何と同じだとその時思っているわけですが。D-module というのはこのごろは本当にたくさんの方が使ってくださって、私はそういう概念を持ち込んだだけで、後は柏原さんたちが非常に発展させて下さったんで、そういうものが natural な language である、formula であることはかなり認めていただいていると思いますが、

非線形の方もですね、同じだと思うんで、代数幾何の場合だったら、可換環論とその上の module の理論とは一体な訳で、両方で幾何学的なイメージで言えば、さっき斎藤さんの話(2)で出てきたように、可換環というのが空間を表しているわけですね。それからその上の module というのが環の上の幾何学的な構造、まあ vector bundle みたいなものを表しているわけですが、だから必ずしも多様体とかなんとかいうものをですね、点集合と考える必要はないわけで、つまり点集合としての多様体というのは、僕がよく昔の雑談の時に使っている、本地と垂迹で言えば、点集合としての多様体というのは垂迹の方であって、その元になっている環とか何とかいうほうは本地の方になるわけで、それはまあ、話は脱線しますが、たとえば同じ群

という言葉を使っても、レベルがいろいろ違うわけで、Lie 群と代数群とそれから有限群とでは違うわけですね。代数群という場合には点集合としての Lie 群とか代数群とかいうのは、いわば垂迹の方であって、本体は group の規則の方ですね。だからたとえば formal group なんという方ではむしろ規則の方を取り上げて、あれもやっぱりそうでしょうか、Hopf algebra か何か知りませんが、そういう形で捉えられる訳だと思いますが、要するに comultiplication と multiplication という形で、formulate できるわけで、だから無限群というのは決して有限群でその element の数が無限になったものというものではない訳で、連續群というものを強いて集合として表現すれば、いろんな形で集合として表現できる。それで、私、若いころはそういう自分の考えが非常に異端の考え方だということを知らないで、しゃべりまくっていて、大分それでまたみんなから嫌われたみたいで、このごろは、もうそういうことは言わないようにしております。Cantor とか Dedekind の無理数論というのはフィクションであるなんてことを言ったのですが、もうあまりそういうことを言うとまたますます変わり者だと思われてしまうから、今ではそういうことは言わないようにしております。そろそろ、言っても年寄りの言うことだからということで言っているわけです。

というわけで、残念ながらまだ nonlinear のほうは、。だから僕は nonlinear のほうはぜひ若い元気のある方にですね、かつて柏原さんがやられたように、そっちの方をもっと若い世代の方が大いに使って欲しい。また、一昨年のコングレスの時も感じたんですが、いろいろな話を聞いていてですね、たとえばいろいろ幾何学上の問題、幾何学に限らないけど——幾何学上の問題が、D-module の概念を使っていろいろ便利に扱えるケースがたくさんあるということは、多分、いろいろな方がもう認めてくださるようになったと思いますが——あの時聞いていて、いろいろ非線形がらみのことがいろいろあるわけですよ。そうすると、そういう幾何学とかなんとかのね、大局的な幾何学のいろいろな問題とかそういうことですね、こういうことも恐らく皆さん、皆さんというのはここにいる方のことだけを言っているわけではなくて数学の方たちが、もう少し真面目に nonlinear の場合の代数解析も取り上げてくださいれば、きっとかなりの問題が general nonsense、と言っては言いすぎかもしかんけど、かなりぱたぱた解けるんぢゃないか、というのがコングレスをぼんやり聞いていながら、そういうことが問題ならば、僕が若ければやってやるんだけどなあ、といった感じを持った話がいろいろありました。でも、もう全部忘れてしまいましたけれども。ぜひ、nonlinear の general theory もですね、要するに general theory というのはですね、何かと言うと——話がだんだん脱線していくって、僕の話はいつもしゃべっているうちに脱線しちゃうんですが——つまり、何でそんなことを言うかと言

うと、たとえばですね、線形微分方程式の場合でも、D-module という形で捉えれば、普遍性が始まから built-in されていて、これがどういう変換で不变だとかということは言う必要がないわけです。もう、D-module そのものがあらゆる方程式の表示の変換の可能性を全て飲みこんぢやっているわけで、その D-module でどういう generator を取り、どういう基本関係を取ってきてそれを表現するかというところで、つまり D-module というときに、それを free module を何か ideal みたいなもの、submodule で割った cokernel として表すわけですね。その時の表し方はもちろん無限にいくらでもあるわけですが、その表し方すら、単なる表しで、これも垂迹の方であります。本地の方は、もう不变なわけですね。だから、いろいろな微分方程式の本質的な概念は全部 D-module の中で表現できていて、それを表現するときにいろいろな、たとえば resolution の仕方なんてものも、もちろんそういう表現の仕方と同じなわけですが、それ以前の overdetermined system の扱い方というのはむしろそういう具体的な表示に非常にこだわっておったわけで、Spencer sequence とかなんとかいろいろありますけれども、そうするとそれが実は変換に対して不变だ、とかいうのが非常に大変な大定理のような感じを受けるわけです。実は、逆なんですね。Nonlinear の場合でも全く同じことが言えるわけです。午前中の講義<sup>(3)</sup>で僕が少し余計なおしゃべりをして、少しあれだったけれど、僕は今まで異端の解析学者と思われたかしらんけど、要するに、解析、微分方程式をおやりになる方がぜひそういう、ちょうど代数幾何をやる方にとては、環と module の category で物を考えるということが当たり前のことであるようにですね、解析をやる方にも、D と—D というのは非常に一般な意味で言っているのですが—D と D -module という形で物事を捉えていただければ無駄な手間、エネルギーがずいぶん無くなるはずだと思うんで、本質をはっきりするのに非常に役に立つだろうと思う。これは三十数年前からずっと思っていることなんですが。

で、元に戻りますが、もう一つ大事な点は holonomic、holonomy という概念ですね。hol というのは全体という意味でしょうけど、要するに、完全な system で solution というものをほとんど完全に表現していると言つていいようなものが holonomic system で、linear の場合でも nonlinear の場合でももちろん holonomic という概念はあるわけです。それから、microlocal と言うけれども、microlocal というのは結局は非可換環における localization にすぎない訳で、可換環の localization は要するにある種の商体、ring of quotients を作ったり、completion したり、場合によつては中途半端な、たとえば永田さんの henselization とかいろいろ都合のいいものを取ることもあるでしょうけれども、いろいろ要するに、基本的に言えば quotient を取り入れることですね。非可換環の場合にも、非可換の程度が modest な非可換環であ

ればやはり商環が作れるわけで、それが要するに pseudo-differential operator というものになるわけですね。それで、超局所化で symplectic structure というか、我々の言葉で言う contant manifold の上での analysis になるわけですね。そうすると、方程式が microlocal には簡単になって、複雑さというものは要するにそういうもののつながりとして理解できるですから、ある意味で幾何学化されるわけですね。それからもっと大事なことは holonomic という概念で、私、60年の時にちょっとそのことにこだわっていたんですけど、一般の holonomic でない方程式でも holonomic の場合になんとか帰着したい、全てを完全なる予定調和に持っていくみたいという気持でありますけれども、それはなかなかうまくいかないことがあって、その後いろいろな形で、非線形まで広げることとか、無限自由度にするとか、あるいは無限階とかですね。これは、河合さんや青木さんが無限階の場合ずいぶん突っ込んだことをおやりになってらしたけれど、いろいろな方向に来ている訳です。まあ、余り発散し過ぎると今度は却って holonomy の理想から離れちゃう訳ですけれども、それはあくまでも問題として思っているわけで、少しずつ、よりよい holonomy という概念に近づくべく努力しているわけです。実は、きょうそういう意味で話をしようかと思ったのですが、いろいろな事情で今日はちょっと。また、数日前、何か京大の数学教室の方でも、大談話会みたいのをやるので、話してみてはというお勧めをいただいたので、渡りに船と思って、その時に少しその話でも話させていただこうかと思っております(4)けど、だから今日はちょっと具体的な話は、。

昨年10月の後半に、河合さんや Boute de Monvel が彌永先生の紹介で向こうで日仏の交歓の会がありまして、私はその後何か書かないといけないと思って、河合さんには空約束ばかりして申し訳ないのですが、いろいろ準備しているうちに、準備しているとすぐ脱線してしまって、でも脱線したおかげでいろいろまた、。今日初めに話の材料にしようと思ったのは、その脱線した中のうちのどれかをお話ししようかと実は思ったのです。具体的な話の方がきっとよいかと思ったけれど。準備をする間に、少し具体的な計算式をやるのに、昔10年くらい前にソリトンのこと、無限次元グラスマンのことをやったりして、それを高次元版何かのこと、一般のアーベル函数やデータ函数のことをそっちの方から理解しようと思って、少し計算かけて genus 2 の場合について自分なりに計算しかかったデータを再利用しようと思ったのですけれど、今別に直接そっちには関係ないのですがその時のデータを利用しようと思って、家内に探してくれと頼んでいるけれども、まだ見つかっていないので、そのうちどっかから出てくると思うんですが、それを使って少し計算してみてもし僕の予想どおりであれば、また次の機会にでも話をさせていただこ

うと思っていますが、あるいはまた、いろいろ別に脱線しているうちに、いろいろ面白いことがあるような気がしたんですけども。

今日は申し訳ないけれどもこういう取り留めのない話で申し訳ないのですが、それでまあ、そういうわけで、その年から、1960年にプリンストンに行きました、それで、そこでもですね、やはり僕はどうも世間知らずだから、自分で考えたことを、自分が面白いと思うことは人も面白いだろうってつい、それは独り善がりだったわけですけれども、なかなかしかしそういうふうにはなりませんで、実函数というのは複素函数の cohomology class であるというようなことを言っても、あまり面白いと思うような人は残念ながら一人もいなかったわけで、私もそれでちょっと消耗してしまって、やっぱり何か問題になっていることをやらないといかんのかなあと思うようになった訳ですがね、でもその前に、日本でやってたことの続きとして、微分方程式のことをやりたい、しかし僕は微分方程式の専門家でないから、知っている方程式と言うと、いわゆる 2 階の熱方程式とか、波動方程式とか、あるいは Laplace のや Helmholtz の方程式とか、あるいは Riemann 函数が出てくる電信方程式というのですか、Equation of telegraphy と言うのですか、そういう類の、普通の教科書、たとえば寺沢さんの本なんかにも出てくるようなものしか知らないわけですよ。これぢゃあ、いくら何でも微分方程式の予備知識として心細い。後はまあ、いわゆる線形常微分方程式のことですね。あるいはまた、Monge-Ampère の方程式とか、Monge-Ampère だと変換論は割と面白いわけですが、それも非常に特殊なあれで、一般的な状態を知るのには足らない。それで、一般的なことを知るのには、Élie Cartan が勉強になりそうだと思って、海賊版の本を買ってさっそくそれを読んでみて自分なりに考えてみたけれど、どうもこれは魅力的ではあるけれども、何かしかしこれが微分方程式の一般論の基礎としていいのかなあと気持もないでもない。後、もう一つは微分環の理論があったわけですが、これの方はただ、解析学者は全然見向きもしないで、要するに代数関係の人が、Galois 理論の拡張として考えているだけで、解析学者とは全く縁のない——全くというとおかしい、Picard なんかはもちろん立派な解析学者ですけれども——大体そのころの解析のいわゆる中心と思われる人たちからは見向きもされなかつたような風だったわけです。そういうわけで、その辺のことを話して、Green 函数と言いましょうか、Riemann 函数と言いましょうか、そういうものを通じて holonomic system の支配力が及ぶのではないかということをいろいろ話して、それから微分方程式の場合にですね、D-module と考えていけば cohomology について、例えば、Ext<sup>1</sup> を考えることが solvability と関係してくるとか、つまり、Hom とか Ext とか微分方程式論がそういうホモロジー代数の言葉でかけるということをお話しした。実際、しかし、自分一人でどういうふうにして展開して

いいかわからないので、具体例を増やそうというのが実は概均質ベクトル空間をやった動機で、プリンストンへ行って、すぐそっちの方をやったんです。

実はあまり、超函数の一般論をしゃべっても誰も関心を持ってくれなかつたんで、そっちの方をやつたんです。概均質ベクトル空間ぢやなくて、どうすれば solution が具体的な初等函数でかけるようような、もう少し一般的な例が作れないかということを考えた訳で、初めはなるべく退化した多項式ならいいだらうと思って、例えば、3変数の多項式だったら、2次式ではつまらないから、次は3次式とすれば普通に書けば、それはもちろん Elliptic curve になるわけですが、ちょっと退化して2重点が出てくると有理曲線になるわけですね。そのうちで、一番退化した場合が cusp になった場合です。そんな場合でも計算してみると簡単にならないですね。だから、どういうふうにすれば、もう少し一般的な解が見つかるか、そのうちに、そういう立場からぢやなくて、そういう高級な幾何学を使うんぢやなくて、もっと初等的な、つまり群論的に考えればいいということに気がつきまして、それで概均質ベクトル空間のことを考えたのが、61年ですね。それでその年の秋に Armand Borel のセミナーで、2回続けてしゃべらせてもらって、大体、多変数の b-函数の理論、それから、ゼータ函数のことも含めて、基本的なことはその時に。概均質という概念を持ち込めば物事がすっきり formulate できるということに気がつくまではずいぶん時間がかかったのですが、気がついてからはほんの短期間で、ばたばたとできてしまった訳です。それも、まあ、偉い先生は誰も興味を持ってくれなかつたんで、やっぱりこれも消耗しまして、別に注目されたいと思った訳ぢやないけれども、あんまり無視ばかりされるとやっぱり消耗してしまうもので、それでその次にやつたのが、Ramanujan 予想のことだったわけですが、それが私が帰るぎりぎり間際の時に、何となくできそうな感じがしてきたのが、もう夏休みにはいってからだつたんで、それで8月の終わりかそのころにやつとできた。誰もいないときに一人残ってやっていたのですが、久賀さんが出張先から帰ってきたときにその話をして、それで、Selberg にその話をし、自分にはよくわからんけど、Weil には伝えておこうとかなんとか言っていましたけど、それで私は日本に帰ってきたわけですが。概均質ベクトル空間の話というのはそういう事情でできたわけなんです。そこをちょっとひとつ訂正させていただく、というのが脱線して、。

歳を取るところいうまあ、懐古談みたいになっちゃうのは、きっとそういうふうに言われるだろなと思うとしゃくに触るわけで、あまりそうでなくてなにか格好いいことをしゃべろうと思っていたんですが、ちょっと残念ですが、今日はまだデータ不足でその話は次回また話させていただきます。

私の話はいつでも、その時頭に浮かんだことをしゃべらせていただいているわけで、どこで打ち切ってもよろしいんで、しかし、こんなに大勢いらっしゃると、あんまりこういうちゃらんぽらんにやっているのが非常に恥ずかしくなってくるんですけど。

それで、超函数の話をしたからもう少し続けますと、とにかく、彌永先生は面白そうだと言って、僕は思うんだけど、これはやっぱり偉いなあと思うんで、誰かが突然やってきて、誰かがかつての自分の学生だったにせよですね、やってきてそんなふうに持ち込んだからといったって、たいていそんなのはつまらないからやめとき、と言っちゃうんぢゃないかと思うので、そう言わなかったのは、やっぱり彌永先生偉かったなと思う訳です。自分だったらどうもそう言いそうな気がするのですが、それはともかくとしまして、吉田先生の助手にしていただいたときに、すぐに小松先生と——その当時大学院生だったと思うんですが——紹介していただいた。そういう曰く因縁です。プリンストンでもいろいろな、例えばここにいらっしゃる中西先生もプリンストンでお目にかかった、中西先生は1年後、61年にいらっしゃったのですがね。いろいろな方と知り合いましたけれどね。

それで、伊原さんのことはやはり61年に、久賀さんも61年にいらっしゃったんだなあ、その時にすごい男がいるという話をさんざん聞かされたのが、その時です。自分ともう完全に10年違うというので、その時は自分ではまだ若いつもりでおりましたから、少し臺が立っているかも知れないけど、自分では若いと思っていたんで、ちょっとショックでございましたが、今は私は御紹介されましたとおり63で、実を言うと来月はもう64になるわけですが。先月でしたか、森重文さんから、まだ物凄く若い方で非常に優秀な方が、2世の方か違ったか忘れましたけれど、やはり後生恐るべしというか、若い方次々とすごい方が出ていらっしゃるようですから、心強いことありますが、わたしもこれからいろいろ若い世代の方々にいろいろお世話になりながら勉強したり議論したりしていければいいなあと思っています。まあ、こう歳取ってくるとね、気持とあれとがなかなかちぐはぐで、思うように行きませんで、つい先日、研究所の中でお別れの挨拶みたいなことをしましたときに、たまたま、自分の今の気持を思い付きで、昔マッカーサーがアメリカの大統領から解任されたときのですね、せりふを引用したのですが、"All soldiers never die, only fade away." というのですが、私もまだ死んだわけぢゃないんで、まだ fade away するだけでございますので、よろしく。もう頭はこちこちになっておりますけれど、よろしくお付合いのほどをお願いしたいと思います。

小松先生にはそれ以来頑張っていただいて、私と一緒に仕事した人の大部分は小松先生の門下。私が京都に22年前に参りましたときに、河合さんと柏原さんに一緒に来ていただいたのですが、河合さんはちょうどその時修士を卒業してこちらに、私は6月にこちらに。駒場の方でいろいろお世話になってあんまりぱっと来れないと思いまして、本当は69年の春から来るようというが、その当時の2代目の所長だった吉田先生のお説いだったわけですが、1年ちょっとだけ猶予していただいて、次の年の6月に来まして、河合さんがこちらに4月から助手としてこられた。Microlocal Analysis の話が出ましたが、きっかけをいろいろ話してもしょうがないけど、小松先生がヨーロッパやアメリカを回られた後で、日本に帰られて、確か1967年に超函数の講義をされて、若い方々、助手から大学院の方が協力してそれをレクチャーノートにされたのですかね。その方々のおかげで私はまた少し生き返って、数学をその時話しました。ここにはいらっしゃらないけど、三輪さんもやはり——今ちょっと Tata に行っておられますけど——その数年後に来られて、三輪さんも小松さんの門下。いろいろな巡り合わせで、私も消えてしまわずに今まで生き延びているわけですが、まだ、情熱の残り火みたいなものは少し残っていますので、少し、若い人に嫌がられるかもしれないけど、いろいろ嫌味をいってですね、喧嘩をしながら、数学をやっていきたいと思っておりますのでどうかよろしくお願ひいたします。

最初に超函数のことを外国で取り上げてくれたのが、若くして亡くなったフランスの Andre Martineau という方で、この方とはその後69年に吉田先生の国際会議の時に会いました。59年に Bourbaki セナーに紹介してくれたのが Martineau で、Martineau の門下から大勢 Schapira を初め、、森本さんは門下といつていいか知らないけれど。それから、小松さんもヨーロッパでいろいろ学生を作られたんだと思います。柏原さんはもう駒場の頃にすでに Grothendieck なんかを読んでたような人ですから、cohomology のことはもうお手の者で、河合さんはもう微分方程式の鬼みたいな人だったので、特に Ehrenpreis が好きであられたようですが。そういう非常に良い組合せで私のないものをお二人が持っておられたので、短期間で、、。何か周りの方にどう見られているか知らないけれど、実際に microlocal analysis ができたのは69年の後半くらいからかなあ、69年から、最初に microfunction の話を吉田先生の国際シンポジウムでしゃべらせていただいたのが始まりですけれども、69年から2年かせいぜい3年位の内に全部出来てしまったわけです、本質的な所は。出来るときは大体そんなものだろうと思うのですが、後で三輪さんが京都に来てくださったのが73年ですね、ニースからちょうど帰った時ですから。その翌年に神保さんが

京大の大学院修士課程に入ってくれたのですね。神保さんは東大にするか京大にするか非常に迷われたらしいんだけれども、どちらも合格していて、それで京都に残ってくれたおかげで。

Ising model のことをやっていたのもこれもいろいろ偶然もあったんで、実を言うとさっき紹介してくださいました朝永先生といた時に、先ほど言った事情で、これもあんまり顔を出していなかったんですけども、席だけ置いていたようなものでけれど。一番興味持ったことというと場の理論の方で、いわゆる Lehman-Symanzik-Zimmermann なんていいうのが50年代の初めごろでしたか後の方でしたか、私がいたのが54年から58年まで朝永先生の研究室におきましたのですが、そのころに南部先生のものとか、それから統計力学の伏見康治先生なんかが「量子統計力学」なんていいう本をお書きになって、そんなのもそのころだったと思うのですが、Ising model のことはその時に抽象代数を使って解けるというようなことが書いてあって、面白いと思ったのもそのころです。だから、そういう background があったんですけども、すぐにそれがやれると思わなかつたのはいろいろなきっかけで、最初は場の理論のことを少し、とにかく無限次元の解析をやりたいということが前から下心としてあったんで、それはさっきも少しお話したこととちょっと関係するのですが、解析がやはり普通の形では閉じないから、やはり広げておかないと解析自身にしてもだめだからということですね。

これも話があちこちに行きますけれども、Frederic Pham という方に招待していただいて、私ども3人でニース大学にいたのが72年から73年にかけてで、1年居りましたが、そのころに、こちらで2日目だかにお話しありました、FBIですね、Fourier-Bros-Iagonizer という名前、Bros、Iagonizer というのがフランスの数理物理学者ですが、その人達とも Pham の紹介でそのころ会ったわけですが、Pham の影響を我々はずいぶん受けている、恩恵と影響を受けているんですが、その時に、要するに microlocal analysis と場の理論を  $p$ -表示したものとは非常に関係があるというようなことを盛んに吹き込まれまして、その影響で、場の理論には元々色気があったわけですから、さっそくそれに飛び付いたわけです。それで、Olive とか、そういう人達とそのころ知り合いまして、河合さんが一番そのころ影響をもらおうとして、Stapp なんかとずっと長いことそっちの方をやっておられて。

少しその後で、僕はどちらかと言うと特殊函数みたいなのが好きで、holonomic な物が好きというか、なるべくきっちり最後まで僕の方の方法をやりたかったんで、そういうことを試みているうちに、三輪さんと神保さんが入ってこられて、それでその時に伊藤恵一さんから、Bariev という人の論文を教えられまして、それを面白いと思って、それであの頃毎年のように東大へ行って集中講義をしておりましたか

ら、そんなときぢやないかと思うのですが、顔見知りの鈴木増夫さん、偉い物理学者であられますけれども——僕より若い、ちょうど伊原さんとか青木和夫さんとかの同級生と私は聞いておりますけれども。私の知っている物理の方が何人かいるんですが、ときどき物理教室へ顔出しして、たまたま鈴木さんの部屋へよって、このごろこんなことをやっていると、ついでに Bariev という人の論文が面白そうだという話をしたら、そんならこういうものがあると言つて、Wu-McCoy-Tracy-Barouch というのを教えてもらった。それは長い論文で、僕は長い論文なんか見るのは全然ダメで、読んでも全然頭に入らないのですけれども、めくってたら Panlevé 函数が出てくるんですね。それで後ろの方に積分方程式が出てくる。あっ、これはなにかあるとその時思いまして、それで帰つて、二人のセミナーでそれをやつたわけです。多分あそこでは積分方程式でやつているけれども、これは分岐した面の上での、つまり、最初は 2 点でやつたわけだけど、2 点を除外したところでの 2 値の solution というのを求めれば、再現出来るんぢやないかとおもつて、それを最初に神保さんにやつていただいて、神保さんも大分苦労して、初めはどうも間違つていますと言われたんだけど、そのうちうまくいきますということで、一番大変な計算を、いろいろ Clifford group とかいろいろな道具立てはあったにせよ、Clifford group というのは結局 Onsager のアイデアを数学の言葉で言つただけのこと、Onsager 自身がそういう道具立てを使つてはいるわけですから、free field と回転の方とを。だからそういう抽象的な道具立ては数学者にとっては何でのもない物ですけど、解析的に本質的な部分というのが、数学で彼ら 4 人の仕事を言い換えてみると 2 点函数も微分方程式の方の自然な捉え方になりそうだということ。それから、deformation のことは前から僕は——これは数学辞典に感謝すべきことかもしれませんけど、そういうわけで僕は自分で文献なんかを勉強する機会に恵まれない生活をしておつたから、数学辞典みたいに気軽に読めるものを見て、いろいろな頭の中に雑多な知識があったから——これは絶対 deformation だと思ひまして、それが幸いにしてそれがそのとおりだったわけですが、微分方程式論でもいろいろ気になつて、まだ使いこなしていないデータを積み重ねて deformation のことをやってみたんで、これでこれが少し手の内に入ったと思ったわけです。

それで、なんでそっちの方に脱線したかと言うとこれも実際に仕事を 3 人でうまくぱたぱたとやつたのは極く短い期間でんまり別にだらだらやっていたわけぢや決してありません。その後、三輪さんたちは独自にもっとすごい仕事をやっておられることは皆さんご承知のとおりで、最初の日にも神保さんの話を聞かせていただいて、非常に感動を覚えましたが、algebra ですね、なんの構造と言っていいのかしらないけれど、表現の分解の仕方を保存したままで deform していく family が作れる

のですね。同じ日に大栗さんが話したのも何か Kähler manifold の上の cohomology 環だったかの deformation がやはりつくれる。そういう話というのは代数解析的な面で非常に自然な捉え方だと思います。さっき Lie 群の話の時に Lie 群というのは集合でないと言いましたが、それはやはり Lie 群のばあいだったら、formal group とか、あるいはまた quantum group とか言うのは Hopf Algebra として捉えられるわけで、そういう無限群みたいなもの、あるいは quantum group というのは deform されているから群でないにしてもそういう代数的な構造として捉えられるのは非常に自然なものであります。しかし、恐らく、そういう数理物理で数学者の出番が来ているのではないかと思うのですが、それはまだ始まったばかりですから、これから先まだ、今皆さん quantum group をやってらっしゃるけど、しかし、もっと違うことが本当はたくさんあるはずなんで、もっと本質的に新しいことをどんどん他の人開発して欲しいもので、そういうことはたくさんあるに違いない。要するに、まだ始まったばかりですから、、そう思います。

結局何か数学の話をしなければ、と思いながら、こういう退官の時にはありきたりの懐旧談になってしまって、大勢いらっしゃるのに気押されてしまったのかもしれません。

こういうところで話すのに相応しいかどうかわからないのですけれども、少しは数学の話らしい形をつけさせて頂くとしますと、例えば何でもいいのですけど、中学で方程式というのをやりますね。一元でも二元でも何元でもいいですけど、幾何学的な対象、object が方程式でかけるというのが Descartes の考え方でありますけど。円なら、 $x^2+y^2=1$  という二元二次方程式で書けるわけですね。それが円だというわけですね。それが、というのは良くないけど、もし円というものの幾何学的性質を強調するのであれば、それを直交変換群のもとで考えればよろしいのでしょうかけれども、もっと本質的な性質なんかだと、要するに代数曲線なり、代数多様体なりの intrinsic な性質、例えば genus であるとか、あるいはさらにその moduli であるとかですね。それで theta 函数とかいろいろなことが絡んでくる。これは古典的な理論でして、Euler あたりから始まって、楕円函数の加法定理なんかも逆函数の形で Euler がやっているのはご承知の通りで、楕円積分のいろんな形で言っているわけでありますけれども。あるいは、Jacobi とかその辺のいきさつは良く知られたとおりでしうけれども。要するに、まあ代数多様体に限るわけぢゃないけど、自然な対象として代数多様体というものを考えれば、方程式で書き表される対象であって、それを biregular なり birational な変換で移るものどうしを考える。それはそういう変

換で移るののどうしという代わりにもちろん、可換環として捉えればよろしいわけで、多様体上の正則函数の、あるいは、有理函数の全体を考えるということがちょうど、可換環の方がそういう代数的な性質を内に秘めているわけで、それを数学的に扱えば、いろいろな性質、望ましい性質を証明しようと思えば、そちらの方でやるというのがもう今日では常識になっていますけど、もともとは Descartes から始まっている訳ですね。変換のことについていろんな機会に私は昔の方程式論で、高木先生の昔の本を読んでいて覚えたことですけれども、一元の高次方程式なんかのいろいろな変換を昔やって、5次方程式ならどんな標準形まで変換できるかいろいろやられていたわけです。Lagrange であるとかいろいろな人がやって、Tschirnhaus という人が変換的一般論をやって、それは要するに、環なら環の generator をとりかえたらどういう風になるかということを議論していると言ってよろしいわけで、そういうふうに何か一つの algebraic system の代数的な構造に対して、generator を選んだり、その generator の間の基本関係式がどう変わるかを見たりすることは、代数にとっては日常茶飯事の基本的なことであるわけですね。それで多様体の場合には可換環というものを具体的に generator を持ち込んで記述してやると、つまり、ある可換環が  $x_1, x_2, x_3$  で生成される場合には、3次元の  $x_1, x_2, x_3$  のつくる Euclid 空間というか affin 空間なり、projective space なりの中で考えている多様体が幾何学的に実現されている ambient space、そして基本関係式が多様体の幾何学的な形を表すのですね。それは  $x_1, x_2, x_3$  が実数であるか複素数であるか有理数であるか、あるいは  $p$  進数であるかあるいは何かであるかということは二の次の問題で、それは表現の問題で、つまり垂迹の方ですね。大日如来が本地であって、それが天皇になったのか何になったのか知りませんが、そういう感じのものだと思います。

それと多様体の上の vector bundle とかもう少し複雑な構造ですね、そういうものが、module として表現できるということをご承知のとおり。それが代数幾何を数学的に研究する一番標準的な approach なわけです。解析だって同じだと思うので、別にその、さっきは少ししおらしいことも言ったけど、実数が切斷であるとか何とかであるとか、そういうものを信じる人は信じても構わないけれども、信じない人を迫害しては困る、と思うわけとして、要するに何だっていいので、解析ができるような property を備えてさえおればよろしい訳ですね。実際に、微分方程式を扱う時に、Euler 以来の一番まともな解析でやっているのは、やはり、そういうものぢやなくて、いろんな代数的な関係と言いますか、微分を含んだ中での代数的な関係を扱っているわけです。ただ、昔小松先生に注意されたけれど、数値解析の立場から言うと必ずしもそういう、いわゆる連続性だと、函数空間、いろんな種類の何々空間、何々空間が意味がある、それは確かにそうかもしれない、数値解析の立

場と大分違うのかもしれないと思っております。ただ、私のお願ひしたいのは、それだけが全てというようにならないで、もう少し寛容に考えて、少なくとも、いろいろな微分方程式の代数的な構造、あるいは解というものの構造を *intrinsic* に調べていこうという立場では、今でも大学の数学教育はそういうスタイルになっているだろうと思うのですが、余りそれに染まらないで、学生をそっぽっかりにならないようにして欲しいと思うのです。

非線形方程式だって同じです。線形の場合はどうだったかというと、いくつかの未知函数と称するものがある、それを微分したり、既知函数を掛けたりして一次結合を作ったものが *equal 0* というのが線形微分方程式ですね。そういうものがまた、いくつか連立しているというのが、一番一般的な形ですけど、この具体的な形はもちろん垂迹訳で、*intrinsic* にはそれはどういうふうに表現されるかと言うと、我々の方で選んだ必要なだけの未知函数を選んでやってですね、一個でもたくさんでもいいですけれど、それで生成された D-module を考えてやりなさい。今言った微分方程式というのは generator の間の relation にほかならない。D の係数を持ってきた、generator の間の一次関係式ですから、要するに加群の関係式、別の言葉で言えば、加群を *resolute* したときの 0 番目と 1 番目に過ぎないわけですね。その cokernel が D-module な訳です。それで、ちょうど hyperfunction が analytic function の relative cohomology であるのと同じように、今度は微分方程式に関する概念もそういう D-module に関する普通の homology 代数的な意味な言葉で表現できるわけです。そうすれば、もう、どんな generator を取ってやるとかそんなことは一切関係のない、はじめから *intrinsic* な形になっているわけですね。だから、もちろん、よい generator を選ぶことに意味がないと言っているわけではないのだけれども、そういう generator を取って具体的に表しておいて、後でいろいろ変換がどうのこうのして、それでも不変であるという議論をするのは、実はずいぶん迂遠なことであるということを言いたいわけです。

非線形の場合でも同じ訳です。非線形方程式という場合には、今度は何であるかと言うと、

*D*

そのものな訳です。D というのは、ご存じのとおり、ご存じと言うと失礼ですが、D-module の D というのは、線形微分 operator ですね。一般に言えば高次元の場合、線形の偏微分 operator、これらの全体は非可換環をつくっているわけで、その非可換環の上の module を考える、つまり、代数幾何の場合は可換環とその上の加群の

つくる category を持ってきて考えるわけだけれども、今度は、非可換な D と言うもの、非可換と言ってもさっきも言いましたとおり、非常に modest な意味でありますし、つまり微分 operator のトップの部分は実は可換な訳です。つまり、n回の微分 operator と m 回の微分 operator との積を作る、それぞれ A, B と思って、AB と BA というものを比べるとトップのところは一致しているわけです。それで、後のお釣りの部分がくい違っている。だから、AB と BA との差を取ってみると、それは階数が  $n+m$  より下がって、 $n+m-1$  に高くなっているわけですね。そういう意味で非常に可換に近い、準可換とも言うべき状態でありますから、そんなにめちゃめちゃに非可換ではないわけです。だから、いろいろ可換に近い、良い性質がある。例えば商環の理論が作れる、それが、microlocalization と称するもので、可換環の localization に相当する訳です。

それで、D そのものは何か。つまり、代数幾何の場合には、A という algebra があって、これが多様体を表していて、この上の module のつくる category というものの内で、この多様体の性質を議論できるわけですね、ある意味で。それと同じことで、今度は D というものがひとつの対象である。A として一番簡単なものは one point ですね、one point というものは 0 次元の多様体ですが、one point に対応する A いうものは、考えている係数体、有理数体なら有理数体で、そういうものにはかならないわけです。ですから、こちらの方には構造が入っていないとするわけです。それで、D の方も同じことで、可換体に相当する一番 trivial な非可換環というのは、多項式係数で考えれば、Weyl algebra というのですか、名前はどうでもよろしいですけれども。一般の代数多様体を定義する環の中には、代数方程式がいっぱい implicit に入っているわけです。Generator を選んでやれば、それらの間の関係式がたくさん必要になってくるわけです。今度の場合も、D というものを考えたけれども、ここに未知函数が潜り込んでくるという訳です。つまり、具体的に言うとですね、nonlinear differential equation の最も general な system がどういうものかと言うと、未知函数

$$u_r \quad (0 \leq r < m),$$

それから、独立変数というものの

$$x_i \quad (0 \leq i < n),$$

本当は未知函数と区別する必要はないんですけども。 $x_i$  を独立変数とする未知函数を微分したものを

$$u_r^{(v)} = \frac{\partial_0^{v_0 + \dots + v_{n-1}} u_r}{\partial x_0^{v_0} \dots \partial x_{n-1}^{v_{n-1}}} \quad v = (v_0, \dots, v_{n-1}) \quad v \in \mathbb{N}$$

と書きます。そうしたときに、nonlinear differential equation というものは、これらの間の関係式、一番簡単なものなら多項式関係、多くの場合はそれで間に合うわけですが、例えば

$$F_k(x_i, u_r^{(v)}) = 0 \quad k=0, \dots, N-1$$

関係式は無限個は出てこないとするわけです。こうした形の  $N$  個の方程式が与えられている。こうした場合に、どういうことになるかというと、普通の  $D$  というのは、微分 operator

$$\delta^{(v)} = \delta_0^{v_0} \dots \delta_{n-1}^{v_{n-1}}, \quad \delta_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \delta_{n-1} = \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$$

の上に、既知函数、例えば  $x$  の多項式なり、あるいは他の category での  $x$  の有理函数でも何でもよろしいんですけど、そういうものをもってきた有限一次結合の全体を  $D$  として、それが一つの閉じた非可換環を作っているわけですね。その上の module の議論が線形微分方程式の議論だったわけだけど、今度は係数が既知函数ぢゃなくて未知函数を許すわけです。だから、今度は何で生成されるかと言うと、generator は  $u_r$  たちと  $x_i$  たちと、 $\delta_j$  たちですね。例えば、この  $\delta_j$  を  $u_r$  にほどこすと、いうのはどういうことかと言うと、

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_i} = [\delta_i, u_r]$$

という commutator と考えればよろしいわけですね。微分 operator と函数との commutator が丁度 derivative を表すわけですから、上に出てきた  $\frac{\partial u_r}{\partial x_i}$  は generator ではなくて、 $u_r$  と  $x_i$  と  $\delta_j$  というものと合計、 $m+2n$  個の element で生成された非可換環として、もし多項式係数で良ければ、 $D$  が定まるわけです。多項式係数

でない場合はいろいろしなければいけませんけれど、今細かいことは抜きにしまして、そういう  $D$  を考えてください。それをもちろんもっと intrinsic な言葉で言うことは出来るわけで、 $D$  にある種の filtration があって、いろいろ条件を付けたほうが自然なわけですけれど、細かい話は今おきまして、とにかくですね、filtration と言いますのは、有限個の函数と微分 operator との commutator を繰り返し繰り返し取っていけば、 $u_r^{(v)}$  の方は作れるわけです。そして、公理としては、こうして commutator をとって作ったものはお互いに commute する、それはひとつの relation ですね。あとは、関係式  $F_k(x_i, u_r^{(v)}) = 0$ 。もう一つ言うと、 $x_i$  と  $\delta_j$  との commutator は Kroneker delta になって、それはもちろん自明ですが、それはこういった書き方をしたからで、もっと抽象的に言ってもよろしいが、要するに、自明なというか、誰でも知っているようなことを関係式として仮定する、それが微分環  $D$  としての構造を付与していると考えられる。それから、微分方程式に当たる構造もあるわけです。それだけいうと何か、独立変数や従属変数や微分演算子というものがみんなばらばらに見えるかもしれません、それは今、具体的な方程式を書いてご説明したから、そうした印象を与えてしまったわけで、実際には別に独立変数と従属変数との区別もありませんし、もっといろいろな変換が出来るわけです。さらに、商環を作ってですね、つまり microlocalization みたいなことをやりますと、microdifferential operator なんかを考えますと、もっと柔らかい構造になってくるわけです、当然のことですけど。そういう議論はもちろん出来るわけですね。

とにかく、そういうふうにして  $D$  というものを、今具体的な例からいかにして  $D$  を作るかというお話をしましたけれども、要するに、結果としてはこれは何かと言うと、線形偏微分 operator であって、その係数の中に未知函数の derivative を含んでいるもの、こういえばよろしいわけです。しかし、未知函数の derivative どうしは独立変数ではなくて、代数的な関係がある、これが微分方程式である。だから、この  $D$  と言う物を見てやれば、微分方程式の情報は全部入っているわけで、しかも、具体的な generator の取り方というようなことは関係ないわけです。あるいは、Soliton の人達が昔良く使っていた、Bäcklund 変換というのは、元々、Monge-Ampère 方程式に関連して導入された概念ですが、それを非常に拡張して使っている言葉ですが、いずれにしても、そういう変換というのはご存じのとおり、普通の変換と違つていろいろ derivative を含んだ変換をしているわけですね。Miura 変換とか、何にしても。あるいはもっと古典的な例で言えば、正準変換なんていう場合には、1階の偏微分方程式を扱う時に、momentum や何かを、まあ、余計な話はやめましょう。

とにかく、微分方程式論の中では、正準変換なんていいう場合には、要するに、單なる変数の変換とかそういうものとは違うわけですね。独立変数と従属変数がいろいろ混ざって変換されるわけです。そういう変換のことも、もちろん built-in されているわけです。だから、この  $D$  の性質として、cohomology を始め、たくさんの概念が構成できるわけなのです。あるいは、 $D$  の上の module の作る category、そういう中での intrinsic な言葉を使って、定義された概念というものは、初めから変換で不変ということは自明なわけですね。だから、いろいろ具体的な resolution を作ってどうのこうのと言った議論以前にそういう所でいろいろなものが定義できるというわけです。

$Solution$  というものは、可換環の場合であったら、多様体の点というものは、例えば、有理点を求める時には、環  $A$  から有理数体への homomorphism を求めれば、 $A$  の有理点というものが与えられるわけですね。線形方程式の場合だったら、 $D$ -module  $M$  があるときに、 $M$  から、例えば、良くわかった holomorphic function とか、real analytic function であるとか、hyperfunction であるとか、microfunction であるとか、そういうところへの  $D$ -homomorphism を与えてやれば、それは、もとの線形微分方程式の holomorphic solution や hyperfunction solution や、その他いろいろなものが求まる。それと同じことで、非線形微分方程式を解くということを、こちらの言葉で言ったら何か。この  $D$  ですね、いくつかの axiom を満たす filtered ring になるわけですが——filtration と言うのはこの微分方程式の階数から入ってくるのですが——この filtered ring からよく知られた filtered ring への homomorphism が即ち、この方程式を解くことにほかならないわけです。良く知られたというのは、例えば、収束冪級数のところで解く、これが Cauchy-Kowalewsky 型の定理ですけれども、そういうときだったら、例えば、原点における local solution を求めるのだったら、そこにおける収束冪級数の作る環の上の普通の  $D$  を取ってくるわけです。よろしいですね。そこで、非線形方程式を表す非可換環の方から、よくわかった  $D$  の方への filtered ring としての homomorphism を求めてやれば、それがつまり方程式を解いたことになります。つまり、非線形方程式を表す  $D$  の element を全部置き換えるわけですから、その中の  $x_i$  が例えば(よくわかった)  $D$  の  $x_i$  に行ったとしますね、それも別に初めから言う必要のないことなのだけれども。同じ  $x_i$  というのは良くないかも知れないけれど、(よくわかった)  $D$  の方の函数を  $z_i$  とすると、非線形方程式を表す  $D$  の  $x_i$  が解の方の  $z_i$  にいったとしますね、そして  $u_r$  が何になったかというと、階数 0 の元にいくわけです。階数 0 の部分、 $D^{(0)}$  の部分というものは、まさに(よくわかった)  $D$  の函数の部分になるわけです。この(よくわかった)  $D$  というのは、今言った、局所的な解析函数の環、あるいは体でもよろしいけれど、まあ環ですね。すると  $u_r$

というものが何になるかというと、0階のものは0階にならないといけないから、 $D^{(0)}$ の中に入るわけですね。 $u_r$ の行き先が具体的な  $z_i$  の収束冪級数になってないといけない。当然、0は0に行かないといけませんから、 $F_k(x_i, u_r^{(v)})$  は0に行かないといけない。 $u_r$ の行き先が元の方程式を満たしているというわけで、(非線形方程式を表す)  $D$  から(よくわかった)  $D$ への homomorphism が、具体的な、垂述した形で言うならば方程式を解いたことになる。それは同時に、元の方程式と同等な、いろいろ難しい変換をしてえられる別の方程式ですね、Bäcklund 変換でも何でもよろしい、そういう変換をしてえられる方程式を解くのと全く同等で、そういう区別は一切ここではしていない、こういうわけですね。

僕が言いたいのは、D-module の場合にはある程度認めていただいたように、いろんな数学の中の具体的な問題が、こういう非線形方程式に絡んだ問題が、こちらの言葉で言えば、無駄なエネルギーをずいぶん省略できるわけです。こっちの方で、いろいろな構造定理をやらなきゃいかんことがいっぱいあるわけですが、少しはやってあるし、例えば、infinitesimal な解の deformation、方程式の deformation のことも面白いことがいっぱいあるのですが、そういうことは、今は思わずぶりかもしれないけどやめておいて。何年か前に、Johns Hopkins で話をしたとき、そういう話をさせていただいて、その時の話は塩田さんがノート<sup>(5)</sup>して下さったのだと思いますが、その時にそういう話を少しさせていただいたと思うが、これはもう長いこと胸に何十年も、30年位か? かなり真面目に考え初めようと思ったのが70年代のわりと早い時期ですね。そのころから、これをやりたいやりたいと思っていたのですが、なかなかチャンスがなくて、そのうちに私自身の方が耄碌してしまったわけで、まあなんとかすっかりこれが去ってしまわないうちに、誰かに引き継いでいただけたらなあと思っているわけです。

今日、午前中に竹井さんが話してくださった話と、どういうところでつながるかと申しますと、私は、ああいう方面の話は再び Fredric Pham に影響を受けたのですが、いわゆる alien calculus というのですか。それのことを真面目に考えるようになったのが、3年かそこら前に、ギリシャであったある研究集会で Pham の話を聞いたときに、これは真面目にやらなきゃいかんと感じて、それから帰ってきてから河合さんと一緒にこういうことを始めたわけですね。それで、時間感覚がわからなくなってきて、いつがいつだかすっかりわからなくなってきて、だいぶ頭がいかれてきているからわからないのだけど、とにかく、今日お聞きになったように、竹井さんなんかが非常にがっちりした結果を出しています。Voros という人の仕事に關係あるのですが——こちらの方は数理物理学者やいろいろな人が関連した仕事をやっているのですが——一番整理した形でやったのが、Voros と、あまり微分方程式と

は関係ないけれども、Ecall ですね。Ecall の alien calculus とふつう言っていますけれど。

河合さんたちがおやりになったことで一番大事なことは、午前中の話のまとめの中にありました。要するに、解析的な solution についての structure を表すのが monodromy なんですけれども、monodromy 群と別の解析函数とのつながりを付けるのがいわゆる resummention と呼ばれるものです。それは、二つの違う category を結び付けるもので、一つは解析函数の方での  $D^{(0)}$  ですね、そちらは普通の解析函数、実際には holonomic ですから global になるわけですが、もう一つそれと違った——我々の方の言葉で言えば定数係数の擬微分作用素といったものになるのですが——物理の方で言えば small parameter、例えば Planck の常数に関する formal power series みたいなものです。我々の言葉で言えば、microdifferential operator、一変数で言えば、

$$\sum_n^{\infty} a_n \partial^{-n} \quad (*)$$

これも formal な category から解析的な category、いろいろありますけれど、解析的な category でも普通の意味で収束する冪級数ではないわけです、発散しているわけです。発散していても、microdifferential operator としては、かなりゆるい条件でこれは収束してくれるわけです。そういう category で考える、だから、普通の local な収束冪級数よりはずっと広い category を考えることに当たるわけです。そういうところで solution を持てばいいわけですね。これは一種の filtered ring で、微分 operator という意味は、階数と言う物が定義されているわけで、(\*)の全体は filtered commutative algebra になっているわけです。ちょっと話がごたごたしますけれども、

(\*)の全体は可換環です、それに普通の  $z_i$  とか微分 operator  $\frac{\partial}{\partial z_i}$  を添加してやる、そうして得られた  $D$  というものが、この場合、普通の解析函数の category で微分方程式を解くのとは違った、別の filtration の入った可換な函数環

$$\sum_n^{\infty} a_n(z) \partial^{-n} \quad (\#)$$

の上の微分 operator と考えられるわけです。これも、ある意味でよくわかったと言つていい、別の  $D$  を作るわけです。だから、普通のように解析函数の上で解くというのと違って、(#) 全体の作る環の上で解きなさい、それがある場合には WKB

analysis とよばれるもの、もっと一般に言えば singular perturbation と呼ばれると思いますが、そういった形になっているわけです。そして、これは今私は D からスタートしまして線形方程式でしゃべりましたが、線形方程式に限らないわけです。特にある種の gradation がはいったような非線形方程式ですね、それは例えば、soliton の方程式に出てくるのも、広田の bilinear equation とか何とか言うのも、一種の homogeneous な構造を持っているわけですね。そういう場合にまで拡張できるわけです。そういうレベルですね、singular perturbation 的な解を議論できる。

そのいいところとは何かと言うと、これは恐ろしく D-module の構造が簡単になるのです。つまり、D-module の分類というのが物凄く簡単になってですね、みんなある意味で雑に言って、gradation がはいった特別な場合ですが、線形の場合は全部それに当てはまるし、bilinear の場合も、degenerate してなければそれに当てはまるわけですが、あるタイプの場合には D-module の構造論、つまり D-module のつくる category の構造が非常に簡単にになります。それが、Vorosたちの calculus の非常にいいところで、つまり、解析函数の空間で議論すると、monodromy というものは非常に高級なわけですね。Monodromy っていうのは、普通の Gauss の超幾何なんかの場合だったら、monodromy は非常に簡単に計算できて、具体的に monodromy matrix が  $\Gamma$ -函数か、もっと上手にやれば指数函数の範囲で求まってしまうわけです。だけれども、ちょっと確定特異点が 4 個以上になると、もうそうはないわけですね。Panlevé なんてものが出てきてですね、Panlevé と言ったって、Panlevé 方程式を解けば monodromy が求まるなんて訳には残念ながらいかないのでして、Panlevé 方程式が言っているのは monodromy を変えないように変形するという方程式で支配されると言っているだけですから、初期条件を与えないとも monodromy は計算できない。だから、ある意味で堂々巡りをしている面があるわけです、monodromy を決定するという問題から言うならば。ところが、この Vorosたちの calculus はですね、そういうのに対しても非常に強力なアプローチを与えている。ただ、まだ 100 パーセントなんて言うわけにいかないことがいろいろあって、本当に holonomic 教の教祖になるためにはまだとてもその資格はないのですが、とにかくかなりいいことがいえるわけですね。それが、竹井さんがまとめの形で言わされたことで、つまり普通の解析函数の空間と、今言った(\*)の空間との対応がつく訳です。特に、solution の場合にはしかるべき意味で実際に同型対応がつくわけです。まあ、二つの間は現実的な意味で同型ぢゃないけれど、部分的な同型と言うべきかもしれません、とにかくそういうものがある。

それがいわゆる resummention とか Borel 変換とか言われているものになる訳ですけれど、しかしそれは unique ぢゃないんですね。つまり、向きを変えていくと丁

度それは積分路を動かすのと同じことで、積分路をちょっとくらい動かしたって結果に影響はないけれど、どっかで何かを取り込んだりすると、がたっとかわる訳です。それと同じことがあって、この同型というのも、ある積分路の取り方によつてですね、つまり、resummation の積分の取り方によって、少しくらい動かしてもこの同型対応は stable だけども、あるところではぱあっと急に変わるわけですね。そういうことが起こるわけです。一種のこれも homology 的な感じと非常に良く似て、obstruction いろいろなことが起こるというのと似ているわけだけれど、とにかく、この対応が unique でないわけです。Unique でないけれども、あるやり方をあらかじめ決めておいて、あまり遠くまで動かさないで、近所だけでゆらゆらさせてやれば stable な対応がついているわけです。その意味でですね、ちょっと unstable というか unique ではないけれども対応がつく。だから、(\*)で解いておいて、解析函数の空間へ持っていくというふうにすれば、(\*)で解くというのは、ある意味で数学的には非常に簡単なわけです。ただ、もちろん無限級数が出てくるから、まだいろいろ、本当に holonomic 的にぱつといっているというのは言い過ぎなんんですけど、しかし、かなりいい構造が入っているわけですね。そのことを竹井さんが言われたわけで、(\*)の方では、D-module の言葉で言うならば、D-module が projective と言つていいんだと思う——僕は余り詰めて考えていないけれど、多分、そういうといふと思うんだけど——要するに、一階化されてしまうわけです、本質的には。Projective という場合も、結局は乱暴に言えば、free module の直和になっているということに非常に近いわけですね。大体そういう感じになつていて、あんまりうるさいことを言わなければ、そういう感じになつてしまうわけです。ちょっと今のは類推で乱暴に言葉を扱ったかもしれないけれど、もう少し正確な言い方をするためにはもう少し準備して言わなければいけないけれども、大体、(\*)の方で考えたときの solution を考えるとそれは、今度は D 自身がいろいろなものを取り込んでしまつて、とにかくそちらの方で解くことは非常に簡単な問題になつてしまうわけです。大体一階の方程式を解くことでかたづいてしまうわけです。

一階の線形方程式を解くということは、何か係数を積分して、

$$\psi = e^{\int S dx}$$

こういう感じになつてしまうわけですね、大体において。この肩に出てくるのが Riccaci 方程式の解にあたる、Riccaci 方程式というのは 0 階の方程式といつてい

んです、こっちの立場でいって。つまり、代数的に解ける。無限級数は入ってくるけれども、これはある一定の仕方で代数的に解けてしまう。そのところで

Riemann 面が入ってくるわけですけれども、そういう構造になっているわけです。

この積分が非常に良い性質を持っていて、その D-module に proper の量として—— $\psi$  自身はそうぢゃないんですけど、generator ありますからそうぢゃないんですけど—— generator  $\psi$  の対数微分を取ったものは  $\psi$  の取り方によらないことがいえるわけです。

このことは線形に限らないで、さっきいったように、graded な構造をもつていて、ある generic という条件を満足していれば、そういうことは実はいつでもいえるわけです。だから、(\*)での議論は物凄くしやすいわけですね。それを解析函数の空間に変換してやれば、本当の解が求まるであろう。ただそこで、どこかの threshold を越えるとですね、obstruction を越えると、関係が変わってくる。その関係のこと、河合さん竹井さんが非常にきれいにしておられる訳で、非常にこれは基本的な結果であります。まあ、Voros なんかの仕事に、Voros は monodromy そのものはやっていないけれど、別の関係でそれに相当することをやって、先業があるわけですけれども。

私はもっと一般の高次元の問題ですね、つまり、この議論は holonomic であればそのまま高次元にもつていけますけれど、holonomic でない場合にどこまで holonomic 化できるか。まあ、holonomic と言う言葉も、いろいろな階層で使って紛らわしいかも知れないけれど、そういうことがあるわけです。

大分、こんなにいい加減なことを言っているうちに、時間がたってきましたけれど、そういうわけで、こういう形で言って非線形方程式を解くというのは、未知函数を含んだ、そういうものを飲み込んだ D というものを——この D というのはどういう公理系を満足する filtered な非可換環であるということはちゃんと言えるわけですが——そういうものを与えることが微分方程式を与えることであり、それから holomorphic なり、(\*)のような、WKB という言い過ぎですけれど、とにかくそういう category で解くわけですね。解きたい空間を用意して解くわけです。

けさの話の大事な点は、違う category で解いてもその間に対応がついて、対応の付け方が unique でなくて、そこでまたいろいろ automorphism の間の対応が面白いわけですけれども、そういうことが出来るということです。そこが singular perturbation による解法の非常に際だったところですね。その singular perturbation というのは、今まで応用数学者しか扱っていなかったから、近似解で満足していたわけで、実は近似解でなくて exact な議論が出来るわけですね。非常に大事な点です。と言うのは、場の理論を初めいろいろなところで出てくる、恐らくこれから必要になるだろういろんな situation で、そういう漸近級数解を扱う必要がいっぱい出てくる

る。その漸近級数解というものが数学的に natural な、数理物理学的に natural な background から出たものであれば、まずまちがいなくこういう Ecall 的な扱いで、良い性質を持ってくることはまずまちがいないと言っていいと思う。その意味で、純粹数学者が丁度代数幾何を扱うのと同じように、眞面目に考えるに値する対象ということを言っておきたいと思います。

それから、何からこっちへ脱線したのだったかな、いずれにしてもとにかく私としては、ぜひこの nonlinear differential equation の algebraic analysis ですね、そういうものを若い世代の方々が眞面目に発展していただけたらありがたいと思っておるわけです。

昨日の話で、 $b$ -函数の話を齊藤盛彦さんがされましたね<sup>(6)</sup>。それから、京都では、大阪からいらした行者さんがいろいろ概均質ベクトル空間のことをやっておられるし、それから、 $b$ -函数関係で言えば——今、柏原さんはアメリカに行っていませんけど、再来月か5月の初めくらいまでいませんが——亡くなられた新谷さんが概均質ベクトル空間のことをいろいろやってくださった時に、本郷にたまたま集中講義か何かで行ったとき、その時柏原さんも一緒にいたんですが、新谷さんから $b$ -函数といつても定義はあっても計算の仕方が brute force しかやれないのがおかしいのではないかという批判を受けまして。気分としては絶対そんなことはないと思っていたんで、私は $b$ -函数のことを61年に考えた時にですね、 $\zeta$ -函数とか超幾何函数とかそのころ考えたんですけれど、要するに僕の感覚としてはそれらを factorize した時に出てくる因子も、何か代数解析的に計算できるだろうということは思ったわけです。特に、microlocal analysis がてきて——これはもう河合さんが一番お得意なあれだろうけれども、bicharacteristic とかあるいは characteristic variety 、 Lagrangean の場合は両者が一致するわけですが、そういうものが線形微分方程式の key concept なわけですけど、そういうものを介して微分方程式についての計算が出来る。例えば、singularity の伝播、あるいは正則性の伝播とかも全て、そういうものを媒介としてえられる。Microlocal calculus というのは holonomic system を使って、Lagrangean manifold 上でのいろんなデータがその上を伝わっていくし、Lagrangean manifold がたくさんあれば、codimension 1 の交わりを通じていろんな性質がちゃんと伝わっていくから、そこの計算をしていけば全てのものが計算できるであろうという原理ですね。そんなことは絶対、代数的な、algorithm 的に計算できるはずだというふうに言ってみた。

その夕方、柏原さんをつかまえて柏原さんと二人で discuss して、柏原さんは初

めはそんなにうまく行くかどうか大分懷疑的だったけれど、そのうち確かにそれでいきそうだと言って、僕は agitate しただけなんですが、こういうやり方でできないはずはない、僕は100パーセント正確に言ったとは思わないけれど、とにかく感じを、僕はなんで出来るかと思うか理由を言ったんで、僕は本当にきちんとしたことを言ったかどうか自身がないけれど。多分次の日くらいだったかな、その時に実際にその algorithm が出来たわけです。今実際に microlocal calculus というふうに呼んでいるやつなんですけれど、holonomic system を媒介として、それに支配されている函数のいろいろな性質を全部、algorithmical に計算できるという原理ですね。

ただこの原理はまだ欠点があるということを、昨日も僕はコメントしたかも知れないけれど——この場で言ったのか僕は覚えていないけれど、齊藤盛彦さんにそういうことを言ったのかもしれないけど——とにかくですね、まだ不満なわけです、いろんな点で。例えば、新谷さん自身はそんな高級、高級かどうかしらんけども解析学のテクニックを使わずに、微分方程式を媒介とせずにといったら言い過ぎかも知れないけど、少なくともそういう Lagrangean manifold を媒介とする解析を使わずにですね、裏返し変換、castling というものをした時に  $b$ -函数がどういう変換を受けるかという計算をやってしまったわけです、非常にきれいな公式を出した。それを解析的に導くのは大変で、少なくとも、まだ僕はそれはどういう風にやっていいかわからない。それは出来ないというのはおかしいので、微分方程式というものの原理から言えば、微分方程式というのは characteristic variety、とくに holonomic system の場合には Lagrangean manifold の上の sheaf なわけです。だから、その上の幾何学的な計算、標準形で定義されるいろいろな不变量というものは、方程式が与えられれば、みんな直に計算できる量なわけですが、そういうものを一つ一つと計算していくべきですね——多分 work station なんかにもいざれのせることが出来るようになると思うんだけど——そういうことをやれば、 $b$ -函数の計算でも、Fourier 変換の計算でも全部出来なければおかしいんです。ところが、実際にはいろいろトラブルが起こる。Codimension 1 できれいに交わっているところばかりじゃないんですね、昨日も行者さんが言っていたけれど、これは regular でない場合にこういうことが起こるのはある意味で当然なんだけど、Fourier 変換すると Fourier 変換されたやつがこんどはある subvariety の上に support を持つ、つまり  $\delta$ -函数的な factor を持ったものに変換されてしまう場合も起こるわけです、正則でない場合にはですね。そういう場合には、holonomy diagram が codimension 1 のつながりを持たないとか言うんですね。そういうことも起こるし、それからまた、codimension 1 で交わっている場合でも非常に退化した交わり方をしている場合には、一種のやはり desingularization、広中さんみたいなことを微分方程式でやろうと、これもずいぶん

昔考えたんだけれど、ある程度やってそれっきりほったらかしになっている。それもあんまり可換の場合をそのまんま真似してもいかんことは当然なんだけれど、何かの意味で、つまりあんまり文字通りに——こういうことは何でも文字通りに取るのがいいとは限らないのだけれど——とにかく、何かの意味で desingularization をやって、要するに microlocal calculus がきちんとできるようにしたいわけです。

さらに、microlocal calculus というのは別に prehomogeneous vector space には限られてないので、要するに、holonomic system があればいつでもその原理はあるわけです。つまり、この場合にも特殊函数、microfunction というものが Lagrangean manifold の上にのっかているわけです。方程式自身の support がその上にのっていますから、solution であるところの microfunction も、実は Lagrangean manifold の union の上にのっかっているわけです。Lagrangean manifold どうしが何かある有機的な仕方で接続しているわけですね、そこをどういう風に伝わっていくかということの計算をやるんですから、全くこれは算術的というか、初等代数の問題に帰着されているわけです、原理的には。ただ、generic な場合、あるいは少しくらい退化していくても割とおとなしい場合、そういう場合は柏原さん自身や、もう少し一般のもう少し degenerate した場合なんかも大島さんがやったんだと思いますが、柏原さんや大島さんや木村さんなんかの、僕は何も書いていないんで、僕の名前がのっていて恥ずかしいので、それを見ていただくといいので、ただ、そういう意味で、一番基本的な場合をやっただけで、基本的というかとっかかりをやっただけで、本当はもっともっと非常に一般に使える原理なはずなんです。

非可換の場合だってそんなことが出来るわけです、本当は。僕はそう思うんですけどね。非可換の場合の、無限小 deformation に対する線形化なんてことは、大分前にやって、さっき言った塩田さんが書いた中にも多分その話がのっているだろうと思うんですけど、そういうこともあります。これも非常に自然な形で、代数的な形で定義できるのですけれど、いろんなつながりがありますので、非線形の場合にだって、microlocal calculus 的なことは絶対使えるはずだと僕は思うんですね。新谷さんが残した宿題がまだ解けていないんだけれど、とにかく、代数的な非線形連立微分方程式というもので、ある数学的な問題が提起された場合に、もう少しそうしたことがちゃんと完結しておれば、原理的には全てもうコンピュータで解けると思っている、work station で解けるはずだと僕は思っているんだけれども、それは言い過ぎかもしれない。

ただ、holonomic ということはいろいろ難しいことがありますね、さっきも言いましたように、例えば、普通の determined または overdetermined system で holonomic でない場合を扱うときにですね、僕は線形の場合だったら、Riemann 函数を媒介としてそっちへいけるんぢゃないかというのが一番最初の考えだったけ

れど、ちょっとやってみると、変な場合が起こってきて、なかなかそれで完結できないのがすぐ判るんですね。しかし、何かの意味で holonomic に近付けるはずだと思うんです。そのためには、問題を不自然に制限しておくためにだめになるということは、しばしば数学では起こる訳ですから、だから例えば、線形と非線形を一体化して考える、これは当然そうすべきことなわけです、そうすべきことなわけですね。線形方程式を考えたときに、その係数を deform して考えるとたちまち非線形方程式が出てくる、あるいは Yang-Mills 場でも何でもいいけれど、あるいは soliton でもいいけれど、そういう場合でも、線形方程式に対する compatibility condition として、やっぱり非線形方程式が得られる。それはみんなこの D なわけです。線形方程式は D の module なわけです。だから、線形と非線形は元々別のものぢゃないわけです。ですから、線形だけで扱うということが間違っているというか、不完全なことは初めから明らかです。そういう意味でも、この D のことをやるべきですが、それで完全に安定な世界かと言うと、あくまでそれは一つの symbol 的な言い方なのであって、そこは曰く言い難いんですけど、かなり、線形の話だけでやっているよりはいい世界になっているとは思うんですけど、そこから先は余り言わない方がいいかも知れませんが、。

場の理論でも統計力学でも、つまり無限自由度というものは普遍的な構造があるということは、今ではもう數学者もかなり認めておられるわけで、つまり、無限というのは決して有限の  $n$  を無限大にしたものぢゃないんで、無限には独特の無限次元の構造があるわけですね。丁度、無限群と有限群との間の違いと同じように、有限次元と無限次元にも、無限次元には無限次元 proper の自然な数学的な構造があるわけで、それは統計力学、例えば lattice の理論なんかが場の理論と同じ構造を持っているということは、ずいぶん早くから久保先生を含めて、Kramers とか、いろんな人がとにかくそういう場の理論と似たようなテクニックで問題を formulate しているし、実際、Ising にしてもあるいは Baxter model にしても、そういうアプローチで解かれてきているわけですね。そのほかにも、いろんな物性論の問題なんかだったら、固体の中の音波というものを格子振動の波として、それを一つの粒子と考えて、いわゆる phonon、擬粒子といいますかね、普通は粒子でないほかの粒子の作る所に生ずる波みたいなものを粒子扱いすることも出来る訳で、つまり、場の理論というのは何も場の量子論、素粒子論専門のものぢゃ決してないわけで、あらゆる無限自由度を持つ structure にはいつでも出てくるわけです。物性の理論にも出てくるし、それから京都で言うと、松原先生の温度 Green 函数なもの、あるいは流対力学の方でも乱流を表すのに、乱流場というのか、やはり Green 函数み

たいなものを使っているようですね、あんまり細かいことは知りませんけれど。

要するに、無限自由度を扱う形式として自然にN点函数というものがでてくる。それは場の理論の構造に他ならないわけです。N点函数、1点函数、2点函数の個々が閉じているんぢゃなくて、全部のN点函数全体で初めて閉じた関係が成り立つわけです。そういう構造になっていて、それは場のoperator、場の理論の形で言い換えることも出来ますし、あるいは、path integral の方で表現できることも出来るでしょうし、対象がたとえ粒子ぢゃなくて、string、南部さんやなんかの string になったとしても場の理論としての構造に変わりがないわけです。だから、要するに無限自由度の解析学というものの訳ですから、これからは、物理学者がもう投げ出してくださったわけですから、数学者が、。

String が果たして重力を説明するかどうか、そういうことは判りませんけれど、とにかく、例えば Laplace の方程式が解ければ、それが電磁場にも使えるし、流体にも使えるし、Newton の万有引力にも使えるし、そのほかいろいろな所に、Laplace の方程式、要するに調和函数が使えるわけです。それと同じことで、非常にいい、数学的に自然な model について数学がやれますと、model に限らないけど、とにかくある無限自由度に関する非常にきれいなもの、例えば量子群でもよろしいんですけど、そういうものが数学的に発展しますと、それを当てはめる物理的な model はどうせたくさんあるに決まっているわけです。このごろは場の理論でも、元々物性やなんかで開発された概念をいっぱい持ち込んでいるわけですね。ですから、ちょうど19世紀、あるいは、20世紀以前にいろいろ名前が出てくる数学者がいろいろ古典物理の問題をやったのと同じように、そういうところにもちゃんと Abel 函数やら何やらいっぱい出てくるわけですが——最近は Panlevé なんかも出てくるわけですが——それと同じことが将来もっともっと徹底して無限自由度に関係して起こると思うのです。

Yang-Mills 場というのも、glueonとか、weak interaction の場合の lepton の理論とかに使われている訳ですが、もともとはそういうものぢゃなしに、量子電磁気学だけではどうもだめらしいというので、それを少し拡張して——メソン、中間子の理論が出来る前だったと思うのですが——Yang-Mills がそういうのを考えたのは別の motivation で考えたのだと思います。それが後になって、他のことに使われた。それから、string だって、もともとは南部先生が考えた時には別にあんな短い string を考えたわけぢゃなくて、もう少し長い、つまり普通の素粒子を説明するためのものとして考えたのぢゃないでしょうかね。Veneziano とかそういうのと関係して。

話は脱線しましたが、数学が出来ればそれを適応する物理的なモデルというのはたくさん出てくるだろうと思うわけで、もう数学者がそういうことをおやりになるのは自然なことだと私は思います。物理学者には叱られるかも、あるいはけしからんと言われるかもしれません、物理学者がこのごろおやりにならないことも、数学者の方はそれを見捨てないでやりますからよろしく。

話がいろいろ脱線しましたけれども、これも1960年の時の話ににも関係するけれど、なんとかして holonomic ということをいかしていきたいと思ってきて、今日その関係で少し脱線してやったことをお話ししようと思ったけれども、あんまり今日話すところまでまとめる時間がなかったので、次の機会にそれはいたしますけれど、そろそろちょうど時間のようですね。私の話は初めも終わりもないような話だから、この辺でちょうど、、、。

本当につまらない話で終始してしまったのは毎回のこと、大変申し訳ないので、もし私の話を聞くためにいらっしゃった方は非常に申し訳ないので、お詫びするほかありませんが、でも私の話がいつもこうちゃんとばらんだということをきっと知つてらっしゃると思うので、それに甘えて、許しを請う次第であります。どうもありがとうございました。ただ、私、決してこれで最終講義とは思っておりませんので、どうか、

河合：「また別のシンポジウムにも呼びますけれども」

誘っていただけたら話をさせていただきますのでよろしく。まあ、これからいろいろ若い人にちょっかいをかけて、話し相手になってもらいたいと思っているので、余り毛嫌いしないで、話を付合ってくださるように是非ともお願ひする次第であります。どうもありがとうございました。 (終)

## 筆記者註

- (0) 講演の前に、小松彦三郎氏が英語で紹介されました。小松先生のスピーチも味わい深いものでしたが、ここでは省略させていただきます。
- (1) 佐藤幹夫：線形偏微分方程式について 東大大談話会記録（1960年6月24日／8ページのノートが東大数学図書室に残っています）
- (2) 齊藤 恭司 「Teichmüller modular 函数について」 研究集会「代数解析学／整数論」講演
- (3) 青木貴史－河合隆裕－竹井義次 「WKB解析、周期積分、変形、…」 研究集会「代数解析学」講演、話者は竹井義次氏。
- (4) この後の、織田氏のノートを参照。
- (5) "D-modules and nonlinear integrable systems", Igusa ed., "Algebraic Analysis, Geometry, and Number Theory" Johns Hopkins Univ.Press(1989), 325-339
- (6) 齊藤盛彦 「非孤立特異点のb-函数」 研究集会「代数解析学」講演

## [第二部]

Date: 1992. 5. 20

TITLE	保型形式の代数解析 Algebraic Analysis of Automorphic Forms		
講演者 NAME	佐藤 幹夫 Mikio Sato	所属 INSTITUTION	京大名誉教授 professor emeritus Kyoto University

解析多様体  $M$  上の線型偏微分方程式系は、 $M$  の微分作用素の芽の層を  $\mathcal{O}$  とするととき、 $D$ -Module  $M$  としてとらえられる。この  $M$  たちの中で、ある cohomological な条件で特徴付けられる極大過剰決定系といふ、解空間の次元が有限になる常微分方程式に近いものがある。これは幾何学の問題にもしばしばありわれ、個々の特殊関数までそれぞれ微分方程式系で特徴付けようとする、代数解析的発想からも重要である。

さて非線型の方程式系はどうであろうか。これもまたある非可換環（あるいはその層）でとらえられる。多様体  $M$  が 1 次元で、局所パラメーター  $t$  であるとき、未知関数  $f_1, \dots, f_n$  の典型的な非線型微分方程式系は

$$(1): \quad \frac{df_i}{dt} = P_i(t; f_1, \dots, f_n) \quad (1 \leq i \leq n)$$

で与えられる。但し  $P_i$  は  $f_1, \dots, f_n$  に関しては多項式となる。このとき  $M$  の解析関数の芽の層  $\mathcal{O}_M$  に変数  $x_1, \dots, x_n$  を付け加えて得る多項式環  $\mathcal{O}_M[x_1, \dots, x_n]$  を考え、さらにこれに  $\gamma_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) たちと交換関係

$$(2) : \delta \cdot x_i - x_i \cdot \delta = P_i(t; x_1, \dots, x_n)$$

を満たす新なる変数 $\delta$ をつける。こうして得る $\Omega_M$ -Algebra  
 $\Omega_M[x_1, \dots, x_n][\delta]$ を $D$ と書くとき、 $D$ は

$$D^{(m)} := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i(t; x_1, \dots, x_n) \delta^i \mid (a_i \in \Omega_M[x_1, \dots, x_n]) \right\}$$

である。このfiltration  $\{D^{(m)}\}_{m \geq 0}$  である。このfiltration は

$$D^{(m)} D^{(n)} \subset D^{(m+n)}, \quad [D^{(m)}, D^{(n)}] \subset D^{(m+n-1)}$$

をみたす。この $D$ を(1)ととらえている。高次元の多様体のときも $\delta$ を記号にしてみやして同様に考えられる。

さてこのようにすると、 $D_M$ を $M$ の微分作用素の filtered Ring とするとき、方程式系(1)の解は  $\phi: D \rightarrow D_M$  といふ filtration を保つ Algebra homomorphism としてとらえられる。

今日は、上のような見地から、また modular 関数の特別の場合である、1変数テータ級数の零値を持つ付ける $D$ について語る。

$\tau$ を複素上半平面 $\mathcal{H}$ 上の点とする。このとき自然数 $k$ に対して

$$(3) : G_k(\tau) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau + n)^k}$$

とおくと、 $G_k(\tau)$ は $k \geq 3$ のとき絶対収束し、 $k$ が偶数のときは零ではない。 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し、 $G_k(\tau)$ は $G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k G_k(\tau)$ という保型性をもち、重さ $k$ の正則保型形式'を定める。重さ $a$ と重さ $b$ の正則保型形式の積は重さ $a+b$ の

正則保型形式を与え、重さを整数として、種々の重さの保型形の空間の直和を考えて次数付き環を考えると、これは  $G_4 \otimes G_6$  とで生成されている。また  $G_6$  は Weierstraß の  $\wp$ -関数  $\wp(z)$  の  $z=0$  での Laurent 展開の係数として表され、特に標準形  $\wp^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$  の係数は  $g_2 = 60G_4$ ,  $g_3 = 140G_6$  となる。

さて  $SL_2(\mathbb{Z})$  の moduler 積式の環の生成元を betrachten, たゞうに与えよう。いま  $q = e^{\pi i \tau}$  とし、 $z \in \mathbb{C}$  を別の複素変数とするとき、 $\pi$ -周期数  $\vartheta_0(z, q)$  を

$$(4): \quad \vartheta_0(z, q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi i z}$$

とおく。すると

$$(5): \quad \begin{aligned} \vartheta_3(z, q) &= \vartheta_0(z + \frac{\pi}{2}, q), \quad \vartheta_1(z, q) = -ie^{iz + \frac{\pi}{4}i\tau} \vartheta_0(z + \frac{\pi}{2}, q) \\ \vartheta_2(z, q) &= \vartheta_1(z + \frac{\pi}{2}, q) \end{aligned}$$

となる。各  $\vartheta_i(z, q)$  の  $z = \mathbb{R}$  に対する微分を  $\vartheta'_i(z, q)$  で記す。

$\pi$ -周期の比

$$(6): \quad u = \frac{\vartheta''_2(0, q)}{\vartheta_2(0, q)}, \quad v = \frac{\vartheta''_3(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}, \quad w = \frac{\vartheta''_0(0, q)}{\vartheta_0(0, q)}$$

を定める。 $u, v, w$  は  $\pi$  の関数として、 $SL_2(\mathbb{Z})$  の合同部分群の関してある種の"保型性"を持ち、その基本対称式

$$(7): \quad g_1 = u + v + w, \quad g_2 = uv + vw + wu, \quad g_3 = uvw$$

を満たすと、さきほどの生成元  $G_4, G_6$  は

$$(8): \quad G_4 = \frac{4}{3}(g_1^2 - 3g_2), \quad G_6 = \frac{4}{27}(2g_1^3 - 9g_1g_2 + 27g_3)$$

でさえある。このとき  $g_i(\tau)$  は次の複数として

$$(9): \frac{dg_1}{d\tau} = g_2, \quad \frac{dg_2}{d\tau} = 6g_3, \quad \frac{dg_3}{d\tau} = 4g_1g_3 - g_2^2$$

という複雑型微分方程式系の解となるとしている。逆にこの方程式系は  $g_1, g_2, g_3$  を特徴付けている。つまり

$$(10): D = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3][\delta] \quad (\delta x_1 - x_1 \delta = x_2; \delta x_2 - x_2 \delta = 6x_3; \\ \delta x_3 - x_3 \delta = 4x_1 x_3 - x_2^2)$$

で filtered ring  $D$  を定めると、 $D$  から  $D_\tau = \mathbb{C}\langle\tau\rangle[\frac{\partial}{\partial\tau}]$ への filtered ring の準同型  $\varphi$  は、ある  $\tau_0 \in \mathbb{C}$  に対して、生成元  $x_i$  の像  $\varphi(x_i)(\tau) \quad (i=1, 2, 3)$  が、 $g_i(\tau)$  たちの "伴型性" が保たれるを除いて本質的に上の  $g_i(\tau + \tau_0) \quad (i=1, 2, 3)$  である。

多変数のテータ級数の零値のとき (Siegel modular forms に対応するとき), 話しはモード複数になるが、半整数の characteristic をもつテータ級数で独立なモード  $2^9$  個しかないので注意して、 $\theta(z+a)\theta(z-a)$  の  $(z, a)$  に関する展開係数のうちのテータ零値の間に複雑型の関係式を見出せる。これが一変数のときの一般化を与える。

(待問著者記)

[第三部]

## &lt;補足&gt;

以下では、「保型形式の代数解析」につれて、その後の発展の様子を簡単に記す。一般の Siegel modular form (のある拡張) が満たす非線形方程式を導出する。

## §1. 1次元の場合

1次元の場合については、前掲の 織田氏のノートで解説されている。以下では重複を厭す。記すとする。

Jacobi & elliptic theta の対数微分

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 2 \frac{d}{dz} \log J_3(0|z) \\ v = 2 \frac{d}{dz} \log J_0(0|z) \\ w = 2 \frac{d}{dz} \log J_2(0|z) \end{array} \right.$$

を考える。  $u, v, w$  各々自体は modular form である。

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) ; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\}$$

$\tau$  modular 変換すると、周期の おこりが生る。

$u, v, \omega$  は次の微分方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = -vw + uw + uv \\ v' = vw - uw + uv \\ w' = vw + uw - uv \end{array} \right. \quad \cdots (1)$$

となる。ある  $\Sigma$  で (1) と同等の方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} u' + v' = 2uv \\ u' + w' = 2uw \\ v' + w' = 2vw \end{array} \right. \quad \cdots (2)$$

の方程式である。(2) は 1881 年 M. Halphen が導いた  
とする。 $(1)$

(1) または (2) の方程式を微分環と考えると、可換環

②  $[u, v, \omega]$  は derivative  $\delta$  である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(u) = -vw + uw + uv \\ \delta(v) = vw - uw + uv \\ \delta(w) = vw + uw - uv \end{array} \right.$$

の作用(2) 3つを考慮すれば、この環上では

$$\delta_0(u) = u, \quad \delta_0(v) = v, \quad \delta_0(\omega) = \omega$$

$$\delta^*(u) = 1, \quad \delta^*(v) = 1, \quad \delta^*(\omega) = 1$$

で定まる derivative  $\delta_0, \delta^*$  が存在する。 $\delta_0, \delta^*$  は Leibniz の公式を満たす。④-線型写像であり。 $\delta_0$  は生成元  $u, v, w \in \deg 1$  の元と考えた時に次数を加える写像、また  $\text{Ker}(\delta^*)$  は  $T(2)_{12}(\mathbb{Z})$  する (本文 9) modular form の全体に一致する。更に  $\langle \delta, \delta_0, \delta^* \rangle_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3}$  Lie 環  $\cong sl(2)$  同型である。

$\mathbb{Q}[u, v, w]$  には  $SL(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathfrak{S}_3$  (3 次対称群) が作用する。これは、対応する 2 等分点の置換に対応する ( $z \mapsto z+1$ ,  $z, u \mapsto v$  など,  $z \mapsto -\frac{1}{z}$  で  $u$  と  $w$  が交換する)

$\mathfrak{S}_3$  の作用と  $\delta, \delta_0, \delta^*$  の作用は可換である。 $\mathfrak{S}_3$  の不変な部分体  $A$ 。も微分環  $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_3]$ 。 $\delta_0$  の生成元は

$$g_1 = u+v+w = 2 \frac{d}{dz} \log \delta_1'(0|z)$$

$$g_2 = uv + vw + wu$$

$$g_3 = uw$$

$z$  の  $1$ ).

$$\delta(g_1) = g_2, \quad \delta(g_2) = 6g_3, \quad \delta(g_3) = 4g_1g_3 - g_2^2$$

$$\delta_0(g_v) = vg_v \quad (v=1, 2, 3)$$

$$\delta^*(g_1) = 3, \quad \delta^*(g_2) = 2g_1, \quad \delta^*(g_3) = g_2.$$

A. の元は  $SL(2, \mathbb{Z})$  の元 (7) より変換性をもち、

$\text{Ker}(\delta^*)$  ( $\subset d_0$ ) は  $SL(2, \mathbb{Z})$ -modular form である。

$g_1$  は (2) する単独方程式

$$\frac{d^3 g_1}{d\tau^3} - 4g_1 \frac{d^2 g_1}{d\tau^2} + 6 \left( \frac{dg_1}{d\tau} \right)^2 = 0$$

(8). 前から 3 種類の  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  ([2])

をもつ (7). 今考えて  $\psi_1$  の微分環を出発して (7). modular form の理論は全く再構成される。

## { 2. 一般次元の場合

half characteristic  $\tau \mapsto \theta$  theta 関数は、 $m$  变数の場合

$$\vartheta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \exp\pi i \left[ \left(t_n + \frac{a}{2}\right) \tau \left(n + \frac{a}{2}\right) + 2 \left(t_n + \frac{a}{2}\right) (z + \frac{b}{2}) \right]$$

$\tau$  定義  $\pm$  ある。  $\therefore \tau \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ,  $a, b \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ ,  $\tau = (\tau_{ij})$  は  
 $m \times m$ -複素対称行列の  $\tau$ ,  $\text{Im } \tau > 0$ .

$m=1$  の場合 Jacobi の elliptic theta 関数の組合せ

$$\vartheta_3 = \vartheta(0), \quad \vartheta_0 = \vartheta(0), \quad \vartheta_1 = \vartheta(1), \quad \vartheta_2 = \vartheta(1)$$

である。 $\exists : \tau$ 。多変数の場合の Jacobi の記号と極大解釈にて

$$\vartheta_{33} = \vartheta(00), \quad \vartheta_{30} = \vartheta(00), \quad \vartheta_{20} = \vartheta(10), \text{ etc}$$

とする。

:  $a 2^{2m}-$ 個 の theta 関数がある。 $(2^{2m-1} + 2^{m-1})$  個が even,  $(2^{2m-1} - 2^{m-1})$  個が odd である。以下では theta zero を考へる。

$\tau$ 。even は  $t$  の  $2^m$  を扱う。

$(\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1})$  を 全て  $t = 0$  で  $\tau$  の 整数の組とし。

$$\delta = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i^2 \frac{\partial}{\partial \tau_{ii}} + \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \frac{\partial}{\partial \tau_{ij}}$$

とおく。以下では:  $\delta$  は  $\tau$  に対する微分の式を考へる。

今後、記法を簡単にするために。 $m=2$  の時のみ考へる。また、後ろの  $\sim$  ( $a \sim b$ ) は 絶えず 参照 (7) (1).

後3のページdの最初の圖の意味であるか。16個の  
theta函數のうち  $1^3, 10, 12, 3L$  が 6個は odd.  
3<sup>rd</sup>) 10個は even である。漢字で簡単にすら書け。6個の  
odd theta は  $1 \sim 8$ , even theta は  $0 \sim 9$  (= 署号を取る)  
かえり:  $\pm 1: \pm 3, \mp: \mp$

$$u_i = 2 \delta \log d_i(0/\tau) \quad (i=0, \dots, 9)$$

とおく。この 10 個の函數から 1 個の微分方程式が、後3の  
ページa は  $\frac{du}{d\tau} = \text{れ}7.1.3.$  ( $\S 1$  の (1) の 2 次元版である)

次に、このページa の 10 個の連立方程式を  $\S 1$  の (2) のよう記す。  
より簡略化された系に書き直す。ページbを見て欲しか。

例えば、 $\S 13.1$  の  $12 \cdot (\delta u_0 + \frac{1}{2} u_0^2)$  の意味であるか。

これは、ページa の式 1 式を用いて  $12(\delta u_0 + \frac{1}{2} u_0^2)$  を  $u_i u_j$   
の一二次結合で表す時の係数を書き直したものである（左側  
は  $i=j$  ( $01+389+7$ ) となる 3 行が  $u_i u_j$  の係数）。

ページb が一番右の 3 行。一二次結合を左側に並べる。

$$2 \sum_{4 \leq v < 10} \left( \delta u_v + \frac{1}{2} u_v^2 \right) = \sum_{4 \leq i, j < 10} c_{ij} u_i u_j$$

と  $u_4 \sim u_9$  の間の関係式が得られる。

類似の関係式が、同様に後 14 個得られ、 $\cong 15$  個の連立方程式系が、ペニンガの 10 個の方程式系と同値である（§1 (2) の類似）

10 個の函数がある。この 6 個を組合せることによって、説明しよう

1 次元の場合 1: 2 等分点  $\cong SL(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathfrak{S}_3$  の作用  
 (左端、右端) 2 次元の場合 1:  $Sp(4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathfrak{S}_6$  の作用。  
 odd  $\Rightarrow$  6 個の 2 等分点の間の置換を考える。

$\mathfrak{S}_6$  の 15 個の互換が even  $\Rightarrow$  2 等分点にどう作用するかを書き表したもののが、ペニンガである。16 個の表が書かれてあるが、一番左上の表が元になるものである（ペニンガの表と少しだけ序が違う）。例えば、その左上なり（1 行 2 列め）の表は odd  $\Rightarrow$  2 等分点の間の互換（10）が、even  $\Rightarrow$  2 等分点の置換（14)(25)(36) で  $31 \div \text{起} = \pm : \pm$  を示す。

右上の表（1 行 4 列め）は (18) の互換が (47)(58)(69) の置換を引く起 = ± : ± を意味する。ペニンガで  $u_6 \sim u_9$  の和を  $t_6$  とすれば、将  $t_6 = 0$  意味である。さて、さて、 $\mathfrak{S}_6$  の互換は even  $\Rightarrow$  2 等分点の置換で  $1^4 \cdot 2^3$  という型のものを引く起 = ± かかる。

ここで、動かす  $h_3$  6 個の文字について和をとればよい。

したがって、先ほど述べた 15 個の連立方程式系のうち 6 個である。

さて、次のは、 $u_0 \sim u_9$  を未知函数とする  
非線型方程式系を得たが、今の場合、これは  
は代数的に独立ではない。ペース  $a$  の左側  
( $\sim 10$  個の  $3 \times 3$  行列) からあるが、この determinant は  
 $\delta^* = 135 = 1 \cdot t_2 \cdot t_9$  で、即ち、一書上の行3'を3倍

$$\delta^* \cdot \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \\ u_7 & u_8 & u_9 \end{pmatrix} = 0.$$

となる 12 係式が得られる。 $(\because \delta^* \neq 0, \delta^*(u_v) = 0$   
で定義 + 3 derivation) : 10 個の relation は独立  
ではない。線型独立なものは 5 個である。

ペース  $a$  の表 12 : 1 relation を表す。10 個の relation  
は  $u_i u_j$  の一次結合であるが、その係数を捨てるとか  
この表である。実は、この 10 個の relation は 3 つ一つ  
代数的 (実) 係り成りたつので、 $u_0 \sim u_9$  の  $m < 3$  代数  
の代数的次元は 6 である ( $m$  次元の時  $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ )

§ 2 appendix

今まで even theta のことを考えたが; odd theta  
 の Jacobian を考え(2x3 ( $\wedge^0 - \wedge^1 - e$ )). 6個の odd  
 theta と 3 15個の Jacobian が作れるから、3の対称  
 徒分は全て  $u_j$  ( $j=0, \dots, 9$ ) の線型結合で  
 表すことができる。

odd theta の Jacobian は  $m=2$  の場合のみ  
 しかまだない。例えば [3]。  $m=2$  の場合、古典的  
 な Rosenham の公式は他と3つある。

### §3 解空間の構造

前節で、式 $\leq 1$ は見かけ上 $(2^{2m-1} + 2^{m-1})$ 個の未知函数からなる方程式系（本質的には $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 個）を得たが、その解空間の構造を調べてみる。

$m=1$  の場合には 方程式は  $SL(2)$  が作用する。丁度、方程式の次数と群の次元が合致わけない；

$Sp(2m)$  は  $m(2m+1)-2$  次元である。free な作用である。

$2m-2$  えり symplectic vector  $sp$  に対して  $(m+1)-2$  えりの involutive な subspace  $W \in \Sigma$  を固定する。 $W^\perp \in \Sigma$  は直交する isotropy space とする。 $W$  を不变にする部分群  $H$  は、 $W/W^\perp$  への作用を引き起す。

この  $H \rightarrow GL(W/W^\perp) \cong GL(2)$  への写像の

$\text{Ker } \Sigma G$  とする。

$$\dim (Sp(2m)/G) = \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$$

である。この等質空間  $Sp(2m)/G$  の解空間を parametrize する。

文獻

- [1] M. Halphen, Sur un système d'équations différentielles,  
C.R. Acad. Sc. Paris, 92 1101-1103 (1881)
- [2] J. Chazy, Sur les équations différentielles du troisième  
et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points  
critiques fixes, Acta Math., 34 317-385 (1911)
- [3] J. Igusa, On Jacobi's derivative formula and its  
generalizations. Amer. J. Math. 102 409-446 (1980)

参考

大山陽介記

$$w_{ijk} \equiv u_i u_j + u_i u_k + u_j u_k = \delta^*(u_i u_j u_k)$$

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$$\begin{aligned} \delta u_0 &= \frac{-1}{2} u_0^2 + \frac{1}{3} u_0 \cdot \sum_{\nu \neq 0} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{123} + w_{456} + w_{789} + w_{147} + w_{258} + w_{369}) \\ &\quad + \frac{1}{12} (w_{159} + w_{267} + w_{348} + w_{168} + w_{249} + w_{357}) \end{aligned}$$

0	2	3
4	9	8
7	6	5

$$\begin{aligned} \delta u_1 &= \frac{-1}{2} u_1^2 + \frac{1}{3} u_1 \cdot \sum_{\nu \neq 1} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{023} + w_{489} + w_{567} + w_{047} + w_{269} + w_{358}) \\ &\quad + \frac{1}{12} (w_{059} + w_{278} + w_{346} + w_{068} + w_{245} + w_{379}) \end{aligned}$$

0	1	3
5	9	7
8	6	4

$$\begin{aligned} \delta u_2 &= \frac{-1}{2} u_2^2 + \frac{1}{3} u_2 \cdot \sum_{\nu \neq 2} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{013} + w_{579} + w_{468} + w_{058} + w_{169} + w_{347}) \\ &\quad + \frac{1}{12} (w_{049} + w_{178} + w_{356} + w_{067} + w_{145} + w_{389}) \end{aligned}$$

0	1	2
6	8	7
9	5	4

$$\begin{aligned} \delta u_3 &= \frac{-1}{2} u_3^2 + \frac{1}{3} u_3 \cdot \sum_{\nu \neq 3} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{012} + w_{678} + w_{459} + w_{069} + w_{158} + w_{247}) \\ &\quad + \frac{1}{12} (w_{048} + w_{179} + w_{256} + w_{057} + w_{146} + w_{289}) \end{aligned}$$

0	1	7
5	9	3
6	8	2

$$\begin{aligned} \delta u_4 &= \frac{-1}{2} u_4^2 + \frac{1}{3} u_4 \cdot \sum_{\nu \neq 4} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{048} + w_{589} + w_{268} + w_{056} + w_{189} + w_{237}) \\ &\quad + \frac{1}{12} (w_{029} + w_{136} + w_{578} + w_{038} + w_{125} + w_{679}) \end{aligned}$$

0	2	8
4	9	3
6	7	1

$$\begin{aligned} \delta u_5 &= \frac{-1}{2} u_5^2 + \frac{1}{3} u_5 \cdot \sum_{\nu \neq 5} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{028} + w_{549} + w_{167} + w_{046} + w_{279} + w_{138}) \\ &\quad + \frac{1}{12} (w_{019} + w_{236} + w_{478} + w_{037} + w_{124} + w_{689}) \end{aligned}$$

0	3	9
4	8	2
5	7	1

$$\begin{aligned} \delta u_6 &= \frac{-1}{2} u_6^2 + \frac{1}{3} u_6 \cdot \sum_{\nu \neq 6} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{039} + w_{248} + w_{757} + w_{045} + w_{378} + w_{129}) \\ &\quad + \frac{1}{12} (w_{018} + w_{235} + w_{479} + w_{027} + w_{134} + w_{589}) \end{aligned}$$

0	1	4
8	6	3
9	5	2

$$\begin{aligned} \delta u_7 &= \frac{-1}{2} u_7^2 + \frac{1}{3} u_7 \cdot \sum_{\nu \neq 7} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{014} + w_{568} + w_{259} + w_{089} + w_{156} + w_{234}) \\ &\quad + \frac{1}{12} (w_{026} + w_{139} + w_{458} + w_{035} + w_{128} + w_{469}) \end{aligned}$$

0	2	5
7	6	3
9	4	1

$$\begin{aligned} \delta u_8 &= \frac{-1}{2} u_8^2 + \frac{1}{3} u_8 \cdot \sum_{\nu \neq 8} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{025} + w_{367} + w_{149} + w_{079} + w_{246} + w_{135}) \\ &\quad + \frac{1}{12} (w_{016} + w_{239} + w_{457} + w_{034} + w_{127} + w_{569}) \end{aligned}$$

0	3	6
7	5	2
8	4	1

$$\begin{aligned} \delta u_9 &= \frac{-1}{2} u_9^2 + \frac{1}{3} u_9 \cdot \sum_{\nu \neq 9} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{036} + w_{257} + w_{148} + w_{078} + w_{345} + w_{126}) \\ &\quad + \frac{1}{12} (w_{015} + w_{238} + w_{467} + w_{024} + w_{137} + w_{568}) \end{aligned}$$

この田字の行列式として得られる  
10次の3次型式( $u_\nu$ たる10元の)は、  
 $G_6$ : 田 + 田 を張る。  
5 + 5 (cf. page 28)

(stabilizer H の 運算表現  $F^*$  (=  $G_3 \times G_3$  といふ alternating, 転置 invariant) を含む  $G_6$  の 運算表現は 田と 田のみである。  
(cf. A123, A124))

$$(6g) = \nu$$

2変数Thetaの2分式  $16^3$  に作用する  $S_p(4, GF(2)) = \mathfrak{S}_6$  の共轭類  
 と、 $\widetilde{\mathfrak{S}}_6 \subset \widetilde{\mathfrak{S}}_{10}$  は  $\mathfrak{S}_{10}$  の対応する共轭類

$\mathfrak{S}_6$	$1^6$	$1 \cdot 2$	$2^3$	$1^2 \cdot 2^2$	$1^3 \cdot 3$	$1 \cdot 2 \cdot 3$	$3^2$	$1^2 \cdot 4$	$2 \cdot 4$	$1 \cdot 5$	$6$
$\widetilde{\mathfrak{S}}_{10}$	$1^{10}$	$1^4 \cdot 2^3$	$1^4 \cdot 2^3$	$1^2 \cdot 2^4$	$1 \cdot 3^3$	$1 \cdot 3 \cdot 6$	$1 \cdot 3^3$	$2 \cdot 4^2$	$1^2 \cdot 4^2$	$5^2$	$1 \cdot 3 \cdot 6$

$$6! = 1 + 15 + 15 + 45 + 40 + 120 + 40 + 90 + 90 + 144 + 120$$

1	2	3	1
4	5	6	口
7	8	9	八
二	木	火	0

4	5	6	口
1	2	3	1
7	8	9	八
二	木	火	0

7	8	9	八
4	5	6	口
1	2	3	1
二	木	火	0

1	2	3	1
7	8	9	八
4	5	6	口
二	木	火	0

2	1	3	1
5	4	6	口
8	7	9	八
木	二	火	0

3	2	1	1
6	5	4	口
9	8	7	八
火	木	二	0

1	3	2	1
4	6	5	口
7	9	8	八
二	火	木	0

0	2	3	二
4	9	8	口
7	6	5	八
一	木	火	1

1	0	3	木
9	5	7	口
6	8	4	八
一	火	2	

1	2	0	火
8	7	6	口
5	4	9	八
二	木	1	3

1	9	8	火
0	5	6	二
7	3	2	八
口	木	火	4

9	2	7	火
4	0	6	木
3	8	1	八
二	口	火	5

8	7	3	1
4	5	0	火
2	1	9	八
二	木	口	6

1	6	5	1
4	3	2	口
0	8	9	二
八	木	火	7

6	2	4	1
3	5	1	口
7	0	9	木
二	八	火	8

5	4	3	1
2	1	6	口
7	8	0	火
二	木	八	9

0	11	13	10	12
1	31	33	30	32
2	01	03	00	02
3	21	23	20	22

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
01									
02									
03									
04									
05									
06	-1	-1	1						
07	-1	-1	-1	1	1				
08	-1	1	1	1	-1				
09	1	1		-1	1				
10									
11									
12									
13									
14									
15	-1	-1	1	1	1				
16	-1	-1	-1	1	1				
17	1	1	1						
18	-1	1	1			-1	-1		
19	1		1		-1	1			
20									
21	-1	-1	1	1	-1		1		
22	-1	-1	1	1	-1		-1		
23	1	1	1	1	-1		1		
24	-1	-1	1	1	-1		1		
25	-1	-1	1	1	-1		-1		
26	1	1	1	-1	1		1		
27	1	1	-1	1		-1		1	
28	1	1	-1	-1		-1		1	
29	-1		-1	-1			1		
30	1	1			1		-1		
31	-1	1			-1	-1			
32	1	1	-1	-1					
33	-1	-1	1	1					
34	1	1	1	1					
35	-1	1	1	1					
36	1	1	-1	-1					
37	-1	-1	1	1					
38	1	-1	1					1	
39	-1	-1							
40	-1	-1							
41	1	-1							
42	-1	1							
43	-1	1							
44	1	1							
45	1	1							
46	1	1							
47	1	1							
48	1	1							
49	-1	1							
50	1	1							
51	-1	1							
52	-1	1							
53	1	1							
54	1	1							
55	-1	1							
56	1	1							
57	-1	1							
58	1	1							
59	1	1							
60	1	1							
61	-1	1							
62	1	1							
63	-1	1							
64	1	1							
65	-1	1							
66	1	1							
67	1	1							
68	-1	1							
69	1	1							
70	1	1							
71	-1	1							
72	1	1							
73	-1	1							
74	1	1							
75	-1	1							
76	1	1							
77	-1	1							
78	1	1							
79	-1	1							
80	-1	1							
81	-1	1							
82	1	1							
83	1	1							
84	-1	1							
85	1	1							
86	-1	1							
87	1	1							
88	-1	1							
89	1	1							
Linear	1	-1	1	-1					
dependence	1	-1	1	-1	1				
relations	1	0	-1	-1	1	-1	1	-1	

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{6 \times 6} \text{sgn}(ik) u_{ij} u_{kl}, \quad (G_6, \text{田})$$

kl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
i	11	33	30	32	03	00	02	23	20	22	
j	11	33	30	32	03	00	02	23	20	22	
0	11										
1		1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	
2			1	1	-1	1	1	-1	1	-1	
3				1	1	-1	1	-1	1	-1	
4					1	1	-1	1	-1	1	
5						1	1	-1	1	-1	
6							1	1	-1	1	
7								1	1	-1	
8									1	1	-1
9										1	-1

$$\begin{aligned}
&= u_1 u_5 - u_1 u_6 - u_1 u_8 + u_1 u_9 - u_2 u_4 + u_2 u_6 \\
&\quad + u_2 u_9 - u_2 u_9 + u_3 u_4 - u_3 u_5 - u_3 u_7 + u_3 u_8 \\
&\quad + u_4 u_8 - u_4 u_9 - u_5 u_7 + u_5 u_9 + u_6 u_7 - u_6 u_8 \\
&= u_{33} u_{00} - u_{33} u_{02} - u_{33} u_{20} + u_{33} u_{22} - u_{30} u_{03} + u_{30} u_{02} \\
&\quad + u_{30} u_{23} - u_{30} u_{22} + u_{32} u_{03} - u_{32} u_{00} - u_{32} u_{23} + u_{32} u_{20} \\
&\quad + u_{03} u_{20} - u_{03} u_{22} - u_{00} u_{23} + u_{00} u_{22} + u_{02} u_{23} - u_{02} u_{20}
\end{aligned}$$

ex 23:

$$W_{1,\square} \left( \frac{2d \log \frac{\vartheta(z_1, z_0)}{\vartheta(z_0, z_1)}}{2(z_0 - z_1)} \right), \quad u_0 \left( \frac{2d \log \vartheta_0^{\text{even}}}{2(z_0 - z_1)} \right)$$

etc.  $\binom{6}{2} = 15 = 1 + 9 + \textcircled{5}$

etc.  $10 = 1 + 9$

$\overbrace{\text{=====+=====+=====}}^{\text{vanishing}}$

$$W_{1,\square} = u_0 + u_7 + u_8 + u_9$$

	口	八	一 二	一 木	一 人	口	口 二	口 人	口 木	八	八 二	八 人	二 木	二 人	二 木	二 人
0	1	1			1	1	1	1					1	1	1	1
1			1		1	1	1	1	1				1	1	1	1
2				1		1		1		1		1		1		1
3			1	1		1			1		1	1		1		1
4			1	1					1	1	1					1
5			1		1		1		1		1					1
6				1		1	1	1		1		1	1			1
7	1		1			1			1		1	1				1
8	1			1					1		1	1				1
9	1				1				1	1	1	1				1

$$\begin{aligned} W_{\square, \text{八}} + W_{\square, \text{人}} - W_{1, \square} &= 2(u_0 + u_1) \\ W_{\square, \text{八}} + W_{\square, \text{人}} - W_{1, \text{木}} &= 2(u_0 + u_2) \\ W_{\square, \text{八}} + W_{1, \text{人}} - W_{\square, \text{木}} &= 2(u_1 + u_2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} W_{\square, \text{八}} + W_{\square, \text{人}} + W_{\square, \text{木}} - W_{1, \square} - W_{1, \text{人}} - W_{1, \text{木}} &= 4u_0 \\ W_{\square, \text{八}} + W_{\square, \text{人}} + W_{\square, \text{木}} - W_{1, \square} + W_{1, \text{人}} + W_{1, \text{木}} &= 4u_1 \\ W_{\square, \text{八}} - W_{\square, \text{人}} + W_{\square, \text{木}} + W_{1, \square} + W_{1, \text{人}} - W_{1, \text{木}} &= 4u_2 \end{aligned}$$

	1口八	1口二	1口木	1口人	1八人	1木人	1人二	1人木	1人八	1口八	1口二	1口木	1口人	1木人	1人二	1人木
4u_0	4u_0	4u_0	4u_0	4u_0	4u_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1口		1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1				
1八	1		1	1	1	1	3	1				1	1	1		
1木	1		1	1	1	1	3	1				-1	-1	-1		
1人																
1二	-1		-1		-1	-1	0	1			1		+1	1		
1木	-1		-1		-1	-1	0		1		1		+1	1		
1人	-1		-1		-1	-1	0		1		1		1	1		
口二	-1		-1		-1	-1	0	1			-1	-1			-1	
口木	-1		-1		-1	-1	0		1		-1	-1		-1		
口人	-1		-1		-1	-1	0		1		-1	-1	-1		-1	
八二		-1	-1		-1	-1	0		-1	-1	1				-1	
八木		-1	-1		-1	-1	0	-1	-1		1			-1		
八人		-1	-1		-1	-1	0	-1	-1		1	-1			-1	
二木	1	1	1		1	3	1	-1			-1	-1	1	1		
二人	1	1	1		1	3	1	-1			-1	-1	1	1		
二人	1	1	1	1		3	1	-1	-1		-1	-1	1	1		

全次元, vanishing (=====)