

繰り返し荷を受ける 3次元連続体に対する
対称限界理論

2009 年

小林 正実

目 次

1 章 序論	
1.1 研究の背景	1
1.2 既往研究の状況	4
1.3 研究の目的	5
1.4 本論文の構成と既発表論文との関係	7
2 章 シェイクダウン領域における 3 次元連続体に対する対称限界理論	
2.1 序	11
2.2 解析モデルと基礎式	12
2.3 対称限界理論の基本的考え方	15
2.4 構成則	18
2.5 定常状態変数についての方程式	23
2.6 履歴挙動解析との比較による理論の検証	28
2.7 まとめ	32
3 章 交番塑性領域における 3 次元連続体に対する定常状態経路解析法	
3.1 序	35
3.2 解析モデルと基礎式	36
3.3 Prager の Kinematic model を用いた考察	39
3.4 解析法の概要	41
3.5 反転時釣合状態における定常状態変数変化率	44
3.6 定常状態釣合経路上の任意の釣合状態における定常状態変数変化率の増分解析	46
3.6.1 定常状態釣合経路の増分表現とその荷重振幅に関する変化率	
3.6.2 定常状態変数の 2 つの経路パラメータに関する変化率	
3.6.3 釣合経路パラメータ増分長の決定	
3.7 定常化条件	53
3.8 逆時間方向釣合経路解析による定式化	55
3.8.1 定常状態釣合経路上の任意の釣合状態における定常状態変数変化率の逆時間方向増分解析	
3.8.2 定常化条件と降伏条件による交番塑性要素反転時残留塑性歪変化率の決定	
3.9 履歴挙動解析との比較による解析法の検証	61
3.10 まとめ	64
4 章 交番塑性領域における 3 次元連続体に対する対称限界理論	
4.1 序	66

4.2	解析モデルと基礎式	67
4.3	理論解析の概要	68
4.4	片側反転点における定常状態変数変化率	70
4.5	片側反転点からの半サイクルの定常状態釣合経路上における 定常状態変数変化率の増分解析	71
4.6	定常化条件と変数の対称成分と逆対称成分による定式化	73
4.7	対称限界解析法	76
4.8	履歴挙動解析との比較による理論の検証	77
4.9	まとめ	79
5	繰り返しねじれ変形を受ける薄肉円筒部材における歪の非一様化現象の発生限界の 予測理論	
5.1	序	81
5.2	解析モデル	82
5.3	理論の概要	84
5.4	構成則	85
5.5	歪が一樣な定常状態解	85
5.6	歪の非一様化現象の発生条件	86
5.7	解析例	89
5.8	履歴挙動解析との比較	91
5.9	まとめ	96
6	結論	98
	付録：発表論文一覧	101
	謝辞	103

第1章 序論

1.1 研究の背景

建築構造物には、地震力、風圧力、波浪、温度応力、クレーン荷重等、様々な種類の繰り返し荷重が作用する。変動風による鉄塔の疲労破壊等、構造物の倒壊は、荷重の繰り返しの影響による場合も少なくない。地震力についても、以下に述べるような昨今の地震被害の状況を踏まえて、荷重の繰り返しの影響を再検討しなければならない時期にあると考えられる。

(1) 昨今の被害地震が頻発する地震活動期にあっては、同一地域が複数回の大地震の被害を受けることも考えられ、一度、大きな被害にあった建物が、さらに、もう一度、大きな地震動の被害を受ける可能性もあること

(2) マグニチュード8規模の巨大地震の際には、長周期地震動と呼ばれる、7分~8分にも及ぶ極めて継続時間の長い地震動が発生することが明らかになってきたこと

(3) 2003年宮城県北部連続地震、2004年新潟県中越地震のように、本震と同規模の余震も起こり得ることがわかったこと

繰り返し载荷の下では、変形の発散、耐力のサイクル毎の劣化等、一方向単調载荷時の挙動からは予想できない特有の現象が現れる。鋼構造における局部座屈変形の累積による耐力低下、鉄筋コンクリート構造におけるせん断破壊や付着破壊の進行による著しい繰り返し劣化挙動などがそれである。このような繰り返し载荷の下での不安定現象、崩壊挙動については、建築構造物だけでなく、土木、機械、原子力等、繰り返し荷重を受ける他の多くの分野の構造物においても把握しておく必要があるため、工学の諸分野で多数の研究が行われてきた。しかし、これらの研究は、(1) 履歴挙動の解明を目的とした実験的または数値解析的研究、(2) シェイクダウン理論またはその拡張理論の観点からの研究がほとんどで、臨界点理論、とりわけ、分岐点理論の観点からの研究は非常に少ない。

これに対して、上谷、中村は、一定軸力下で繰り返し両振り曲げを受ける梁-柱に見られる载荷構面内たわみ変形の分岐現象に対して、対称限界、定常状態限界という、2つの臨界点を定義し、これを予測する対称限界理論[1,2]、定常状態限界理論[3,4]を設立した。図1.1に示すように、対称限界とは、梁-柱の初期材軸線に関する逆対称な変形モードの発生により、梁-柱の定常状態が対称から非対称に移行する限界であり、定常状態限界とは、この逆対称変形モードが発散的に成長する限界である。図1.2に示すように、これらの理論では、振幅が連続的に増加する载荷プログラムを考え、対称限界と定常状態限界を、定常状態の推移を表す定常状態経路の分岐点と極限点として求める。繰り返し载荷特有の不安定現象に対して、このように明確な臨界点を定義し、予測する理論を展開した研究は他にはない。

これらの臨界現象は、一方向単調载荷時の座屈現象と同等に、普遍性があり、梁-柱部材に限らず、他のあらゆる種類の構造物に現れる。ねじり変形および断面のそり変形を考慮

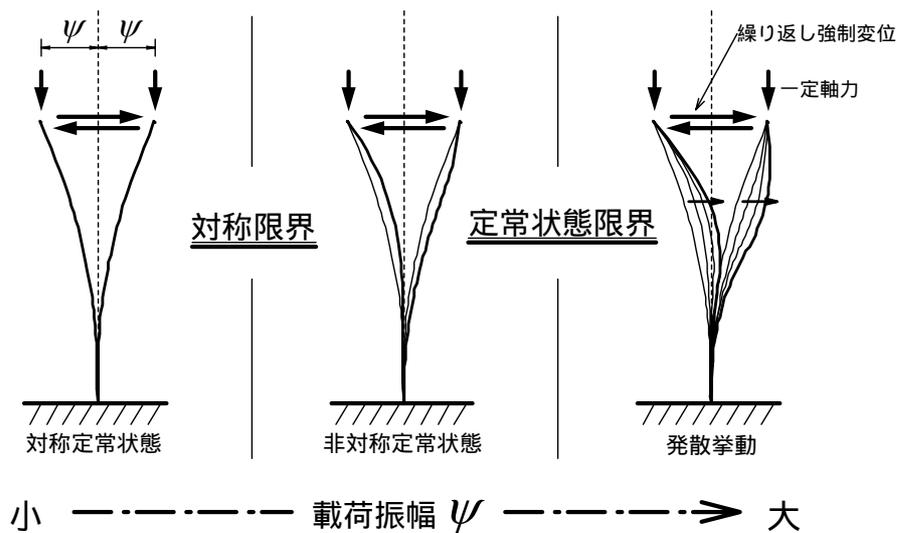


図 1.1 一定軸力下で繰り返し両振り曲げを受ける片持梁-柱の挙動の分類

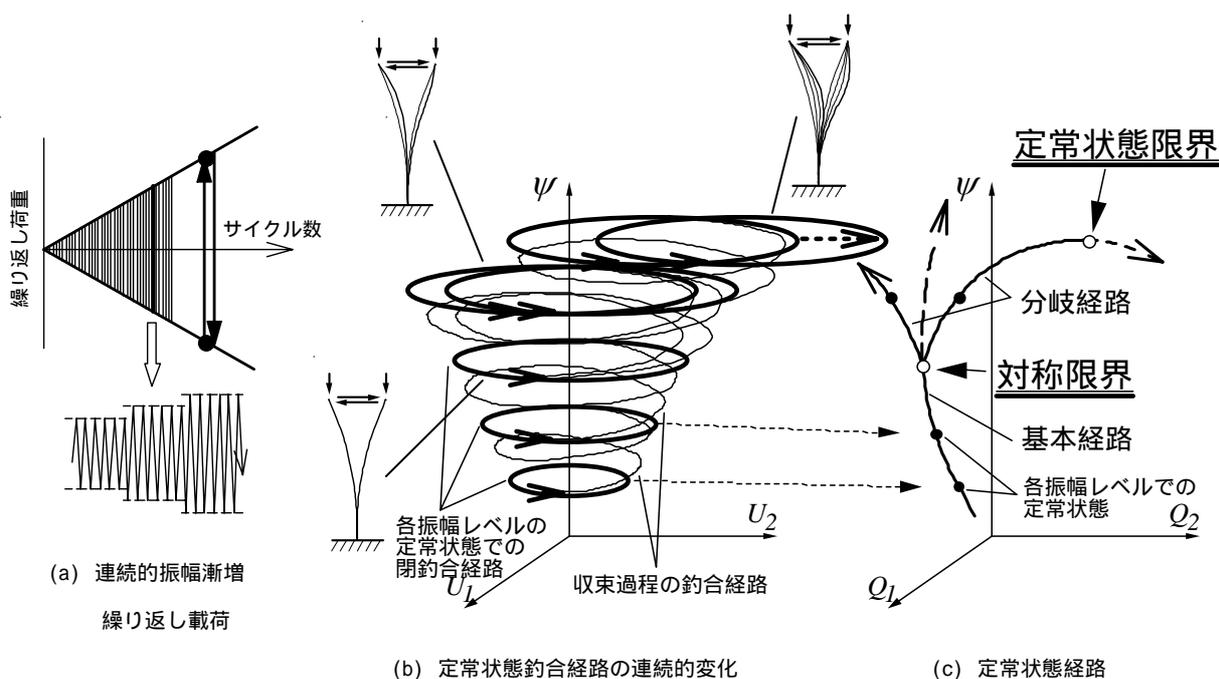


図 1.2 連続的振幅漸増繰り返し载荷プログラムの下での定常状態の推移と定常状態経路

した 3 次元梁-柱、局部座屈を生じる薄肉断面部材、それらを構成部材とする立体骨組、2 次元連続体としてモデル化される平板構造、シェル構造等、これらの様々な構造物の限界を明らかにしていくためには、3 次元連続体に対する一般理論を構築することが必要不可欠である。

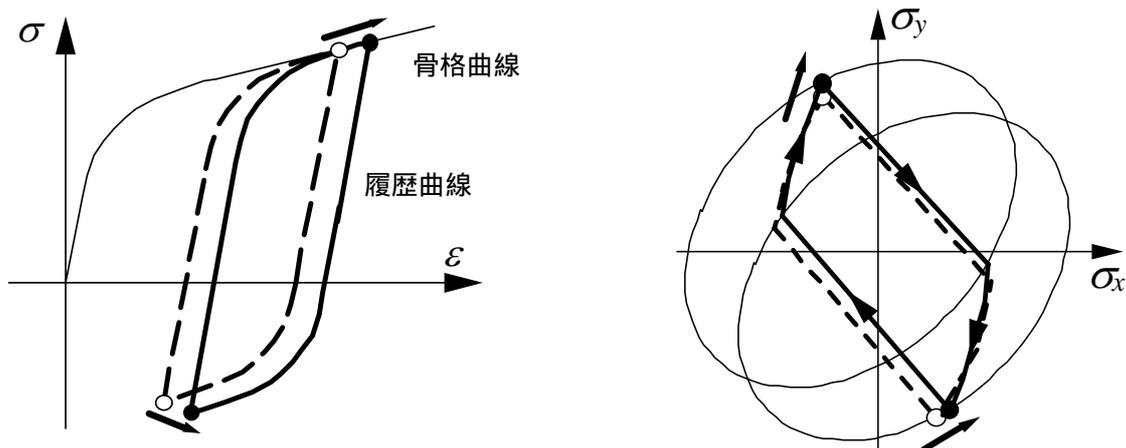
2 次元・3 次元連続体の解析が、1 次元連続体の解析と大きく異なる点は、(1) 離散化法

の違い、(2) 構成則の違いであると言える。

(1)の点については、対称限界理論、定常状態限界理論においても、通常の弾塑性解析で用いる離散化解法を適用することができ、既に、いくつかの研究が実施されている[5,6]。

(2)の点については、対称限界理論、定常状態限界理論においては、構成則として、定常状態の増分変化に伴う応力と歪の変化率の関係式を導く必要があり、2次元・3次元連続体に理論を拡張する場合には、単軸の構成則が適用される1次元連続体の理論とは異なり、多軸応力状態における構成則を新たに誘導しなければならない。通常、単軸応力状態の応力・歪関係式は、骨格曲線と呼ばれる、定常状態の応力歪曲線の反転点の軌跡を表す曲線と、履歴曲線と呼ばれる、骨格曲線上の反転点から反対方向への部分曲線の形で与えられ、既に、1次元梁-柱に対する対称限界の一般理論を展開した研究において、単軸応力状態の応力・歪関係の一般式に対して、定常状態経路を追跡するための構成則が導かれている。それに対して、多軸応力状態については、刻々の応力状態や履歴に依存して、塑性歪変化量や降伏曲面の移動量が定まる、塑性流れ法則や歪硬化則から、構成則を導かなければならず、単軸応力状態の場合とは、大きく異なってくる。特に、交番塑性領域については、隣接定常状態に移行する過程で、降伏曲面上における応力点の有限距離の移動が何回か繰り返された後、定常化するから、そのような場合に対して、定常状態の応力と歪の変化率の関係式を導くことは、極めて困難である。

本論文では、交番塑性領域まで含めて、多軸応力状態に対する種々のタイプの構成則モデルへの応用が可能な、3次元連続体に対して一般化した対称限界理論を構築する。



(a) 単軸応力状態における定常状態の増分変化

(b) 多軸応力状態における定常状態の増分変化

図 1.3 単軸応力状態と多軸応力状態での定常状態の増分変化の比較

1.2 既往研究の状況

繰り返し荷荷を受ける3次元連続体を扱った既往の理論的研究は、概ね、表 1.1 のように分類される。幾何学的非線形を考慮した交番塑性領域に関する理論的研究が、著者らによるもの以外は、皆無であることがわかる。また、以下に述べる理由により、著者らによるもの以外は、いずれの理論を適用しても、本研究の目標である多軸応力状態の構成則モデルに従う3次元連続体の対称限界を求めることはできない。

(1) 幾何学的非線形 (P - 効果) を考慮したシェイクダウン理論

G.Maier ら [8] の先駆的研究を初めとして、シェイクダウン理論を、有限変形領域に拡張する試みは、これまでにいくつか行われてきた。しかし、線形の歪変位関係式を用いたものや、固定荷重による変形が有限で、繰り返し荷重による変形は微小とする近似を導入したものなど、幾何学的非線形を厳密に扱っていないものが多い。また、上谷、荒木ら [7] が指摘しているように、幾何学的非線形を考慮する場合のシェイクダウン限界は、荷重経路に依存するため、H.Stumpf ら [13] の研究のように、履歴挙動解析を用いなければ、予測することができない。また、対称限界のような分岐現象を扱った理論的研究は全く行われていない。これに対して、本論文で展開される理論によれば、履歴挙動解析を全く用いることなく、シェイクダウン領域の対称限界を予測することができる。また、これらの研究を交番塑性領域に拡張する試みも行われていない。

(2) 荷重の変動域の大きさを経路パラメータとした増分解析法

近藤ら [15] によって、履歴挙動解析を用いずに、厳密に幾何学的非線形を考慮して、荷重

表 1.1 繰り返し荷荷を受ける3次元連続体を扱った理論的研究

	微小変形	有限変形	臨界点
シェイクダウン	古典的 シェイクダウン 理論	G.Maier [8] J. A. Konig [9] Q. S. Nguyen et al. [10] D. Weichert [11] J. Gross-Weege [12] H.Stumpf [13] C.Polizzotto et al. [14] 近藤、花井他 [15]	上谷、小林、荒木 [16]
交番塑性	A.R.S.Ponter et al. [17,18] C.Polizzotto[19-21]	上谷、小林、荒木 [22]	上谷、小林 [23]

の変動域の大きさを経路パラメータとして、定常状態の連続的变化を追跡する増分解析法が展開されている。対称限界理論における定常状態経路の増分解析に相当する解析を意図したものと思われるが、対称限界や定常状態限界といった臨界点を予測する理論ではない。また、多軸応力・歪関係式に従う構造物に対しては、交番塑性領域に対する拡張は行われていない。

(3) 古典的シェイクダウン理論を交番塑性領域に対して拡張する研究

A.R.S.Ponter や C.Polizzotto らにより、古典的シェイクダウン理論における諸定理を交番塑性領域に対して拡張する試みがなされている。しかし、微小変形の範囲での拡張に止まっており、幾何学的非線形は全く考慮されていない。よって、幾何学的非線形が支配的な役割をする対称限界や定常状態限界などの臨界点を予測することはできない。

1.3 研究の目的

本研究の目的は、完全弾塑性材料で構成される 3 次元連続体に対して、交番塑性領域まで含めて、対称限界理論を構築することであり、本論文では、以下の 4 つの項目に分けて、理論を展開する。

3 次元連続体に対する対称限界理論は、シェイクダウン領域と交番塑性領域とで、展開が大きく異なるため、以下の(1)~(3)の 3 つの項目に分けて、詳述する。また、(4)で、繰り返し载荷の下での分岐現象の具体的な事例の 1 つとして、薄肉円筒部材のねじれ変形の下での歪の非一様化現象を取り上げ、対称限界理論を応用して、この現象の発生限界を予測する理論を述べる。

(1) シェイクダウン領域における 3 次元連続体に対する対称限界理論の構築

完全弾塑性材料で構成される 3 次元連続体に対して、シェイクダウン領域に限定した対称限界理論を構築する。

刻々の応力状態に依存する塑性流れ法則から、定常状態の増分変化に対する構成則を導くことは、シェイクダウン領域においても、一見非常に難しく見える。シェイクダウン状態では、定常状態において残留塑性歪が一定であり、単軸応力状態と同様の誘導方針に従い、基礎式から残留塑性歪を消去することにより、比較的容易に構成則を導ける。

この構成則に基づいて、定常状態変化率に関する方程式を定式化する。定常状態の対称成分と逆対称成分を定義するため、初期形状における対称面に関して、対称に設けた一対の座標系を導入し、対称成分と逆対称成分に関する方程式に変換する。対称成分に関する方程式と逆対称成分に関する方程式は連成せず、完全に分離され、1次元梁 - 柱の対称限界理論と共通の特徴が保持されることを示す。対称成分に関する変化率方程式を用いて、対称定常状態経路を追跡する。逆対称成分に関する方程式から、対称定常状態経路上で非自明解を持つ条件として、対称限界を特徴づける条件を誘導する。

更に、数値解析例として、2次元有限要素梁-柱モデルについて、対称限界予測解を求め、これを、同一モデルの履歴挙動数値解析結果と比較することにより、理論の妥当性を検証する。

(2) 交番塑性領域における3次元連続体に対する定常状態経路解析法の構築

完全弾塑性材料で構成される3次元連続体に対して、交番塑性領域における定常状態経路解析法を構築する。

交番塑性領域については、定常状態において、塑性変形過程が含まれ、残留塑性歪が変動する。刻々の応力状態に依存する塑性流れ法則が適用される多軸応力状態に対しては、この定常状態における塑性変形過程の釣合経路の追跡の手続きが含まれる定式化によらなければ定常状態の増分変化を求めることはできない。したがって、まず、定常状態経路の追跡について、単軸応力状態に対する理論とは全く異なる理論を構築しなければならない。

本論文では、定常状態の塑性変形過程で起こる残留塑性歪の変動の定常状態増分変化に対する変化率を、反転時残留塑性歪変化率を含む形で釣合経路に沿って表していく増分解析法を定式化する。これに基づいて、交番塑性領域における定常状態経路を追跡するための新しい解析法を構築する。この解析法では、定常状態経路増分解析の、各振幅増分段階において、1) まず、反転時釣合状態における定常状態変数の変化率を、残留塑性歪変化率を未知量として含む形で表す。2) 次に、反転時釣合状態を出発点として反対側の反転時まで、釣合経路上のすべての時刻の定常状態変数の変化率を、反転時残留塑性歪変化率を未知量として含む形で表していく増分解析を行う。3) これにより、反転時残留塑性歪変化率を、反対側の反転時からの残留塑性歪の変動を反映させた形で表すことができる。よって、残留塑性歪の軌道が閉じる条件から、反転時残留塑性歪変化率を決定できる。以上の手続きにより、定常状態変数の変化率が求まり、定常状態経路を追跡することができる。

また、この解析法では、2)の定常状態釣合経路に沿っての増分解析の際に、両反転点から履歴を遡る方向に行えば、弾性過程の釣合経路の追跡を省くことができ、これを逆時間方向解析と名付け、その場合の定式化も示す。

更に、2次元有限要素梁-柱モデルについての数値解析例を示し、履歴挙動数値解析結果との比較により、解析法の検証を行う。

(3) 交番塑性領域における3次元連続体に対する対称限界理論の構築

(2)で展開した定常状態経路解析法に基づいて、完全弾塑性材料で構成される3次元連続体に対して、交番塑性領域における対称限界理論を構築する。

(2)で述べた、定常状態の変化率を求める解析は、最終的に、定常化条件に対応する反転時残留塑性歪変化率を求める方程式に帰着され、定常状態経路の特異性は、この反転時残留塑性歪変化率の方程式に集約されている。シェイクダウン領域の対称限界理論で導入した、初期形状に関して対称に設けた一対の座標系を用いて、残留塑性歪の対称成分と逆対

称成分を定義する。上述の反転時残留塑性歪変化率の方程式を、対称成分と逆対称成分に関する方程式に変換する。交番塑性領域においても、これら 2 つの方程式は互いに連成せず、完全に分離されることを示す。対称限界条件は、残留塑性歪変化率の逆対称成分に関する方程式が、非自明解を持つ条件として導かれる。以上の基礎式に基づいて、対称限界解析の具体的手順を示す。

更に、数値解析例として、2次元有限要素梁-柱モデルについて、対称限界予測解を求め、履歴挙動数値解析結果との比較により、理論の妥当性を検証する。

(4) 繰り返しねじれ変形を受ける薄肉円筒部材の歪の非一様化現象の発生限界の予測

繰り返しねじれ変形を作用させた鋼構造薄肉円筒部材において、ほぼ一様であるはずの歪分布が顕著に非一様化する実験結果が報告されている。同種の実験は、標準的な多軸応力状態の材料試験方法としても行われ、このような現象の発生限界を把握しておかなければならない。この円筒部材における歪の非一様化は、Biot によってその存在が示された、剛体に囲まれた一様な応力状態にある弾性体において不均一な変形が生じる **Internal buckling** と類似した現象が、繰り返し载荷の下で生じたためととらえることができる。よって、上述の現象は、対称限界理論を応用することにより明らかにすることが期待できる。

本論文では、繰り返しねじれ変形を受ける薄肉円筒部材において、歪の非一様化が起こる臨界点を予測する理論を展開する。肉厚が十分に小さく平面応力状態にあると見なせる薄肉円筒部材を解析対象とする。2次元有限要素で離散化近似する。シェイクダウン領域に限定して理論を展開する。COIDA と同様に、連続的に振幅を漸増させて繰り返しねじれ変形を作用させる荷重プログラムを導入し、まず、基本経路に対応する、歪が一様な定常状態列解を求める。次に、定常状態の増分変化に関する方程式を導く。この方程式には、自明解として、上で求めた基本経路をたどる歪一様な増分解が存在するが、余解が存在する条件として、歪の非一様化発生の限界条件が導ける。

本理論による数値解析を実施し、実験結果に対応する、円周方向に細かく波打つ、**Internal buckling** と類似した変形モードが得られることを示す。更に、単調ねじれ载荷に対する分岐点解析を行う。これにより、繰り返し载荷時の歪の非一様化は単調载荷時の分岐よりはるかに小さな振幅で起こり、また、単調载荷時の分岐モードは軸対称であり、繰り返し载荷時の分岐モードのような円周方向に著しく非一様な変形は現れないことを示す。

1.4 本論文の構成と既発表論文との関係

本論文は、本章を含めて、6つの章から構成される。第2章から第4章までは一般理論であり、1次元梁-柱部材に対して展開されている対称限界理論について、交番塑性領域まで含めて、3次元連続体に対する拡張一般化を行う。第5章は、第4章までの一般理論の実際的な問題への応用であり、薄肉円筒部材における繰り返しねじれ変形の下での歪の非一様化現象の予測理論を展開する。また、本論文で扱う材料は完全弾塑性体であり、歪硬化体

に対する拡張について、第 6 章で研究の発展状況を示す。以上の研究成果は、一部を既に学会誌等に掲載しており、ここではこれらの既発表論文と各章との関係も示す。

第 2 章では、シェイクダウン領域に限定して、3 次元連続体に対する対称限界理論を展開する。理論を 3 次元連続体に対して拡張する際には、多軸応力状態における構成則が必要となるため、この構成則を誘導する部分で 1 次元梁-柱部材の場合とは異なってくる。しかし、シェイクダウン領域においては、単軸応力状態と同様の誘導方針に従い、比較的容易に構成則を導ける。この構成則に基づいて理論を拡張する。この章の概要は文献[24]において公表され、離散系に対する理論が発表論文[1]に、連続体に対する一般理論が発表論文[9]に掲載されている。

第 3 章では、交番塑性領域まで含めて、3 次元連続体に対する定常状態経路解析法までを構築する。交番塑性領域においては、構成則が陽な形で導けないため、経路の追跡が極めて困難である。この章は、3 次元連続体に対する対称限界理論の一般化の根幹を成す部分である。ここでは、定常状態における塑性変形過程で起こる残留塑性歪の変動の定常状態増分変化に対する変化率を、釣合経路に沿って、反転時の残留塑性歪変化率により表していく増分解析法を新たに定式化する。これに基づいて定常状態経路解析法を展開する。この章については、概要が文献[25]において公表され、一部が発表論文[10]に掲載されている。

第 4 章では、第 3 章で展開した定常状態経路解析法に基づいて、交番塑性領域まで含めて、3 次元連続体に対する対称限界理論を展開する。交番塑性領域において、定常状態の変化率を求める解析は、最終的に、反転時残留塑性歪変化率を求める方程式に帰着される。定常状態経路の特異性は、この反転時残留塑性歪変化率についての方程式に集約されている。この方程式を、対称成分と逆対称成分に関する方程式に変換する。交番塑性領域においても、これら 2 つの方程式は互いに連成せず、完全に分離され、1 次元梁-柱の理論と共通の特徴が保持される。この章については、概要が文献[26]において公表され、一部が発表論文[12]に掲載されている。

第 5 章では、第 4 章までの対称限界理論を応用して、薄肉円筒部材における繰り返しねじれ変形の下での歪の非一様化現象の予測理論を展開する。2 次元有限要素モデルに対して、理論解析を実施する。これにより、繰り返し載荷時には、単調載荷時とは異なる特有の分岐モードが、単調載荷時分岐点よりはるかに小さな振幅で起こる予測となることを示す。更に、同一のモデルの履歴挙動解析を行い、理論予測と整合する結果となることを示す。この章については、理論的研究の概要が文献[27]に、履歴挙動解析の概要が文献[28]において公表され、理論的研究の一部が発表論文[14]に掲載されている。

第 6 章では、本論文で得られた成果を要約するとともに、今後の展望を示す。

参考文献

- [1] K. Uetani and T. Nakamura, Symmetry limit theory for cantilever beam-column subjected to cyclic reversed bending, J. Mech. Phys. Solids, Vol.31, pp.449-484, 1983.

- [2] K. Uetani, Uniqueness criterion for incremental variation of steady state and symmetry limit, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.37, pp.495-514, 1989.
- [3] 上谷宏二、繰り返し両振り曲げを受ける弾塑性梁-柱についての対称限界理論と定常状態限界理論、京都大学博士論文、第4章、第5章、1984.
- [4] 上谷宏二、中村恒善、繰り返し両振り曲げを受ける片持梁-柱についての定常状態限界理論(その1:基礎理論及び離散化モデルを用いた数値解析法)、日本建築学会構造系論文報告集、第438号、pp.105-115、1992.
- [5] 上谷宏二、榊井健、繰り返し両振り曲げを受ける片持梁-柱の構面内挙動限界解析法、日本建築学会構造系論文報告集、第513号、pp.97-104、1998.
- [6] 榊井健、上谷宏二、繰り返し水平荷重を受ける立体骨組の対称限界および構面内挙動限界解析法、日本建築学会構造系論文報告集、第540号、pp.79-85、2001.
- [7] K. Uetani and Y. Araki, Steady-state limit analysis of elastoplastic trusses under cyclic loads, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.36, pp.3051-3071, 1999.
- [8] G. Maier, A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects, in: A. Sawczuk (Eds.), *Foundations of Plasticity*, Vol.1, Leyden, Noordhoff, pp.417-433, 1972.
- [9] J. A. Konig, *Shakedown of Elastic-Plastic Structures*, Elsevier, Amsterdam, 1987.
- [10] Q. S. Nguyen, G. Gary, and G. Baylac, Interaction buckling-progressive deformation, *Nucl. Engng. Des.*, Vol.75, pp.235-243, 1983.
- [11] D. Weichert, On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures, *Int. J. Plasticity*, Vol.2, pp.135-145, 1986.
- [12] J. Gross-Weege, A unified formulation of statical shakedown criteria for geometrically nonlinear problems, *Int. J. Plasticity*, Vol.6, pp.433-447, 1990.
- [13] H. Stumpf, Theoretical and computational aspects in the shakedown analysis of finite elastoplasticity, *Int. J. Plasticity*, Vol.9, pp.583-602, 1993.
- [14] C. Polizzotto, Shakedown and steady-state response of elastic-plastic solids in large displacements, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.33, pp.3415-3437, 1996.
- [15] 近藤一夫、王学鋒、花井正実、繰り返し変動荷重を受ける構造物の弾塑性、有限変形解析、日本建築学会構造系論文報告集、第420号、pp.75-88、1991.
- [16] K. Uetani, M. Kobayashi, and Y. Araki, Symmetry limit theory for elastic-perfectly plastic continua in the shakedown region, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.48, pp.2035-2056, 2000.
- [17] A. R. S. Ponter and H. Chen, A minimum theorem for cyclic load in excess of shakedown, with application to the evaluation of a ratchet limit, *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol.20, pp.539-553, 2001.
- [18] H. Chen and A. R. S. Ponter, A method for the evaluation of a ratchet limit and the

- amplitude of plastic strain for bodies subjected to cyclic loading, *Eur. J. Mech. A/Solids* Vol.20, pp.555-571, 2001.
- [19] C. Polizzotto, A study on plastic shakedown of structures: Part I-Basic properties, *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.60, pp.318-323, 1993.
- [20] C. Polizzotto, A study on plastic shakedown of structures: Part II-Theorems, *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.60, pp.324-330, 1993.
- [21] C. Polizzotto, Variational methods for the steady state response of elastic-plastic solids subjected to cyclic loads, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.40, pp.2673-2697, 2003.
- [22] K. Uetani, M. Kobayashi, and Y. Araki, A method for steady-state path analysis of three-dimensional continua in the alternating plasticity states, *Proceedings of the Third International Conference on Advances in Structural Engineering and Mechanics*, Seoul, pp.663-674 (CD-ROM), 2004.
- [23] K. Uetani and M. Kobayashi, Symmetry limit theory for elastic-perfectly plastic structures in the alternating plasticity region, *Proceedings of ICASS'05*, Shanghai, Vol.2, pp.1527-1532, 2005.
- [24] 上谷宏二、小林正実、組合せ応力を受ける完全弾塑性体の対称限界解析(シェイクダウン領域における解析)、日本建築学会大会学術講演梗概集(中国)、構造、pp.1135-1136、1990.
- [25] 上谷宏二、小林正実、交番塑性変形を受ける連続体の定常状態経路解析法(完全弾塑性体の解析)、日本建築学会大会学術講演梗概集(東北)、構造、pp.267-268、1991.
- [26] 小林正実、上谷宏二、交番塑性領域における3次元連続体に対する対称限界理論、日本建築学会大会学術講演梗概集(北海道)、構造、pp.353-354、2004.
- [27] 上谷宏二、見上知広、小林正実、対称限界理論による繰返しねじり変形を受ける薄肉円筒部材の歪の非一様化現象の解析、日本建築学会大会学術講演梗概集(北陸)、構造、pp.279-280、2002.
- [28] 小林正実、上谷宏二、繰返しねじれ変形を受ける薄肉円筒部材の歪の非一様化現象の履歴挙動解析、日本建築学会大会学術講演梗概集(近畿)、構造、pp.385-386、2005.

第2章 シェイクダウン領域における3次元連続体に対する対称限界理論

2.1 序

中村、上谷らは一定軸力下で連続的振幅漸増完全両振り繰り返し曲げを受ける梁-柱について、次の2種類の臨界点を定義した。一つは、梁-柱の定常状態が、初期材軸線に関して対称から非対称へ移行する対称限界であり、他は更に振幅を増加させたとき、もはや定常状態に収束せず、逆対称たわみ変形の累積発散により崩壊に至る定常状態限界であり、これらの限界を予測する対称限界理論[1-3]と定常状態限界理論[1,4,5]を設立した。これらの限界理論は、履歴挙動解析を全く必要とせず、1個の定常状態を1個の点に対応させる定常状態空間を考え、定常状態の移り変わりを表す定常状態経路の分岐点及び極限点として対称限界及び定常状態限界をそれぞれ求める理論である。

対称限界理論、定常状態限界理論は、まず線形歪硬化サンドウィッチ梁-柱モデルに対して展開され、これらの現象の一般的特性が解明され、解析解を用いた高精度の履歴挙動解析により理論の厳密な検証が行われている。また、応力・歪関係、断面形状について任意性のある一般的な1次元梁-柱モデルに対しても、文献[6,7]において、理論の拡張が行われ、構面外変形が拘束され局部座屈変形が生じない範囲について、実用的な設計資料を提供し得る段階まで研究が進められている。

しかし、これらの臨界現象は、1次元梁-柱に限らず他のあらゆる種類の構造物に普遍的に現れる現象であると考えられる[8]。ねじり変形並びに断面のそり変形を考慮した3次元梁-柱、局部座屈を生じる薄肉断面部材、それらを構成部材とする立体骨組、2次元連続体としてモデル化される平板構造、シェル構造等、これらの様々な構造物の限界を明らかにしていくためには、3次元連続体に対する一般理論を構築することが必要不可欠であり、本研究はこの目標に向けての最初の試みである。

一般に2次元、3次元連続体の解法と1次元連続体のそれとが大きく異なる点は以下の2点にまとめられる。

(1) 1次元連続体については、モデルの挙動を記述するための状態変数は座標1成分のみの関数であり、支配方程式は常微分方程式となる。これに対して、3次元連続体についての支配方程式は、座標3成分を独立変数とする偏微分方程式である。

(2) 1次元連続体に対しては単軸応力状態についての材料法則が適用されるが、3次元連続体では多軸応力状態についての材料法則が必要となる。

3次元連続体についての対称限界を求める問題は、上記(1)の事情により、最終的に偏微分方程式弾塑性境界値問題に帰せられる。したがって数値的な解法を適用しなければ一般に解は求まらない。この点に関しては、通常の3次元連続体の弾塑性解析に用いられる離散化解法がほぼそのままの形で適用でき、既にいくつかの研究が実施されている[9]。

一方、(2)に関しては、多軸応力場についての材料法則は応力と歪それぞれ複数成分の間の関係式であり、応力1成分と歪1成分の間の関係式である単軸応力場の材料法則とは

一般に異なる形式で与えられる。単軸応力場の材料法則は、応力・歪曲線上の任意の反転点から次の反転点に至るまでの部分曲線を関数表示する形で定式化される。これに対して、多軸応力場の連続体では、材料の応答がある応力状態から別の応力状態に至る応力経路に依存し、材料法則は刻々の応力成分と歪成分の変化率の間の関係式として定式化される。対称限界理論では定常状態の連続的变化を追跡していく解析を行うため、構成則として、定常状態の増分変化に対する応力と歪の変化率の関係式が必要である。理論を3次元連続体に対して拡張する際には、上記の理由により、この構成則を誘導する部分で1次元連続体の場合とは異なってくる。特に、交番塑性定常状態については、定常状態周期挙動に塑性変形を生じる部分を含むから、この部分の釣合経路の解析を行わなければ定常状態の増分変化を求めることはできない。よって、この場合には単軸応力場の場合とは全く異なる理論の組み立てが新たに必要となる[10]。これに対し、シェイクダウン状態については定常状態周期挙動に塑性変形過程を含まず、基礎式から残留塑性歪を消去することにより、単軸応力場の場合と同様の考え方によって構成則を導くことができる。

繰り返し载荷を受ける構造物の塑性崩壊を予測する理論として、シェイクダウン理論があり、幾何学的非線形問題に拡張する研究も行われている[11-17]。サイクルごとに増大する塑性変形によるP-効果に重点を置き、その漸増崩壊(incremental collapse)に及ぼす影響を解明する取り組みも行われている[13]。しかし、これらの研究において幾何学的非線形を厳密に考慮したものは少なく、それらをP-効果が支配的な役割をする対称限界や定常状態限界の予測に適用することは不適當である。また、対称限界のように明確な分岐点を定義した研究はなく、これらのシェイクダウン理論の拡張研究により、対称限界を予測することはできない。

本章では、完全弾塑性材料で構成される3次元連続体に対して、シェイクダウン領域に限定した対称限界理論を展開する。シェイクダウン状態について、上で述べた基本方針に従って構成則を誘導する。3次元連続体における対称成分と逆対称成分を、新たに定義し、これらの成分に関する支配方程式を導く。対称成分に関する方程式と逆対称成分に関する方程式は連成せず、完全に分離され、1次元梁-柱の対称限界理論と共通の特徴が保持されることを示す。また、理論の妥当性の検証を、2次元有限要素梁-柱モデルについて、履歴挙動解析結果との比較により行う。次章および第4章において、交番塑性領域まで含めた理論の構築を行う。

2.2 解析モデルと基礎式

2.2.1 解析モデル

図2.1に示すように、ある一平面に関して対称な形状をもつ3次元連続体モデルを考える。モデルの構成材料は、滑らかな曲面を降伏条件とする完全弾塑性材料とし、弾性域でHookeの法則に従い、塑性域で塑性ポテンシャルを降伏関数に一致させた連合流れ則に従うものとする。また、モデルは材料特性についても上記の対称面に関して対称性を有するものと

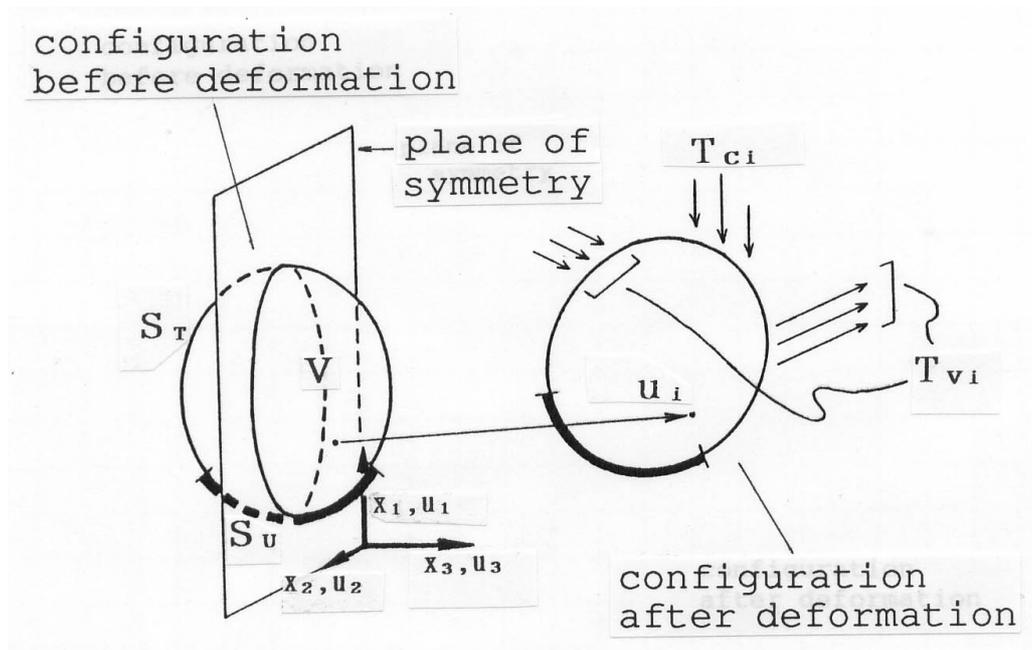


図 2.1 解析モデル

する。以下では、このモデルの形状、材料特性についての対称面を初期中央面と呼ぶ。

また、図 2.1 に示すように、モデルの初期中央面内に x_1, x_2 軸を置き、これに直交する方向に x_3 軸をとり、空間に固定された直角座標系 x_i ($i=1,2,3$)を設定する。

2.2.2 荷荷条件

モデルの境界面 S は、表面力 T_i が指定された S_T と変位 u_i が指定された S_U からなる。境界 S_T には一定表面力 T_{Ci} と繰り返し表面力 T_{Vi} が作用し、境界 S_U には一定強制変 u_{Ci} と繰り返し強制変位 u_{Vi} が作用する。 T_{Ci}, u_{Ci} は、モデルの初期中央面に関して対称であるとする。 T_{Ci} の対称性は次式のように表される。

$$\begin{aligned}
 T_{C1}(x_1, x_2, x_3) &= T_{C1}(x_1, x_2, -x_3) \\
 T_{C2}(x_1, x_2, x_3) &= T_{C2}(x_1, x_2, -x_3) \\
 T_{C3}(x_1, x_2, x_3) &= -T_{C3}(x_1, x_2, -x_3)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

T_{Vi} は、図 2.2 に示すように右側反転時と左側反転時における荷重のモードが互いに対称になるような完全両振り繰り返し荷重である。 T_{Vi} は次式のように表される。

$$T_{Vi} = \psi(\bar{T}_{Si} + \alpha(t)\bar{T}_{Ai})
 \tag{2.2}$$

ここで、 ψ は荷重の振幅を表すパラメータであり、 α は右側反転時において 1、左側反転時において -1 をとり、両者の値の間を繰り返し変動する荷重パラメータである。 \bar{T}_{Si} は初期中央面に関して対称な荷重であり、 \bar{T}_{Ai} は逆対称な荷重である。同様に、 u_{Vi} は次式で表されるような完全両振り繰り返し強制変位である。

$$u_{Vi} = \psi(\bar{u}_{Si} + \alpha(t)\bar{u}_{Ai})
 \tag{2.3}$$

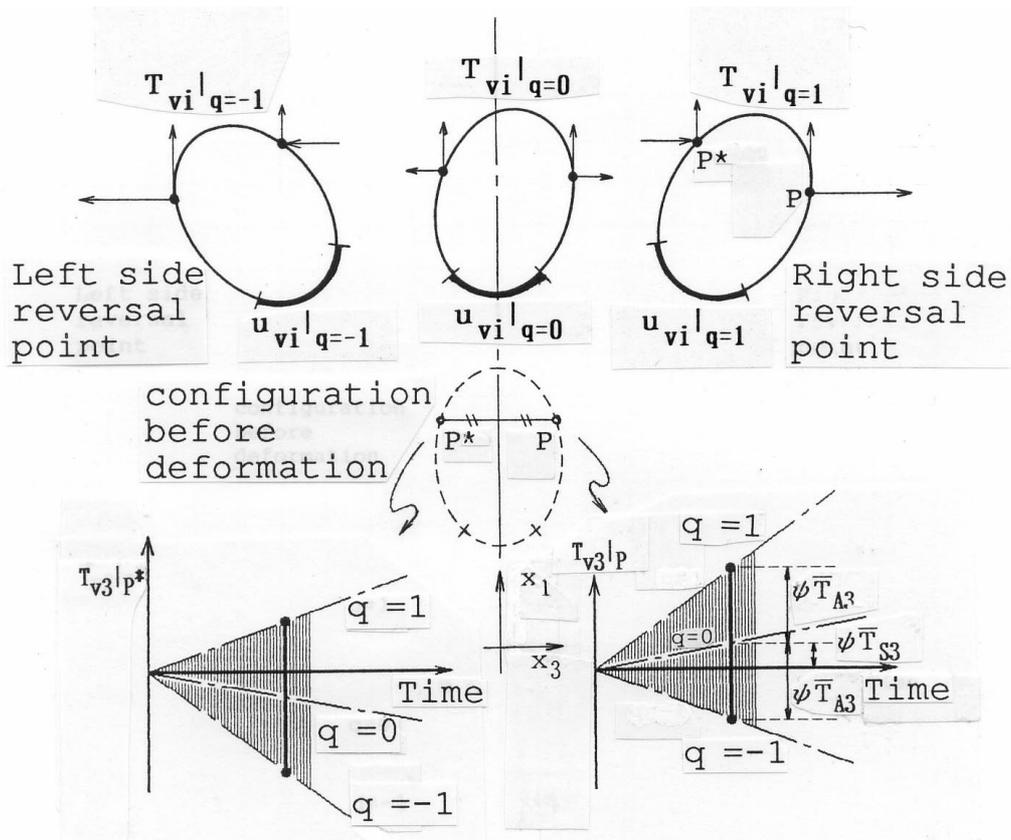


図 2.2 荷重プログラム

ここで、 \bar{u}_{Si} は初期中央面に関して対称な強制変位であり、 \bar{u}_{Ai} は逆対称な強制変位である。

T_{Vi} 、 u_{Vi} については、連続的の振幅漸増繰り返し曲げプログラム COIDA と同様、各振幅レベルにおいて定常状態に収束するまで完全両振り荷重を繰り返し、 ψ は微小量ずつ増加させる。

2.2.3 基礎式

本論文では、固定直角座標系を用い、変形前の初期状態を基準とした Total Lagrange 型の定式化を採用して理論を展開する。初期状態を基準として定義された Green の歪テンソルは変位 u_i を用いて次のように表される。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (2.4)$$

ここに、 $(\)_{,i} = (\) / x_i$ である。重複添字について総和規約を用いる。 u_i は次の幾何学的境界条件を満たす。

$$u_i = u_{Ci} + \psi(\bar{u}_{Si} + \alpha\bar{u}_{Ai}) \quad \text{on } S_U \quad (2.5)$$

釣合条件式は次の仮想仕事式で与えられる。

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_T} \{T_{Ci} + \psi(\bar{T}_{Si} + \alpha \bar{T}_{Ai})\} \delta u_i dS \quad (2.6)$$

ここに、

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} + u_{k,j} \delta u_{k,i} + u_{k,i} \delta u_{k,j}) \quad (2.7)$$

σ_{ij} は Kirchhoff の応力テンソルである。積分は変形前に物体の占める領域 V に関してとられる。 δu_{ij} は S_U 上で零となるような任意の仮想連続変位場である。

また、構成則を導くための基本的な関係式を以下に示す。完全弾塑性体についての降伏条件式は一般に次の形に書ける。

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.8)$$

弾性歪成分と応力テンソルとは Hooke の法則で結合される。

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (2.9)$$

関連流動則に従うと、塑性歪速度は次式で表される。

$$\varepsilon_{ij}^{p'} = \lambda n_{ij} \quad (2.10)$$

ここで、 $()'$ は変形の進行を表す時間パラメタ t による微分を表す。 n_{ij} は降伏曲面の外向き法線方向ベクトルであり、次式で表される。

$$n_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.11)$$

λ はスカラ - 係数であり、要素が負荷過程をたどるか除荷過程をたどるかによって、次のような値をとる。

$$\lambda > 0 \quad n_{ij} \sigma_{ij}' = 0 \quad \text{for loading} \quad (2.12)$$

$$\lambda = 0 \quad n_{ij} \sigma_{ij}' < 0 \quad \text{for unloading} \quad (2.13)$$

2.3 対称限界理論の基本的考え方

本論文で提示する、3次元連続体に対する対称限界理論も、定常状態経路の分岐点解析により対称限界を予測するという基本的な考え方は、文献[1,2]の1次元連続体に対する理論と共通している。以下に、こうした既往の理論と共通する基礎概念や解析方針も交えながら、本理論の考え方を示す。

初期中央面に関して対称性を持つ本モデルが図 2.2 の載荷プログラムを受けるとき、載荷振幅 ψ が十分に小さい間は、両反転時変形状態が初期中央面に関して対称な対称定常状態に収束する。しかし、 ψ があるレベルに達したとき、初期中央面に関して逆対称な変形成分を

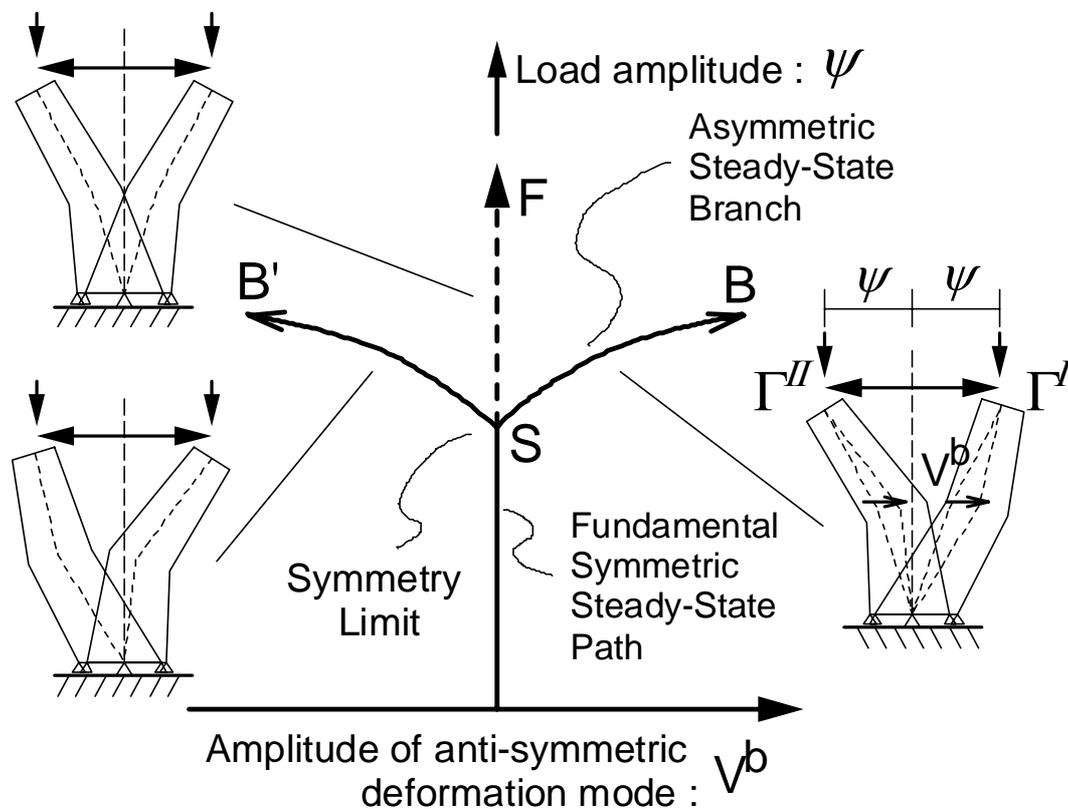


図 2.3 定常状態経路と対称限界

含む非対称定常状態へ移行する。この限界が対称限界である。1 個の定常状態が 1 個の点で表される定常状態空間を用いて考えれば、この現象は次のようにとらえることができる。载荷プログラムの下で連続的に生成される定常状態列はこの空間内の曲線として表され、定常状態経路と呼ばれる。図 2.3 に示すように、 ψ を縦軸に逆対称変形成分 v^b を横軸にとった平面上で考えれば、初期状態から ψ の増加に連れて生成される対称定常状態列は直線 OS として視覚化される。この OS を基本対称定常状態経路と呼ぶ。対称限界後に生成される非対称定常状態列は曲線 SB, SB' として視覚化され、これを定常状態経路分枝と呼ぶ。点 S が対称限界であり、次のような条件で特徴づけられる。

「载荷振幅の微小な増加に対する定常状態変数の変化率を求める問題において、0 でない逆対称成分を含む解が存在する。」

対称限界は次の 3 段階の手順で求める。

STEP1: 基本対称定常状態経路を定式化して求める。

STEP2: 対称限界条件を定式化する。

STEP3: 基本対称定常状態群の中で、対称限界条件を最初に満足する定常状態を見いだす。

本理論においても、一つの定常状態から振幅増分後の定常状態へ移行する過程の履歴挙動の解析を行わず、定常状態だけに着目した定式化を行う。こうした定式化を可能とするために次の基本仮定を導入する。

(CH1) 定常状態における载荷プログラム反転時のすべての状態変数は、単調増加量である载荷振幅に関する連続かつ区分的に微分可能な関数である。

また、定常状態の方程式を、対称成分と逆対称成分に関する方程式に変換する。そのため、3次元連続体における定常状態変数の対称成分と逆対称成分を、新たに定義し直す。すなわち、1次元連続体においては、定常状態の対称性は、材軸上の各点に属する状態変数が半サイクルごとに等しい値か正負逆の値を取ることで特徴づけられるが、図 2.5 に示すように、2次元および3次元連続体においては、初期中央面に関して対称な位置にある2点の状態変数の間で互いにそのような関係が成り立つことで特徴づけられる。したがって、本理論においては、図 2.4 に示すように、モデルの初期中央面に関して互いに対称に2つの座標系 $x_i^{(R)}$, $x_i^{(L)}$ を設ける。定常状態が対称であれば、半サイクル隔てて、それぞれの座標系から眺めた釣合状態は等しくなるはずである。よって、定常状態の代表的釣合状態として両反転時釣合状態を考える場合、変数の対称成分と逆対称成分を、右側反転時釣合状態において $x_i^{(R)}$ で測った量と左側反転時釣合状態において $x_i^{(L)}$ で測った量の和と差で定義し、これらの成分に関する方程式を導く。

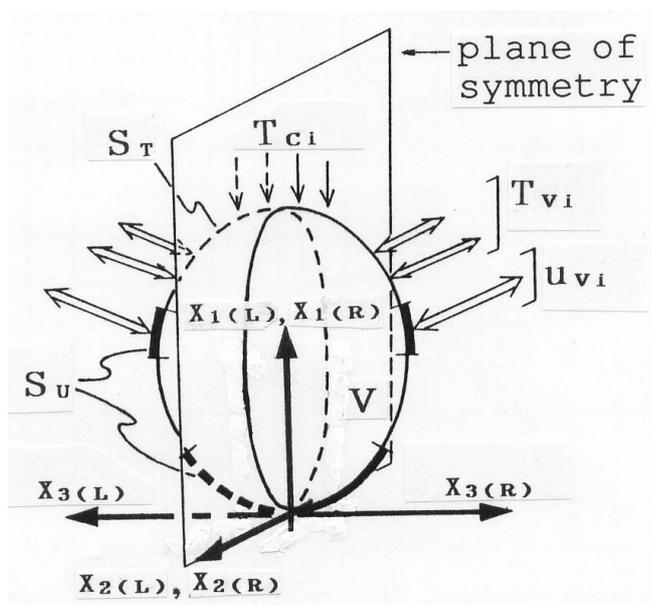


図 2.4 初期中央面に関して互に対称に設けた1対の座標系

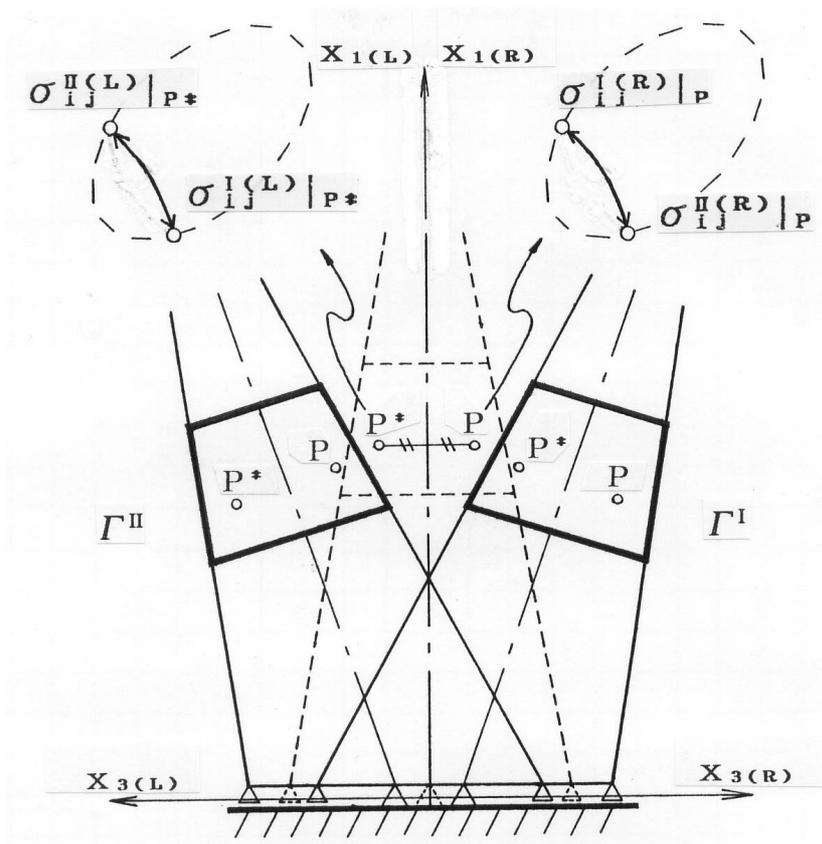


図 2.5 初中央面に関して対称な位置にある 2 点の応力状態

2.4 構成則

前節で示した解析を行うためには、構成則として、定常状態の増分変化に対する応力変化率と歪変化率の関係式が必要となる。

ここで、定常状態における応力点の軌道について、次の基本仮定を導入する。

(CH2) 定常状態において、降伏曲面上にある応力点の除荷が生じるのは、载荷プログラムの進行方向の反転の瞬間のみである。

この基本仮定 (CH2) に従うと、定常状態におけるモデル内の各点の応力 - 歪は図 2.4 に示した 4 つのパターンに分類される。(a) は弾性状態、(b) は片側反転点のみ降伏曲面に達するシェイクダウン状態、(c) は両反転点とも降伏曲面に達するシェイクダウン状態、(d) は交番塑性定常状態である。このうち、交番塑性定常状態については、1次元連続体と同様の手順によっては、構成則を導くことはできない。この場合は、定常状態における塑性変形過程の釣合経路全体に着目した、これまでとは異なる理論の組み立てが必要である[10]。これについては次章において述べる。本章では(a),(b),(c)に限定して構成則を導く。

また、梁-柱部材に関する対称限界理論[1,2]と同様に、次の基本仮定を導入する。

(CH3) 対称限界における対称定常状態から非対称定常状態への移行に際し、構造物内部

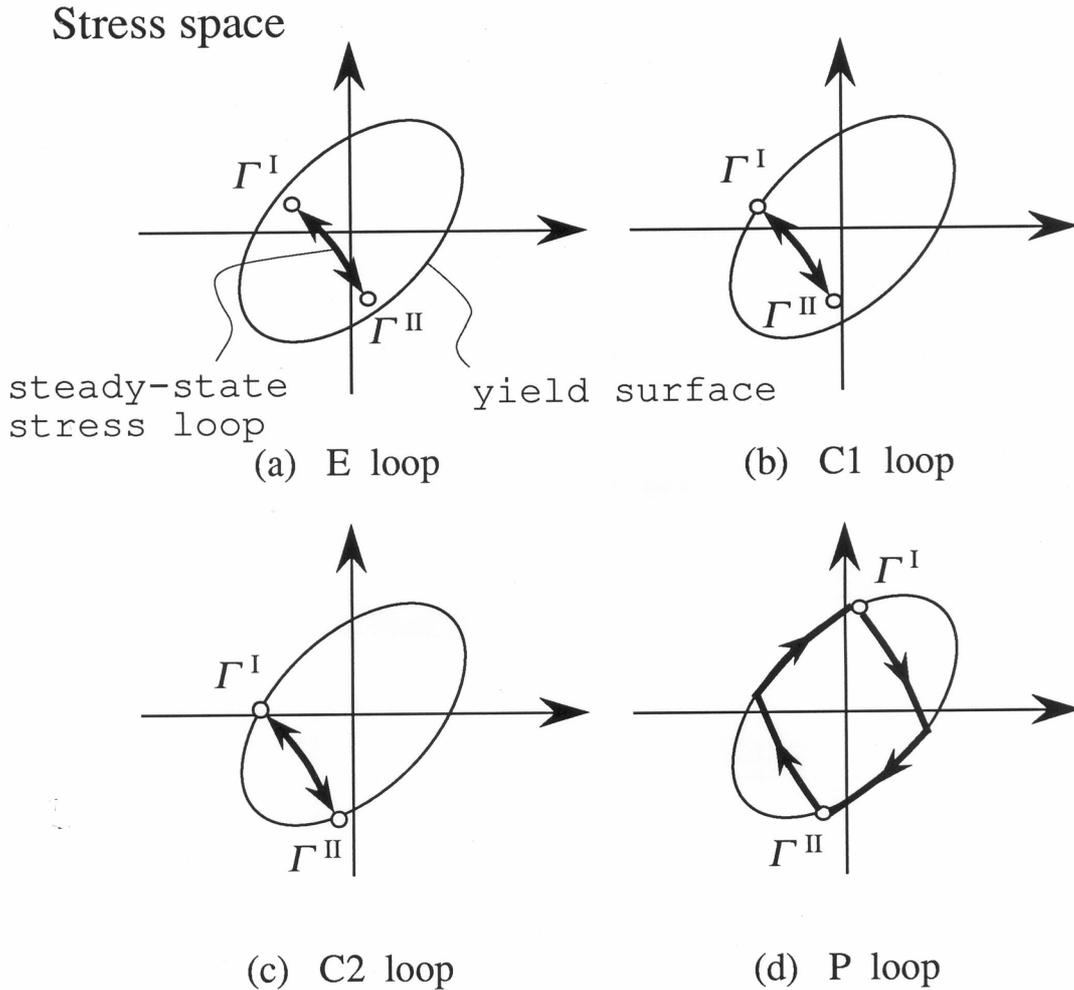


図 2.6 定常状態における応力ループの分類

の有限領域において、反転時に降伏曲面に達していた応力状態点の軌跡が、降伏曲面から離れることはない。

1次元連続体についてのシェイクダウン領域の構成則を誘導する手順は以下の通りであった[1-3]。

降伏点に達している側の反転時釣合状態について塑性流れ法則を記述する。

定常ループ上のすべての状態点で残留塑性歪が一定であることを利用して、両側の反転時応力変化率を同一の残留塑性歪変化率を用いて表す。

これらの関係式から残留塑性歪変化率を消去することにより、構成則を導く。

多軸応力問題に対しての構成則もこれと同じ基本方針に従って誘導できる。近藤、花井らも、これと類似の方法を用い、シェイクダウン状態の連続的变化を追跡することを目的として、3次元連続体の構成則を導いている[18]。

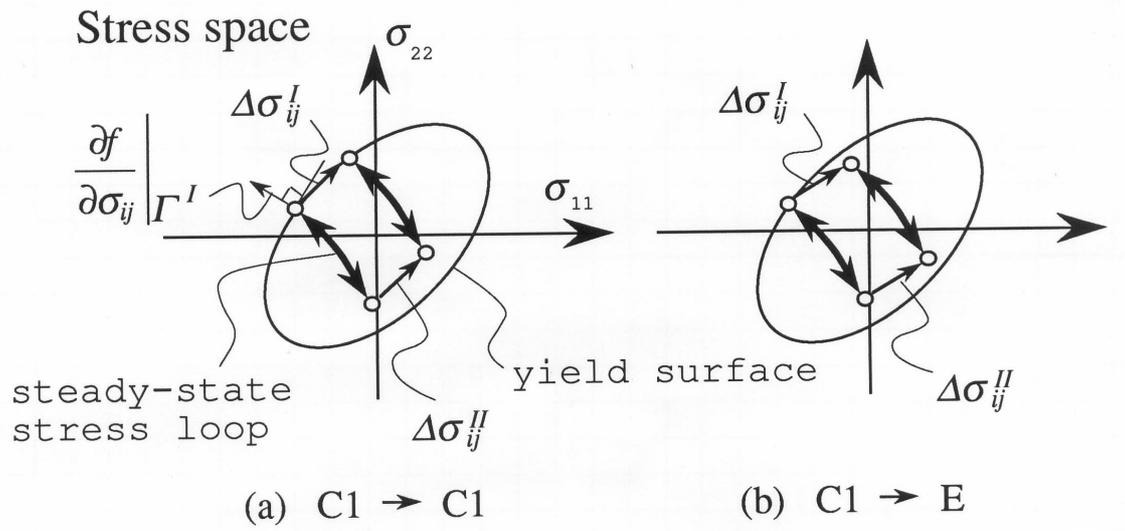


図 2.7 C1ル - プの増分変化

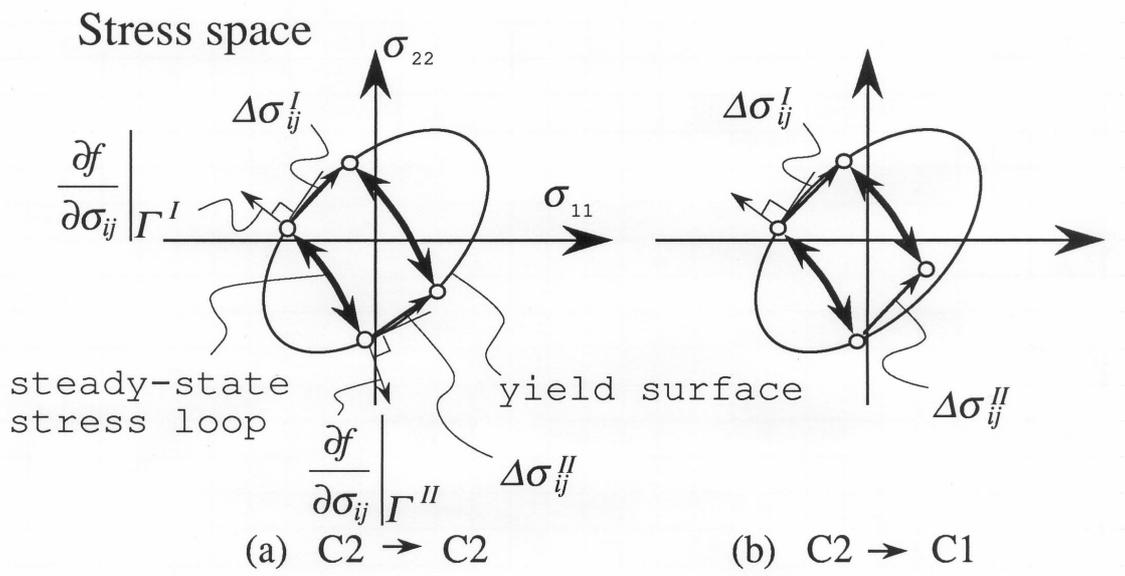


図 2.8 C2ル - プの増分変化

シェイクダウン領域の構成則は、反転時釣合状態に属する量の関係式として導かれ、一般に次式で表される。

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\mu} = \sum_{v=I,II} D_{ijkh}^{\mu,v} \dot{\epsilon}_{kh}^v \quad (\mu=I,II) \quad (2.14)$$

ここで、上添字 I,II は、それぞれ右側反転時釣合状態 Γ^I 及び左側反転時釣合状態 Γ^{II} に

属する量を表し、dot は振幅 ψ に関する変化率を表す。

以下、各応力 - プについて $D_{ijkh}^{u,v}$ を導く。

(i) E ル - プ

$$D_{ijkh}^{I,I} = E_{ijkh}, \quad D_{ijkh}^{I,II} = 0,$$

$$D_{ijkh}^{II,I} = 0, \quad D_{ijkh}^{II,II} = E_{ijkh} \quad (2.15)$$

(ii) C 1 ル - プ

図 2.5(a) に示すように、 Γ^I 反転時釣合状態において、応力点が降伏曲面上に達している場合について、構成則を導く。 Γ^{II} 反転時釣合状態で降伏している場合の構成則は、以下の各式において、上添字 I を、上添字 II に置き換えることにより、得られる。

振幅増分前後の定常状態において、応力点 σ_{ij}^I が降伏曲面上に達しているとする、次式が成り立つ。

$$n_{ij}^I \dot{\sigma}_{ij}^I = 0 \quad (2.16)$$

シェイクダウン状態において、塑性歪量はル - プ上のどの点でも同じ値であり、この残留塑性歪を ε_{ij}^r で表す。振幅 ψ に対する ε_{ij}^r の変化率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^r$ は、隣接定常状態に収束していく各サイクルの Γ^I 反転点側負荷過程で生じる塑性歪の累積量に等しく、次式で表される。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^r = \lambda n_{ij}^I \quad (2.17)$$

(2.9) 式を Γ^I 状態、 Γ^{II} 状態について書き、これを ψ で微分して、次式を得る。

$$\dot{\sigma}_{ij}^I = E_{ijkh} (\dot{\varepsilon}_{kh}^I - \dot{\varepsilon}_{kh}^r) \quad (2.18a)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{II} = E_{ijkh} (\dot{\varepsilon}_{kh}^{II} - \dot{\varepsilon}_{kh}^r) \quad (2.18b)$$

(2.17) 式を(2.18a)式に代入し、さらにこの(2.18a)式を(2.16)式に代入し、 λ について解けば次のようになる。

$$\lambda = \tilde{\Phi}^{II} n_{ij}^I E_{ijkh} \dot{\varepsilon}_{kh}^I \quad (2.19)$$

ここに、

$$\tilde{\Phi}^{II} = \frac{1}{\Phi^{II}}, \quad \Phi^{II} = n_{ij}^I E_{ijkh} n_{kh}^I \quad (2.20)$$

(2.19) 式を(2.17)式に代入して得られた式を(2.18a),(2.18b)式に代入して整理すれば、求め

る構成則が得られる。

$$D_{ijkh}^{I,I} = E_{ijkh} - E_{ijmn} n_{mn}^I \tilde{\Phi}^{I,I} n_{rq}^I E_{rqkh}, \quad D_{ijkh}^{I,II} = 0,$$

$$D_{ijkh}^{II,I} = -E_{ijmn} n_{mn}^I \tilde{\Phi}^{I,I} n_{rq}^I E_{rqkh}, \quad D_{ijkh}^{II,II} = E_{ijkh} \quad (2.21)$$

また、 $\lambda^I < 0$ のとき、図 2.5(b)のように Γ^I 応力点は降伏曲面から離れ、E ル - プに移行する。

(iii) C 2 ル - プ

図 2.6(a)に示すように、振幅増分前後の定常状態において、両反転時応力点とも降伏曲面上に達している場合には、次式が成り立つ。

$$n_{ij}^{\mu} \dot{\sigma}_{ij}^{\mu} = 0 \quad (\mu=I,II) \quad (2.22)$$

ここで、上添字 μ については総和規約を適用しない(後出の ν についても同様)。

$\dot{\varepsilon}_{ij}^r$ は、 Γ^I 、 Γ^{II} の負荷過程で各々生じる塑性歪の累加された量に等しく、次式で表される。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^r = \sum_{\mu=I,II} \lambda^{\mu} n_{ij}^{\mu} \quad (2.23)$$

(2.9)式を両反転点について書き ψ で微分し次式を得る。

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\mu} = E_{ijkh} (\dot{\varepsilon}_{kh}^{\mu} - \dot{\varepsilon}_{kh}^r) \quad (\mu=I,II) \quad (2.24)$$

(2.23)式を(2.24)式に代入し、さらにこの(2.24)式を(2.22)式に代入し、 λ^I, λ^{II} を解き出せば次のようになる。

$$\lambda^{\mu} = \sum_{\nu=I,II} \tilde{\varepsilon}^{\mu,\nu} n_{ij}^{\mu} E_{ijkh} \dot{\varepsilon}_{kh}^{\nu} \quad (\mu=I,II) \quad (2.25)$$

ここに、

$$[\tilde{\varepsilon}^{\mu,\nu}] = [\varepsilon^{\mu,\nu}]^{-1} \quad ([\varepsilon^{\mu,\nu}] \text{ は } \varepsilon^{\mu,\nu} \text{ を成分とする } 2 \times 2 \text{ の行列}),$$

$$\varepsilon^{\mu,\nu} = n_{ij}^{\mu} E_{ijkh} n_{kh}^{\nu} \quad (2.26)$$

(2.25)式を(2.23)式に代入して得られた式を(2.24)式に代入し整理すれば、求める構成則が得られる。

$$D_{ijkh}^{\mu,\nu} = \delta_{\mu\nu} E_{ijkh} - \sum_{\rho=I,II} E_{ijmn} n_{mn}^{\rho} \tilde{\varepsilon}^{\rho,\nu} n_{rq}^{\nu} E_{rqkh} \quad (\mu,\nu=I,II) \quad (2.27)$$

ここで、 $\delta_{\mu\nu}$ は Kronecker delta である。

また、 $\lambda^{\mu} < 0$ のとき、図 2.6(b)のように Γ^{μ} 応力点は降伏曲面から離れ、C 1 ル - プに移

行する。

2.5 定常状態変数についての方程式

STEP1 の基本対称定常状態経路の解析については、増分型解析法を適用する。すなわち、
 載荷振幅 $\psi = \psi_0$ のときの対称定常状態 $\mathbf{Q}^f \Big|_{\psi = \psi_0}$ が既知であれば、 $\mathbf{Q}^f \Big|_{\psi = \psi_0 + \Delta\psi}$ を次式によって近
 似的に求める。

$$\mathbf{Q}^f \Big|_{\psi = \psi_0 + \Delta\psi} = \mathbf{Q}^f \Big|_{\psi = \psi_0} + \dot{\mathbf{Q}}^f \Big|_{\psi = \psi_0} \Delta\psi \quad (2.28)$$

本節では、この STEP1 の解析に必要な定常状態変数の対称成分の変化率 $\dot{\mathbf{Q}}^f$ に関する方
 程式と、STEP2 の対称限界条件の誘導で必要とされる定常状態変数の逆対称成分の変化率
 に関する方程式を導く。2.5.2 項までで、連続体に対する一般的定式化を行い、2.5.3 におい
 て、有限要素法を適用した解析法を展開する。

2.5.1 反転時状態量についての変化率方程式

図 2.4 に示すように、モデルの初期中央面に関して互に対称に 2 つの座標系 $x_i^{(R)}$ 、 $x_i^{(L)}$ を
 設ける。以下において、 Γ^I 状態に属する量は座標系 R に基づいて定義し、 Γ^{II} 状態に属す
 る量は座標系 L に基づいて定義する。 Γ^I 状態についての関係式は座標系 R を用いて定式化
 し、 Γ^{II} 状態についての関係式は座標系 L を用いて定式化する。座標系 R、L に基づいて成
 分が定義され、独立変数がそれぞれ $x_i^{(R)}$ 、 $x_i^{(L)}$ であるテンソル量をそれぞれ上添字(R)、(L)
 で表記する。

基礎式(2.4) ~ (2.7)を Γ^I 、 Γ^{II} 釣合状態について書き、 ψ で微分して、変化率に関する対応
 する関係式が得られる。

歪・変位関係式：

$$\varepsilon_{ij}^{I(R)} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^{I(R)} + \dot{u}_{j,i}^{I(R)} + \dot{u}_{k,i}^{I(R)} u_{k,j}^{I(R)} + u_{k,i}^{I(R)} \dot{u}_{k,j}^{I(R)}) \quad (2.29a)$$

$$\varepsilon_{ij}^{II(L)} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^{II(L)} + \dot{u}_{j,i}^{II(L)} + \dot{u}_{k,i}^{II(L)} u_{k,j}^{II(L)} + u_{k,i}^{II(L)} \dot{u}_{k,j}^{II(L)}) \quad (2.29b)$$

幾何学的境界条件式：

$$\dot{u}_i^{I(R)} = \bar{u}_i^{I(R)} \quad \text{on } S_U \quad (2.30a)$$

$$\dot{u}_i^{II(L)} = \bar{u}_i^{II(L)} \quad \text{on } S_U \quad (2.30b)$$

ここに、

$$\bar{u}_i^I = \bar{u}_{Si} + \bar{u}_{Ai} \quad (2.31a)$$

$$\bar{u}_i^{II} = \bar{u}_{Si} - \bar{u}_{Ai} \quad (2.31b)$$

仮想仕事式：

$$\int_V \left\{ \dot{\sigma}_{ij}^{I(R)} \delta \varepsilon_{ij}^{I(R)} + \sigma_{ij}^{I(R)} \dot{u}_{k,i}^{I(R)} \delta u_{k,j}^{I(R)} \right\} dV^{(R)} = \int_{S_f} \bar{T}_i^{I(R)} \delta u_i^{I(R)} dS^{(R)} \quad (2.32a)$$

$$\int_V \left\{ \dot{\sigma}_{ij}^{II(L)} \delta \varepsilon_{ij}^{II(L)} + \sigma_{ij}^{II(L)} \dot{u}_{k,i}^{II(L)} \delta u_{k,j}^{II(L)} \right\} dV^{(L)} = \int_{S_f} \bar{T}_i^{II(L)} \delta u_i^{II(L)} dS^{(L)} \quad (2.32b)$$

ここに、

$$\delta \varepsilon_{ij}^{I(R)} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j}^{I(R)} + \delta u_{j,i}^{I(R)} + u_{k,j}^{I(R)} \delta u_{k,i}^{I(R)} + u_{k,i}^{I(R)} \delta u_{k,j}^{I(R)}) \quad (2.33a)$$

$$\delta \varepsilon_{ij}^{II(L)} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j}^{II(L)} + \delta u_{j,i}^{II(L)} + u_{k,j}^{II(L)} \delta u_{k,i}^{II(L)} + u_{k,i}^{II(L)} \delta u_{k,j}^{II(L)}) \quad (2.33b)$$

$$\bar{T}_i^I = \bar{T}_{Si} + \bar{T}_{Ai} \quad (2.34a)$$

$$\bar{T}_i^{II} = \bar{T}_{Si} - \bar{T}_{Ai} \quad (2.34b)$$

(2.31)式および(2.34)式から、強制変位 \bar{u}_i^I と \bar{u}_i^{II} 、表面荷重 \bar{T}_i^I と \bar{T}_i^{II} とは、初期中央面に関して、それぞれ互いに対称となっている。これは以下のようにして示すことができる。すなわち、図 2.5 に示す、モデルの初期中央面に関して互いに対称な位置にある一対の点 P、P*のそれぞれ座標系 R、L における座標値は一致し、これを ξ_j とおくと、 \bar{u}_{Si} は対称な変位分布であり、 \bar{u}_{Ai} は逆対称であるから、次式が成り立つ。

$$\bar{u}_{Si}^{(R)}(\xi_j) = \bar{u}_{Si}^{(L)}(\xi_j) \quad (2.35a)$$

$$\bar{u}_{Ai}^{(R)}(\xi_j) = -\bar{u}_{Ai}^{(L)}(\xi_j) \quad (2.35b)$$

よって、次式のように、強制変位について対称性が成り立つ。

$$\bar{u}_i^{I(R)}(\xi_j) = \bar{u}_i^{II(L)}(\xi_j) \quad (2.36)$$

表面荷重についても同様である。

また前節で導いた反転時応力変化率と反転時歪変化率との関係式は次のように表現される。

$$\dot{\sigma}_{ij}^{I(R)} = D_{ijkh}^{I(R)} (\sigma_{mn}^{I(R)}, \sigma_{mn}^{II(R)}) \dot{\varepsilon}_{kh}^{I(R)} + D_{ijkh}^{II(R)} (\sigma_{mn}^{I(R)}, \sigma_{mn}^{II(R)}) \dot{\varepsilon}_{kh}^{II(R)} \quad (2.37a)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{II(L)} = D_{ijkh}^{II(L)} (\sigma_{mn}^{I(L)}, \sigma_{mn}^{II(L)}) \dot{\varepsilon}_{kh}^{I(L)} + D_{ijkh}^{I(L)} (\sigma_{mn}^{I(L)}, \sigma_{mn}^{II(L)}) \dot{\varepsilon}_{kh}^{II(L)} \quad (2.37b)$$

ここで、 Γ^I 状態についての関係式は座標系 R を用いて定式化されているが、(2.37)式に見られるように構成則は両反転点に属する量が連成した形をしている。(2.37a)式では $\dot{\sigma}_{ij}^{I(R)}$ が Γ^II 状態量をも用いて歪変化率と関係づけられている。 Γ^II 状態量は座標系 L に関して成分が定義され、 $x_i^{(L)}$ を独立変数としているから、(2.37a)式に含まれる Γ^II 状態量を、座標系 R に関して成分が定義され、 $x_i^{(R)}$ を独立変数とする量に変換する。

(2.37a)式の $\dot{\varepsilon}_{kh}^{\text{II(R)}}$ と $\sigma_{ij}^{\text{II(R)}}$ を座標系 R に基づく量に変換する。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{II(R)}} = \beta_{ki}\beta_{hj}\dot{\varepsilon}_{kh}^{\text{II(L)}}(x_m^{(L)}) = \beta_{ki}\beta_{hj}\dot{\varepsilon}_{kh}^{\text{II(L)}}(\beta_{mn}x_n^{(R)}) \quad (2.38a)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{II(R)}} = \beta_{ki}\beta_{hj}\sigma_{kh}^{\text{II(L)}}(x_m^{(L)}) = \beta_{ki}\beta_{hj}\sigma_{kh}^{\text{II(L)}}(\beta_{mn}x_n^{(R)}) \quad (2.38b)$$

ここで β_{ij} は座標軸 $x_i^{(L)}$ と $x_j^{(R)}$ のなす角の余弦である。

同様に構成則(2.37b)に含まれる Γ^{I} 状態量についても、座標系 L に基づく量に変換する。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{I(L)}} = \beta_{ik}\beta_{jh}\dot{\varepsilon}_{kh}^{\text{I(R)}}(x_m^{(R)}) = \beta_{ik}\beta_{jh}\dot{\varepsilon}_{kh}^{\text{I(R)}}(\beta_{mn}x_n^{(L)}) \quad (2.39a)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{I(L)}} = \beta_{ik}\beta_{jh}\sigma_{kh}^{\text{I(R)}}(x_m^{(R)}) = \beta_{ik}\beta_{jh}\sigma_{kh}^{\text{I(R)}}(\beta_{mn}x_n^{(L)}) \quad (2.39b)$$

(2.29a)式と(2.38)式を(2.37a)式に代入して得られる式を、さらに釣合式(2.32a)に代入して、次式が得られる。

$$\int_V \left[\left\{ \delta_{ki} + u_{k,i}^{\text{I(R)}} \right\} \left\{ D_{ijmn}^{\text{I(R)}} \left\{ \delta_{hm} + u_{h,m}^{\text{I(R)}} \right\} \dot{u}_{h,n}^{\text{I(R)}} + D_{ijmn}^{\text{II(R)}} \beta_{pm}\beta_{qn} \left\{ \delta_{hp} + u_{h,p}^{\text{II(L)}}(\beta_{rs}x_s^{(R)}) \right\} \dot{u}_{h,q}^{\text{II(L)}}(\beta_{rs}x_s^{(R)}) \right\} \right. \\ \left. + \sigma_{ij}^{\text{I(R)}} \dot{u}_{k,i}^{\text{I(R)}} \right] \delta u_{k,j}^{\text{I(R)}} dV^{(R)} = \int_{S_T} \bar{T}_i^{\text{I(R)}} \delta u_i^{\text{I(R)}} dS^{(R)} \quad (2.40a)$$

また、(2.29b)式と(2.39)式を(2.37b)式に代入して得られる式を、さらに釣合式(2.32b)に代入して、 Γ^{II} 反転点における対応する式が得られる。

$$\int_V \left[\left\{ \delta_{ki} + u_{k,i}^{\text{II(L)}} \right\} \left\{ D_{ijmn}^{\text{II(L)}} \left\{ \delta_{hm} + u_{h,m}^{\text{II(L)}} \right\} \dot{u}_{h,n}^{\text{II(L)}} + D_{ijmn}^{\text{II(L)}} \beta_{mp}\beta_{nq} \left\{ \delta_{hp} + u_{h,p}^{\text{I(R)}}(\beta_{sr}x_s^{(L)}) \right\} \dot{u}_{h,q}^{\text{I(R)}}(\beta_{sr}x_s^{(L)}) \right\} \right. \\ \left. + \sigma_{ij}^{\text{II(L)}} \dot{u}_{k,i}^{\text{II(L)}} \right] \delta u_{k,j}^{\text{II(L)}} dV^{(L)} = \int_{S_T} \bar{T}_i^{\text{II(L)}} \delta u_i^{\text{II(L)}} dS^{(L)} \quad (2.40b)$$

2.5.2 変数の対称成分と逆対称成分による定式化

図2.5に示すように、モデルの初期中央面に関して互に対称な位置にある一対の点をP、P*とする。P、P*点のそれぞれ座標系 R、L における座標値は一致し、これを ξ_j とおく。

変位の対称成分 u_i^f と逆対称成分 u_i^b を、P 点における $u_i^{\text{I(R)}}$ と P*点における $u_i^{\text{II(L)}}$ を用い、P、P*点の共通の座標値 ξ_j を独立変数として、次式で定義する。

$$u_i^f(\xi_j) = \frac{u_i^{\text{I(R)}}|_P + u_i^{\text{II(L)}}|_{P^*}}{2} = \frac{u_i^{\text{I(R)}}(\xi_j) + u_i^{\text{II(L)}}(\xi_j)}{2} \quad (2.41a)$$

$$u_i^b(\xi_j) = \frac{u_i^{\text{I(R)}}|_P - u_i^{\text{II(L)}}|_{P^*}}{2} = \frac{u_i^{\text{I(R)}}(\xi_j) - u_i^{\text{II(L)}}(\xi_j)}{2} \quad (2.41b)$$

今、変化率を評価する既知の定常状態は対称であるから、これに属する状態量について

次の関係が成り立つ。

$$u_i^{I(R)}(\xi_j) = u_i^{II(L)}(\xi_j) = u_i^f(\xi_j), \quad u_i^b(\xi_j) = 0, \quad \sigma_{ij}^{I(R)}(\xi_k) = \sigma_{ij}^{II(L)}(\xi_k) \quad (2.42)$$

基本仮定 (CH3) により、対称限界以下の振幅レベルにおいて、P 点と P*点とで互いに異なる種類の応力ループに移行することはなく次式が成り立つ。

$$D_{ijkh}^{I(R)}(\xi_m) = D_{ijkh}^{II(L)}(\xi_m), \quad D_{ijkh}^{I,II(R)}(\xi_m) = D_{ijkh}^{II(L)}(\xi_m) \quad (2.43)$$

表面荷重 \bar{T}_i^I と \bar{T}_i^{II} は互に対称であり次式が成り立つ。

$$\bar{T}_i^{I(R)}(\xi_j) = \bar{T}_i^{II(L)}(\xi_j) \quad (2.44)$$

仮想変位場は任意であるから、仮想変位場に次の関係を与えても、(2.40a)式と(2.40b)式は、成り立つはずである。

$$\delta u_i^{I(R)}(\xi_j) = \delta u_i^{II(L)}(\xi_j) \quad (2.45)$$

よって、(2.40a)式と(2.40b)式について積分変数を ξ_i に変換し、両者の和および差をとり 1/2 を乗ずれば、定常状態変化率の対称成分および逆対称成分に関する式が得られる。

$$\int_V \left[(\delta_{ki} + u_{k,i}^f) \left\{ D_{ijmn}^{I,II(R)} (\delta_{hm} + u_{h,m}^f) \dot{u}_{h,n}^f + D_{ijmn}^{I,II(R)} \beta_{pm} \beta_{qn} (\delta_{hp} + \hat{u}_{h,p}^f) \hat{u}_{h,q}^f \right\} + \sigma_{ij}^{I(R)} \dot{u}_{k,i}^f \right] \delta u_{k,j}^{I(R)} dV_\xi = \int_{S_T} \bar{T}_i^{I(R)} \delta u_i^{I(R)} dS_\xi \quad (2.46a)$$

$$\int_V \left[(\delta_{ki} + u_{k,i}^f) \left\{ D_{ijmn}^{I,II(R)} (\delta_{hm} + u_{h,m}^f) \dot{u}_{h,n}^b - D_{ijmn}^{I,II(R)} \beta_{pm} \beta_{qn} (\delta_{hp} + \hat{u}_{h,p}^f) \hat{u}_{h,q}^b \right\} + \sigma_{ij}^{I(R)} \dot{u}_{k,i}^b \right] \delta u_{k,j}^{I(R)} dV_\xi = 0 \quad (2.46b)$$

ここに、

$$\hat{u}_i^f(\xi_j) = u_i^f(\beta_{kj} \xi_j), \quad \hat{u}_i^b(\xi_j) = u_i^b(\beta_{kj} \xi_j)$$

一方、 u_i^f と u_i^b についての境界条件は、(2.36)式から、次のようになる。

幾何学的境界条件式：

$$\dot{u}_i^f(\xi_j) = \frac{\bar{u}_i^{I(R)}(\xi_j) + \bar{u}_i^{II(L)}(\xi_j)}{2} = \bar{u}_i^{I(R)}(\xi_j) = \bar{u}_{S_i}^{(R)}(\xi_j) + \bar{u}_{A_i}^{(R)}(\xi_j) \quad \text{on } S_U \quad (2.47a)$$

$$\dot{u}_i^b(\xi_j) = \frac{\bar{u}_i^{I(R)}(\xi_j) - \bar{u}_i^{II(L)}(\xi_j)}{2} = 0 \quad \text{on } S_U \quad (2.47b)$$

(2.46)式に、変分法の手続きを施すことにより、支配微分方程式と境界条件式が導かれる。しかし、実際の構造物の解析においては、ほとんどの場合、上記の変分原理に基づいて、有限要素法を適用した解法を採用することになる。よって、以降においては、有限要

素モデルに対して、理論を展開する。

2.5.3 有限要素法の適用

連続体モデルに対して有限要素法を適用する。 Γ^I 釣合状態における要素内変位場は、節点変位ベクトル U_N^I を用いて、次式のように表される。

$$u_i^{I(R)}(\xi_j) = \sum_{N=1}^{N_{Fe}} \phi_{iN}(\xi_j) U_N^I \quad (2.48a)$$

Γ^{II} 釣合状態における要素内変位場についても、同じ形状関数 ϕ_{iN} を用いて次式により近似する。

$$u_i^{II(L)}(\xi_j) = \sum_{N=1}^{N_{Fe}} \phi_{iN}(\xi_j) U_N^{II} \quad (2.48b)$$

節点変位ベクトルの対称成分と逆対称成分を次式で定義する。

$$U_N^f = \frac{U_N^I + U_N^{II}}{2} \quad (2.49a)$$

$$U_N^b = \frac{U_N^I - U_N^{II}}{2} \quad (2.49b)$$

これを用いて、変位の対称成分と逆対称成分は次のように表現される。

$$u_i^f(\xi_j) = \sum_{N=1}^{N_{Fe}} \phi_{iN}(\xi_j) U_N^f \quad (2.50a)$$

$$u_i^b(\xi_j) = \sum_{N=1}^{N_{Fe}} \phi_{iN}(\xi_j) U_N^b \quad (2.50b)$$

(2.46)式における仮想変位場 $\delta u_i^{I(R)}$ は次のようになる。

$$\delta u_i^{I(R)}(\xi_j) = \sum_{N=1}^{N_{Fe}} \phi_{iN}(\xi_j) \delta U_N^I \quad (2.51)$$

(2.46)式を要素に対して書き、これに(2.50)式、(2.51)式を代入し整理する。(2.46)式は、任意の仮想変位 δU_N^I に対して成り立たなければならないから、これから、要素に対する定常状態の対称成分と逆対称成分に関する変化率方程式が得られ、次のように表現される。

$$\sum_{M=1}^{N_{Fe}} K_{NM}^f \dot{U}_M^f = \dot{F}_N^I \quad (N=1, \dots, N_{Fe}) \quad (2.52a)$$

$$\sum_{M=1}^{N_{Fe}} K_{NM}^b \dot{U}_M^b = 0 \quad (N=1, \dots, N_{Fe}) \quad (2.52b)$$

ここに、

$$K_{NM}^f = \int_{V_e} \left[(\delta_{ki} + u_{k,i}^f) \left\{ D_{ijmn}^{I(R)} (\delta_{hm} + u_{h,m}^f) \phi_{hM,n} + D_{ijmn}^{II(R)} \beta_{pm} \beta_{qn} (\delta_{hp} + \hat{u}_{h,p}^f) \hat{\phi}_{hM,q} \right\} + \sigma_{ij}^{I(R)} \phi_{kM,i} \right] \phi_{kN,j} dV_\xi$$

$$K_{NM}^b = \int_{V_e} \left[(\delta_{ki} + u_{k,i}^f) \left\{ D_{ijmn}^{I(R)} (\delta_{hm} + u_{h,m}^f) \phi_{hM,n} - D_{ijmn}^{II(R)} \beta_{pm} \beta_{qn} (\delta_{hp} + \hat{u}_{h,p}^f) \hat{\phi}_{hM,q} \right\} + \sigma_{ij}^{I(R)} \phi_{kM,i} \right] \phi_{kN,j} dV_\xi$$

$$\dot{F}_N^I = \int_{S_T} \bar{T}_i^{I(R)} \phi_{iN} dS_\xi$$

$$\hat{\phi}_{iN}(\xi_j) = \phi_{iN}(\beta_{kj} \xi_j)$$

(2.51)式を、全要素について重ね合わせるにより、全体系に対する変化率方程式が得られ、次のように表現できる。

$$\mathbf{K}^f \dot{\mathbf{U}}^f = \dot{\mathbf{F}}^I \quad (2.53a)$$

$$\mathbf{K}^b \dot{\mathbf{U}}^b = \mathbf{0} \quad (2.53b)$$

幾何学的境界条件は、(2.47)式から、次のようになる。

幾何学的境界条件式：

$$\dot{U}_N^f = \frac{\dot{U}_N^I + \dot{U}_N^{II}}{2} = \frac{\bar{u}_i^{I(R)}(\xi_j|_N) + \bar{u}_i^{II(L)}(\xi_j|_N)}{2} = \bar{u}_i^{I(R)}(\xi_j|_N) = \bar{u}_{Si}^{(R)}(\xi_j|_N) + \bar{u}_{Ai}^{(R)}(\xi_j|_N) \quad \text{on } S_U \quad (2.54a)$$

$$\dot{U}_N^b = \frac{\dot{U}_N^I - \dot{U}_N^{II}}{2} = \frac{\bar{u}_i^{I(R)}(\xi_j|_N) - \bar{u}_i^{II(L)}(\xi_j|_N)}{2} = 0 \quad \text{on } S_U \quad (2.54b)$$

ここに、 $\xi_j|_N$ は、 \dot{U}_N^f および \dot{U}_N^b が属する節点の座標を表す。

方程式(2.53a)を境界条件(2.54a)の下で解いて、対称定常状態の変化率解が求まる。この解を加え合わせていくことにより、STEP1における基本対称定常状態経路の追跡を行う。

方程式(2.53b)について、指定変位成分に対応する行を取り除いて、未知量の変位成分のみについての方程式にまとめると、次のように表現できる。

$$\mathbf{K}^{b*} \dot{\mathbf{U}}^{b*} = \mathbf{0} \quad (2.55)$$

2.3 で述べた対称限界を特徴づける条件は、方程式(2.55)の係数行列の1次固有値が零となることに対応し、次式のように表される。

$$\Lambda_1 = 0 \quad (2.56)$$

ここで、 Λ_1 は \mathbf{K}^{b*} の1次固有値である。

STEP1では、領域間境界(2.4で示した各定常応力 - プを呈するモデル内の領域を区分する境界面)の連続的移動を考慮していないため、上式の左辺の値は不連続に変化する場合もあり、次式を対称限界条件式とする。

$$\Lambda_1 \leq 0 \quad (2.57)$$

基本対称定常状態経路上で、上式を最初に満足する定常状態を対称限界とする。

2.6 履歴挙動解析との比較による理論の検証

図 2.9 に示す 2次元梁-柱モデルについて、本理論の対称限界解析法により求めた対称限界予測解と、図 2.10 に示す段階的振幅漸増完全両振り繰り返し曲げプログラム STIDAC に対する履歴挙動の解析結果とを比較し、理論の妥当性を検証する。

要素内変位場を線形近似した 2次元有限要素による離散化モデルである。モデルを構成

する材料は von Mises の降伏条件に従う完全弾塑性材料で、材料定数は図 2.9 に示した通りである。

本解析モデルに対して対称限界解析を行い、対称限界に至るまでの K^{b*} の 1 次固有値 λ_1 の変化を追跡した。これを図 2.12 に示す。 $\psi = 0.19l$ 付近から λ_1 の値は連続的に減少しており、(2.57)式の対称限界条件は等号の成立によって満たされている。よって、本解析モデルの対称限界予測解の検証を行うことで、理論の正当性を厳密に立証できる。

図 2.11 には、対称限界における要素の応力状態の分布を示した。

履歴挙動解析は、文献[19]の増分摂動法を用いて行った。最終振幅 ψ_{max} の異なる種々の STIDAC プログラムに対して、 ψ_{max} における収束後の定常状態を求めた。下式で定義される逆対称たわみ変形 v^b を計算し、 v^b と ψ_{max} の関係を図 2.13 に丸印で示した。

$$v^b = \left(\frac{u_1^I + u_2^{II}}{1.2l} \right) \Big|_{x_1=0.6l, x_2=0} \quad (2.58)$$

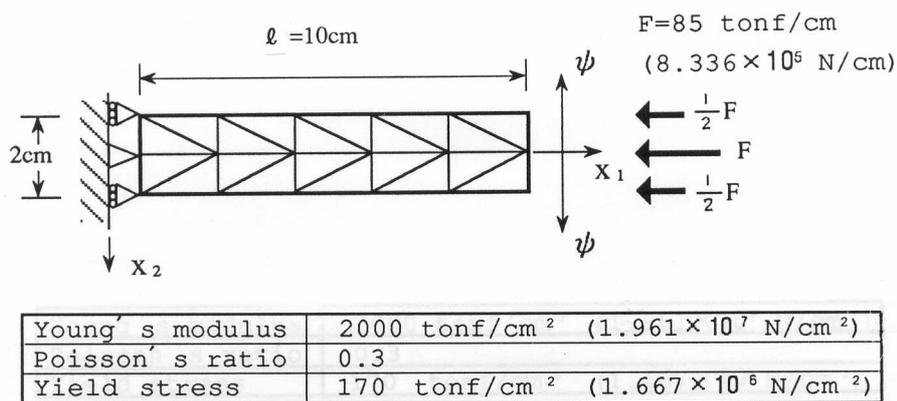


図 2.9 解析モデル

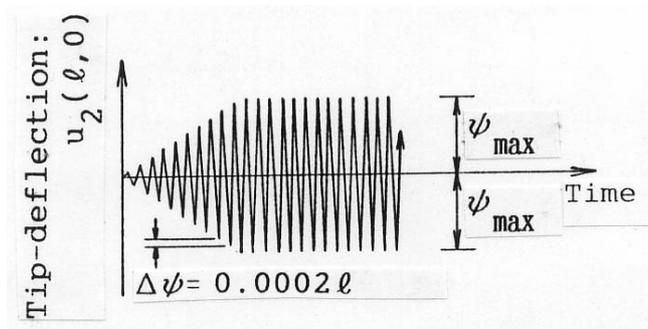


図 2.10 段階的振幅漸増完全両振り繰り返し曲げプログラム STIDAC

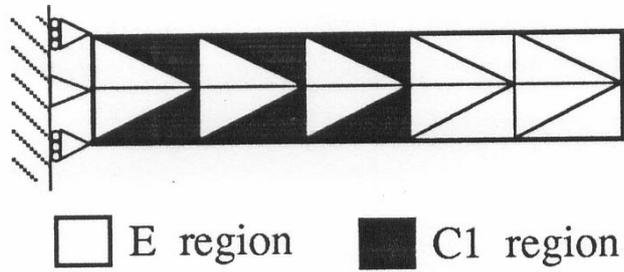


図 2.11 要素の応力状態の分布

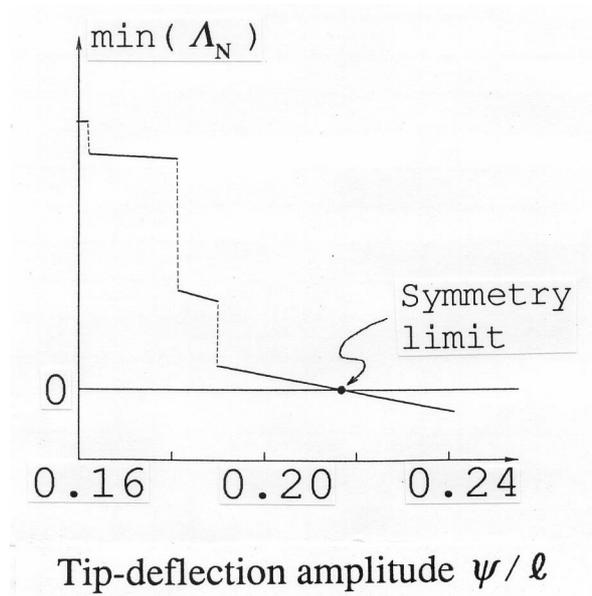


図 2.12 1次固有値 Λ_1 の変化

また、対称限界予測値より十分大きい ψ_{\max} のSTIDACプログラムに対して、下式で定義される反転時逆対称たわみ変形の増幅係数 v_{rev}^b のサイクルごとの変動を求めた。これを図2.13に実線で示した。

$$v_{rev}^b = \left(\frac{2u_2^I|_{(i)\text{cycle}} + u_2^{\text{II}}|_{(i-1)\text{cycle}} + u_2^{\text{II}}|_{(i+1)\text{cycle}}}{2.4l} \right) \Bigg|_{x_1=0.6l, x_2=0} \quad (2.59)$$

ここで、 $()^{\text{II}}|_{(i-1)\text{cycle}}$, $()^{\text{I}}|_{(i)\text{cycle}}$, $()^{\text{II}}|_{(i+1)\text{cycle}}$ は連続する3個の反転時釣合状態に属する量を表す。

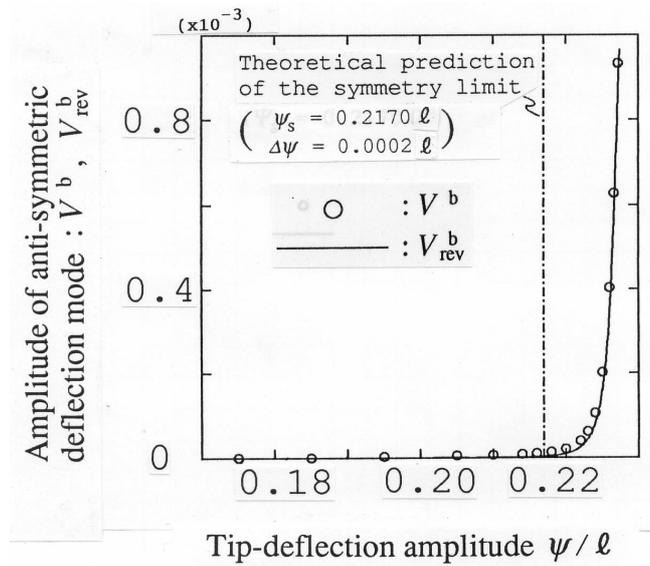


図 2.13 逆対称たわみ変形の推移

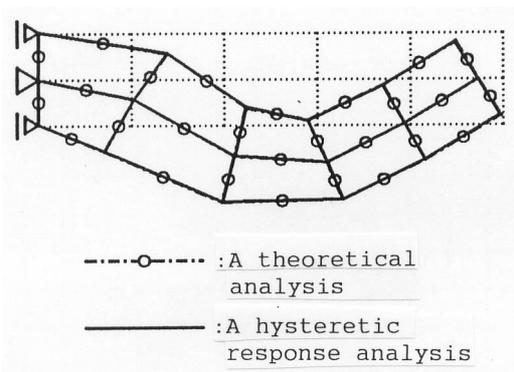


図 2.14 逆対称変形モ - ド

これに対して、同図中に引いた一点鎖線の位置に対応する ψ の値が上の理論解析で求めた対称限界振幅解である。 ψ_{\max} および ψ がこの値から離れるに連れて、 v^b も v_{rev}^b もともに急激に増大しており、この対称限界予測解により非対称定常状態への移行が的確に予測されている。

図 2.14 には逆対称変形モ - ドを比較した結果を示す。 $\psi_{\max} = 0.2274l$ の STIDAC プログラムに対して求めた収束後の定常状態に含まれる逆対称変形成分と、上の理論解析で求めた対称限界における A_1 に対応する固有ベクトルが表す変形モ - ドとを比較して示した。履歴挙動解析の変形図と理論解析のそれとは全く重なって一致しており、非対称定常状態へ

の移行に伴って生じる逆対称変形モードについても精度よく予測されている。

したがって、本章で提示した対称限界理論の正当性が例証された。

2.7 まとめ

本章では、以下の仮定が成立する場合に限定し、対称限界理論を初めて3次元連続体に拡張展開した。

交番塑性変形を生じない

滑らかな曲面を降伏条件とする完全弾塑性材料で構成される

1次元梁-柱モデルに対する理論と比べて特徴的な点は以下の通りである。

- (1) 1次元梁-柱に限らず、2次元、3次元連続体としてモデル化されるあらゆる種類の構造体に適用できる。
- (2) 両反転時応力点とも降伏曲面に達するシェイクダウン状態が存在する。この場合についても、構成則は、1次元連続体に対しての誘導の方針に従って同様にして導くことができる。
- (3) モデルの対称面に関して対称に一对の座標系を設け、この座標系を用いた定式化により、定常状態の対称成分と逆対称成分に関する方程式を組織的に導ける。

本理論の定式化の要点および特徴は以下のようにまとめられる。

- 1) 1次元梁-柱に対する理論と共通の考え方に従い、対称限界を定常状態経路の分岐点としてとらえ、定常状態だけに着目した定式化を行い、履歴挙動解析を全く行わずに対称限界を求める。
- 2) 3次元連続体に対しては多軸応力場の材料法則が適用されるが、シェイクダウン状態についての構成則は、単軸応力場に対して誘導したときの方針に従って、多軸応力場に対しても同様にして導き出すことができる。
- 3) 3次元連続体における対称成分と逆対称成分を新たに定義し、これらの成分に関する定常状態変化率方程式を導いた。これら2つの方程式は互いに連成せず、完全に分離される。対称限界条件は逆対称成分に関する方程式が非零解をもつ条件として導かれる。

更に、線形変位場有限要素からなる2次元梁-柱モデルについて、本理論解析による対称限界の予測解を履歴挙動解析結果と比較し、理論予測の妥当性を検証した。

参考文献

- [1] 中村恒善、上谷宏二、鋼片持梁-柱の繰り返し両振り塑性曲げ過程における不安定現象（その2：対称限界理論と定常状態限界理論）、日本建築学会大会学術講演梗概集（近畿）、pp.1159-1160、1980.
- [2] K. Uetani and T. Nakamura, Symmetry limit theory for cantilever beam-column

- subjected to cyclic reversed bending, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.31, pp.449-484, 1983.
- [3] K. Uetani, Uniqueness criterion for incremental variation of steady state and symmetry limit, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.37, pp.495-514, 1989.
- [4] 上谷宏二、繰り返し両振り曲げを受ける弾塑性梁-柱についての対称限界理論と定常状態限界理論、京都大学博士論文、第4章、第5章、1984.
- [5] 上谷宏二、中村恒善、繰り返し両振り曲げを受ける片持梁-柱についての定常状態限界理論(その1:基礎理論及び離散化モデルを用いた数値解析法)、日本建築学会構造系論文報告集、第438号、pp.105-115、1992.
- [6] 中村恒善、上谷宏二、完全両振り繰り返し曲げを受ける鋼片持梁-柱の対称限界解析法(その1:基礎理論)、日本建築学会大会学術講演梗概集(九州)、pp.2055-2056、1981.
- [7] 中村恒善、上谷宏二、以頭秀司、完全両振り繰り返し曲げを受ける鋼片持梁-柱の対称限界解析法(その2:1次元有限要素法による数値解析)、日本建築学会大会学術講演梗概集(九州)、pp.2057-2058、1981.
- [8] 中村恒善、上谷宏二、常岡次郎、繰り返し両振り曲げを受ける片持梁-柱の構面外変形発生機構と臨界点理論、日本建築学会大会学術講演梗概集(関東)、構造、pp.1077-1078、1988.
- [9] 上谷宏二、榊井健、繰り返し両振り曲げを受ける片持梁-柱の構面内挙動限界解析法、日本建築学会構造系論文報告集、第513号、pp.97-104、1998.
- [10] 上谷宏二、小林正実、交番塑性変形を受ける連続体の定常状態経路解析法(完全弾塑性体の解析)、日本建築学会大会学術講演梗概集(東北)、構造、pp.267-268、1989.
- [11] G. Maier, A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects, in: A. Sawczuk (Eds.), *Foundations of Plasticity*, Vol.1, Leyden, Noordhoff, pp.417-433, 1972.
- [12] J. A. Konig, *Shakedown of Elastic-Plastic Structures*, Elsevier, Amsterdam, 1987.
- [13] Q. S. Nguyen, G. Gary, and G. Baylac, Interaction buckling-progressive deformation, *Nucl. Engng. Des.*, Vol.75, pp.235-243, 1983.
- [14] D. Weichert, On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures, *Int. J. Plasticity*, Vol.2, pp.135-145, 1986.
- [15] J. Gross-Weege, A unified formulation of statical shakedown criteria for geometrically nonlinear problems, *Int. J. Plasticity*, Vol.6, pp.433-447, 1990.
- [16] H. Stumpf, Theoretical and computational aspects in the shakedown analysis of finite elastoplasticity, *Int. J. Plasticity*, Vol.9, pp.583-602, 1993.
- [17] C. Polizzotto, Shakedown and steady-state response of elastic-plastic solids in large displacements, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.33, pp.3415-3437, 1996.
- [18] 近藤一夫、花井正実、繰り返し変動荷重を受ける構造物の弾塑性解析、日本建築学会構造系論文報告集、第364号、pp.33-43、1986.

- [19] Y. Yokoo, T. Nakamura, and K. Uetani, The Incremental Perturbation Method for Large Displacement Analysis of Elastic-Plastic Structures, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.10, pp.503-525, 1976.

第3章 交番塑性領域における3次元連続体に対する定常状態経路解析法

3.1 序

シェイクダウン領域については、定常状態における残留塑性歪が一定であり、また、隣接定常状態に移行する過程で、降伏曲面上における応力点の移動距離が微小であり、単軸応力状態に対する理論と同様の方針に従って、構成則を誘導することができた。これに対して、交番塑性領域については、定常状態において残留塑性歪が変動し、また、隣接定常状態に移行する過程で、降伏曲面上における応力点の有限距離の移動が何回か繰り返される。このような場合に対して、刻々の応力状態に依存して、塑性歪変化率が定まる、塑性流れ法則から、定常状態の増分変化に対する構成則の誘導は極めて困難であり、陽な形で構成則は導けない。

交番塑性領域においては、定常状態において塑性変形過程が含まれるから、代表的釣合状態のみでなく、塑性変形過程の釣合経路全体に着目して、定常状態増分変化を解析する手続きが必要になってくると考えられる。このように定常状態釣合経路の増分変化の解析によって、定常状態の連続的变化を追跡する試みは、既往のいかなる研究においても行われていない。交番塑性領域については、まず、定常状態経路の増分解析に対して、新しい理論を構築することが必要である。また、それに基づいて、分岐点を予測する対称限界理論も、単軸応力状態に対する対称限界理論とは、全く異なる理論の組み立てとなる。

多軸応力状態における交番塑性挙動を扱った理論的研究として、A.R.S.Ponterらにより、古典的シェイクダウン理論における諸定理を交番塑性領域に対して拡張する試み[1,2]や、C.Polizzottoらにより、交番塑性定常状態(Plastic shakedown)に対して、種々の一般定理を誘導する試み[3~5]がなされている。しかし、これらの研究は、幾何学的非線形が全く考慮されておらず、幾何学的非線形が支配的な役割をする対称限界や定常状態限界などの臨界点の予測に直接適用することはできない。本論文では、これらの研究とも、本質的に全く異なる理論の構築を行う。

本章では、完全弾塑性材料で構成される3次元連続体に対して、交番塑性領域における定常状態経路を追跡するための理論解析法を提示する。本解析法においては、定常状態釣合経路の増分変化の扱いに関して、反転時の定常状態変数変化率を、残留塑性歪変化率で表しておき、反転時を出発点として反対側の反転時まで、釣合経路上のすべての時刻における定常状態変数変化率を、反転時残留塑性歪変化率で表していく増分解析法を定式化する。この定常状態釣合経路の増分変化の解析は、両反転点から履歴を遡る方向に行えば、弾性過程の釣合経路の解析を省くことができ、これを逆時間方向解析と名付け、その場合の定式化も示す。最後に、本理論による2次元有限要素梁-柱モデルについての数値解析例を示し、履歴挙動解析結果との比較による検証を行う。

次章において、本章の定常状態経路解析法に基づく、交番塑性領域における3次元連続体に対する対称限界理論を提示する。

3.2 解析モデルと基礎式

3.2.1 離散化法と基礎式

シェイクダウン領域については、離散化法を適用せずに、連続体としての一般的定式化によって、陽な形で支配方程式を導いた。交番塑性領域については、連続体のままでの定式化は困難であり、本章および次章では、図 3.1 に示すように、有限要素法を適用した離散化モデルに対する理論を展開する。

要素内変位場 \mathbf{u} は、 ϕ を形状関数として、節点変位ベクトル \mathbf{U} を用いて、次式のように表される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})\mathbf{U} \quad (3.1)$$

ここで、 \mathbf{x} は要素の変形前の座標である。

対応する節点力ベクトル \mathbf{F} は、応力ベクトルを $\boldsymbol{\sigma}$ 、歪ベクトルを $\boldsymbol{\varepsilon}$ として、仮想仕事式から、次のように定義される。

$$\mathbf{F} \delta \mathbf{U} = \int_{V_e} \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.2)$$

有限変形領域では、歪は変位の非線形関数であり、節点変位ベクトルを用いて次のように表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \quad (3.3)$$

仮想歪は仮想節点変位ベクトルを用いて次のように表される。

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{U}) \delta \mathbf{U} \quad (3.4)$$

(3.2)式に(3.4)式を代入して得られる仮想仕事式から、次のような釣合条件式が得られる。

$$\mathbf{F} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T(\mathbf{U}) \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.5)$$

以下では、変形の進行を表す時間パラメタ - を t とし、 t に関する変化率を prime で表し、 t に関する変化率についての関係式を導く。

(3.3)式を t で微分して、歪と変位の変化率関係式が得られる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{B}(\mathbf{U})\mathbf{U}' \quad (3.6)$$

(3.5)式を t で微分して、釣合式の変化率表現が得られる。

$$\mathbf{F}' = \int_{V_e} \{\mathbf{B}^T(\mathbf{U})\boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{B}'^T(\mathbf{U})\boldsymbol{\sigma}\} dV \quad (3.7)$$

右辺第 2 項を変形して、釣合式は次のように表現できる。

$$\mathbf{F}' = \int_{V_e} \{\mathbf{B}^T(\mathbf{U})\boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{U})\mathbf{U}'\} dV \quad (3.8)$$

ここで、 \mathbf{S} は幾何剛性マトリクスに対応する。

3.2.2 材料法則

モデルの構成材料は、2 章と同じく、完全弾塑性体であり、採用する材料法則も同じであ

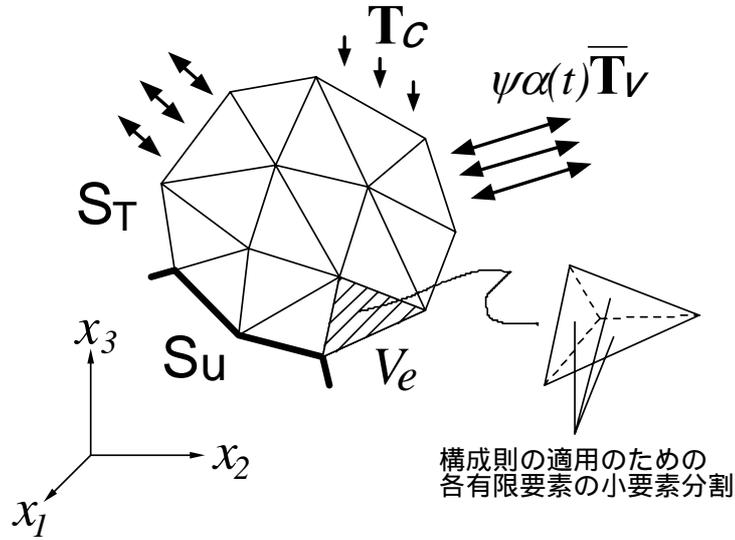


図 3.1 解析モデル

り、以下に列挙する。

$$\text{降伏条件: } f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (3.9)$$

$$\text{Hooke の法則: } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.10)$$

$$\text{関連流動則: } \boldsymbol{\varepsilon}^{p'} = \lambda \mathbf{n} \quad (3.11)$$

ここで、 \mathbf{n} は降伏曲面の外向き法線方向ベクトルであり、次式で表される。

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

(3.11)式において、要素が負荷過程をたどるか除荷過程をたどるかによって、 λ は次のような値をとる。

$$\lambda > 0 \quad \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}' = 0 \quad \text{for loading} \quad (3.12)$$

$$\lambda = 0 \quad \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}' < 0 \quad \text{for unloading} \quad (3.13)$$

(3.10)式を t で微分した式に(3.11)式を代入し、これを(3.12)式に代入する。これを、 λ について解き、 λ を $\boldsymbol{\varepsilon}'$ で表す。さらに、これを(3.11)式に代入し、負荷過程における塑性歪変化率と歪変化率の関係式が得られる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{p'} = \frac{\mathbf{nn}^T \mathbf{E}^T}{\mathbf{n}^T \mathbf{E} \mathbf{n}} \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (3.14)$$

上式を、(3.10)式を t で微分した式に代入し、整理して、負荷過程における応力歪関係式を導くことができる。これより、通常の釣合経路を追跡する際に用いる応力歪関係式が得られ、負荷過程と除荷過程のそれぞれについて、次のように表現できる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}' \quad (3.15)$$

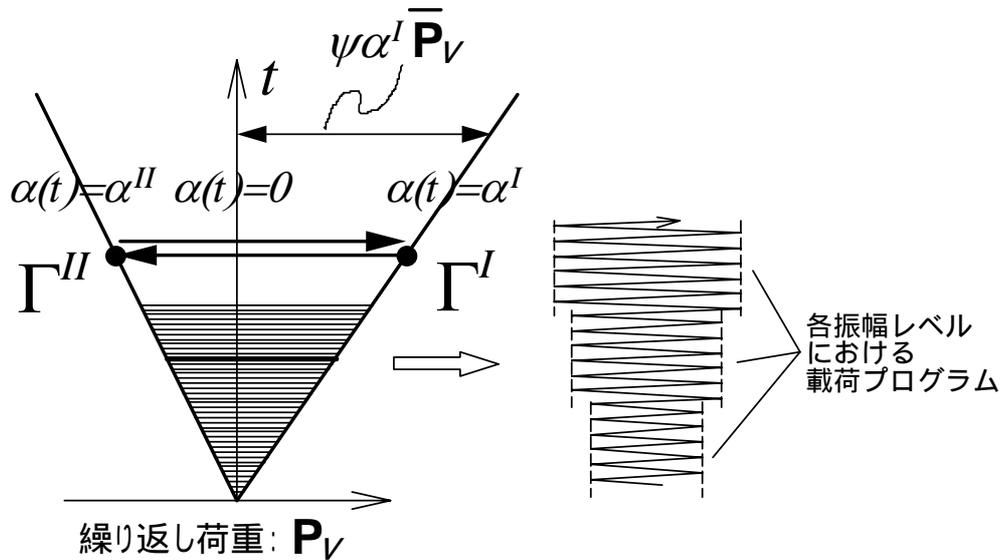


図 3.2 連続的振幅漸増繰り返し載荷プログラム

ここに、

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{E}^T}{\mathbf{n}^T \mathbf{E} \mathbf{n}} \quad \text{for loading}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} \quad \text{for unloading}$$

また、図 3.1 に示すように、各有限要素をさらに分割し、各小要素内で同一の構成則を適用する。

3.2.3 載荷条件

離散化モデルを扱うことに関連して、荷重についても、2 章とは若干異なる表現を用いる。

モデルの各節点では、節点変位 \mathbf{U} か節点力 \mathbf{F} のいずれかが指定されるが、これらの指定量に対応する自由度番号の成分として構成したベクトルを \mathbf{P} で表す。 \mathbf{P} は一定強制変位、一定外力による \mathbf{P}_C と繰り返し強制変位、繰り返し外力による \mathbf{P}_V とからなる。

\mathbf{P}_V は、図 3.2 に示すように、振幅を徐々に増加させ、各振幅レベルで変動する荷重パラメタ - を 1 つ含む比例載荷型の繰り返し荷重であり、次式のように表される。

$$\mathbf{P}_V = \psi \alpha(t) \bar{\mathbf{P}}_V \quad (3.16)$$

ここで、 ψ は荷重の振幅を表すパラメタ - である。完全両振りに限定せず、より一般的な繰り返し荷重を扱うために、 α を一方の反転時において α^I 、もう一方の反転時において α^{II} をとるものとし、両者の値の間を繰り返し変動する荷重パラメタ - とする。また、連続的振幅漸増繰り返し曲げプログラム COIDA と同様、各振幅レベルにおいて定常状態に収束するまで荷重を繰り返し作用させ、 ψ は微小量ずつ増加させる。

3.3 Prager の Kinematic model を用いた考察

本節では、Prager が考案した Kinematic model[6,7]を用いて、交番塑性定常状態を求める問題についての考察を行い、次節以降で展開される、交番塑性領域の定常状態経路解析の基本的な考え方を説明する。

図 3.3 に示す、軸力とねじりを受ける薄肉円筒部材のように、垂直応力 1 成分とせん断応力 1 成分の 2 成分の応力状態に対する Prager の Kinematic model を用いて説明する。モデルの概要は以下の通りである。

() 伸びひずみにヤング係数を乗じた値を横軸に、せん断ひずみにせん断弾性係数を乗じ $\sqrt{3}$ で除した値を縦軸とする座標系を考える。さらに、伸びひずみの塑性成分にヤング係数を乗じた値を横軸座標、せん断ひずみの塑性成分にせん断弾性係数を乗じ $\sqrt{3}$ で除した値を縦軸座標とする点を原点とし、上記の座標系に平行な、座標系を設定する。後者の座標系は、横軸が垂直応力で、縦軸がせん断応力を $\sqrt{3}$ で除したものとみなせる。

() von Mises の降伏曲面は、同図中に示すように、応力の座標系の原点を中心とする円で表される。

() 塑性流れ法則は、応力点が、円の外向きに動くときに、円との間に摩擦を生じずに、応力点における法線方向に円を動かすことに対応する。

このモデルを用いて、両振り繰り返し荷重の下での構造物の交番塑性挙動において典型的に見られる、同図中に示すような Γ^I, Γ^{II} を反転点とする歪経路が与えられたときに、対応する定常状態を求める問題を考える。

この問題における定常状態解の存在は、文献[8]と同様の手順で、降伏曲面の凸面性に基づいて、証明できる。交番塑性定常状態は、シェイクダウン状態とは異なり、載荷履歴には依存せず、定常状態における歪経路を指定すれば、一意に定まるという性質を持つ。

両反転点では、降伏しているから、 Γ^I, Γ^{II} における降伏曲面の中心は、歪反転点 $\varepsilon^I, \varepsilon^{II}$ から降伏応力(円の半径)の距離だけ離れた位置にあり、曲線 CL^I, CL^{II} 上にある。今、仮に、曲線 CL^I 上の C^I 点に中心を置く降伏曲面について、 Γ^I 反転点から、歪経路に沿って、1 サイクルする場合を考える。歪を表す点を B とする。点 B が、 Γ^I 反転点から、移動するとき、 ε_y^I で降伏し、以降は、点 B における円の法線方向に、円を引っ張っていき、 Γ^{II} 反転点に達したとき、降伏曲面の中心は、曲線 CL^{II} 上に来るが、この点を C^{II} 点とする。次いで、 Γ^{II} 反転点から、点 B が、反対方向に移動すると、 ε_y^{II} で降伏し、円を引っ張っていき、 Γ^I 反転点まで戻ってきたとき、降伏曲面の中心は、曲線 CL^I 上に来るが、必ずしも、出発点の C^I 点

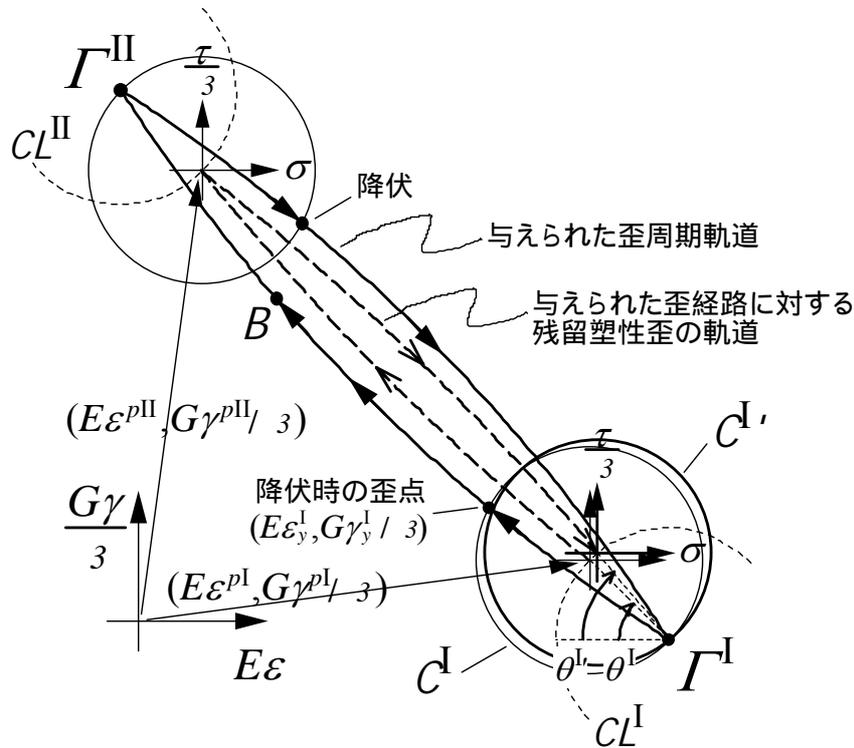


図 3.3 Prager の Kinematic model

に戻るとは限らず、このときの降伏曲面の中心を C^I 点とする。 C^I 点と C^{II} 点が一致する場合が、定常状態である。

したがって、次のような解析を行えば、この問題の定常状態を求めることができる。

- (1) 残留塑性歪（円の中心）を指定することによって、歪経路上の任意の点の応力状態は、一意に定まる。よって、残留塑性歪を未知量とする解法を考える。
- (2) 残留塑性歪（円の中心）が、指定された歪経路に沿って 1 サイクルした後、元の残留塑性歪（円の中心）と一致する条件により、交番塑性定常状態は特徴づけられる。
- (3) (2) から、交番塑性定常状態を求めるには、1 サイクルの歪経路に対する、残留塑性歪（円の中心）の変動を追跡する解析が必要である。この解析により、 Γ^I 反転点の残留塑性歪量、すなわち、曲線 CL^I 上の C^I 点の位置を表す量を θ^I として、 C^{II} 点の位置 θ^{II} を θ^I で表す。以下の方程式を解いて、 θ^I を求める。

$$\theta^{II} = \theta^I(\theta^I) \quad (3.17)$$

θ^l を求めることができれば、与えられた歪経路に対する定常状態解が求まる。

ここで問題となるのは、(3)で述べた残留塑性歪の変動の追跡をどうやって行うかである。塑性流れ法則から、塑性歪増分を求めようとしても、既知の応力状態からの増分でなければ陽な形で求められない。 θ^l を θ^l で表すには特別の工夫が必要となる。

一般の 3 次元連続体の交番塑性定常状態を求める解析においても、同様の困難を伴う。残留塑性歪の変動を求めるためには、釣合経路の解析が必要であるが、一方の反転時釣合状態から残留塑性歪の解析を始める場合、釣合経路増分解析の出発点である反転時釣合状態が既知ではない。したがって、通常の釣合経路増分解析法とは異なる新しい解析法が必要となる。また、シェイクダウン要素を含む場合、定常状態経路の増分解析を行わなければ、定常状態は求められないから、定常状態の増分変化を求める問題に対して、定常状態における残留塑性歪の変動を扱える解析法を展開しなければならない。これに対して、本論文では、次のような増分解析法を構築する。

- (1) まず、定常状態における反転時釣合状態について、状態変数の載荷振幅に関する変化率を、交番塑性 (P) 要素の残留塑性歪変化率で表しておく。
- (2) この反転時釣合状態を出発点として、釣合経路増分の載荷振幅に関する変化率を、未知量である P 要素の反転時残留塑性歪変化率で表す解析を行う。これを加え合わせていくことにより、定常状態釣合経路上のすべての時刻における、載荷振幅に関する状態変数変化率を、逐次、同様の形で表していく。これにより、定常状態において刻々変動する P 要素の残留塑性歪について、載荷振幅に関する変化率を、同様の形で表していくことができる。

形状や材料特性を表すパラメータを変数として、それに対する状態変数の変化率 (“感度”) を扱う感度解析の理論があるが、これを弾塑性問題に対して拡張する研究が、いくつかの論文[9-12]で行われている。本解析法においては、これと表現が類似しているところがある。しかし、本解析法は、弾塑性問題の感度解析の理論とは、目的も内容も全く異なる。残留塑性歪変化率が消去できないため、残留塑性歪変化率を未知量のまま扱い、それにより定常状態変数変化率を表していく解析を行うものである。

以上の考え方に基づいて、次節以降において、3.2 節の一般の 3 次元構造物モデルを対象として、交番塑性領域における定常状態経路解析法を展開する。

3.4 解析法の概要

本章で展開される交番塑性領域における定常状態経路解析法においても、1 つの定常状態から隣接する定常状態へ移行する履歴挙動の解析を行わず、定常状態だけに着目した定式

化を行う。

前章の基本仮定に関して、交番塑性領域においては、反転時以外の釣合状態にも着目した定式化を行うため、(CH1)に若干の修正を行い、次の基本仮定を導入する。(CH2)は、そのまま、採用する。

(PH1) 定常状態周期挙動における状態変数を $Q(\psi, \alpha)$ と表したとき、 $Q(\psi, \alpha)$ は単調増加量である荷重振幅 ψ に関する連続かつ区分的に偏微分可能な関数である。

線形化増分解析により、定常状態経路を追跡する。すなわち、載荷振幅 $\psi = \psi_0$ のときの定常状態変数 $Q|_{\psi_0}$ が既知であれば、 $Q|_{\psi_0 + \Delta\psi}$ を次式によって近似的に求める。

$$Q|_{\psi_0 + \Delta\psi} = Q|_{\psi_0} + \left. \frac{dQ}{d\psi} \right|_{\psi_0} \Delta\psi \quad (3.18)$$

以下において、載荷振幅 ψ に関する変化率を、 \dot{Q} のように dot で表す。

基本仮定 (CH2) によって、モデル内の各要素の定常周期挙動は前章図 2.4 に示した 4 つに分類され、本章の解析法においても、(a),(b),(c)については、前章で導いた構成則を採用する。また、以下において、前章図 2.4 における、(a),(b),(c),(d)それぞれの定常周期挙動を呈する要素を、それぞれ E 要素、C1 要素、C2 要素、P 要素と呼ぶ。

各振幅増分段階において、定常状態変数の変化率 \dot{Q} を求めるため、前節で述べた考え方に従い、以下の 3 段階の解析を行う。この 3 段階の解析の概要を、Prager の Kinematic model を用いて、図化したものを、図 3.4 に示す。

STAGE1：反転時釣合状態における定常状態変数変化率の残留塑性歪変化率による表現

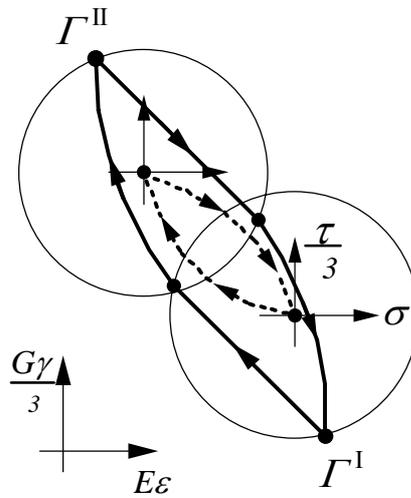
STAGE2 において、定常状態における P 要素の残留塑性歪の 1 サイクルの変動を追跡するため、まず、STAGE1 において、定常状態釣合経路上のいずれかの釣合状態に属する状態変数を P 要素の残留塑性歪により表現しておく。前章で、シェイクダウン要素の構成則が、反転時釣合状態に属する量により、導かれていることから、ここでも、反転時釣合状態に対して基礎式を書き、 ψ に関する変化率方程式を導く。これを解いて、次式に示すように、反転時における ψ に関する定常状態変数変化率 \dot{Q}^I, \dot{Q}^{II} を、P 要素の反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\epsilon}^{pI}, \dot{\epsilon}^{pII}$ で表す。

$$\dot{Q}^I = \dot{Q}^I + \bar{Q}^{I,I} \dot{\epsilon}^{pI} + \bar{Q}^{I,II} \dot{\epsilon}^{pII}, \quad \dot{Q}^{II} = \dot{Q}^{II} + \bar{Q}^{II,I} \dot{\epsilon}^{pI} + \bar{Q}^{II,II} \dot{\epsilon}^{pII} \quad (3.19)$$

ここで、シェイクダウン要素の構成則において両反転時に属する量が連成しているため、 \dot{Q}^I も \dot{Q}^{II} も、 $\dot{\epsilon}^{pI}$ と $\dot{\epsilon}^{pII}$ が連成した形となる。

STAGE2：定常状態釣合経路上の任意の釣合状態における状態変数変化率の増分解析

交番塑性定常状態の解析には、P 要素残留塑性歪の 1 サイクルの変動の追跡が必要である。ここでは、STAGE1 において、P 要素の残留塑性歪変化率 $\dot{\epsilon}^{pI}, \dot{\epsilon}^{pII}$ を未知量として含む形で



$\psi = \psi_0$ における既知の定常状態



既知の定常状態からの増分変化

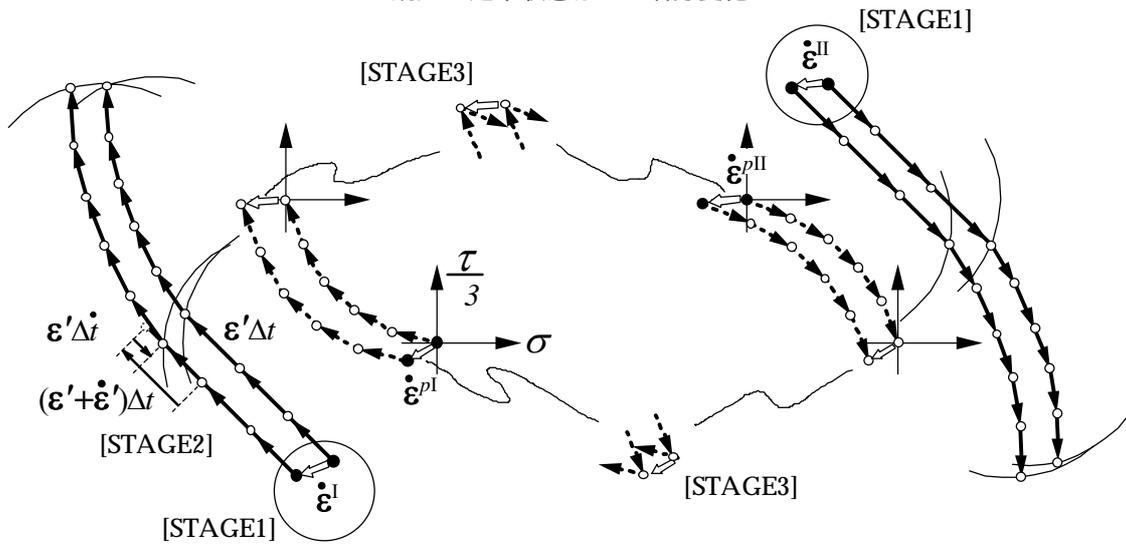


図 3.4 交番塑性定常状態の増分変化と 3 段階の解析の概要

表しておいた反転時釣合状態を出発点として、定常状態釣合経路上の任意の釣合状態における、状態変数の変化率を、未知量である $\dot{\varepsilon}^{pI}$, $\dot{\varepsilon}^{pII}$ を含む形で、逐次表していく増分解析を行う。

そのため、定常状態釣合経路を、線形増分関係式により近似し、隣接する 2 つの釣合状態における定常状態変数の関係式について、 ψ に関する変化率をとる。

$$\dot{\mathbf{Q}}|_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{Q}}|_t + \{\dot{\mathbf{Q}}'|_t \Delta t + \mathbf{Q}'|_t \Delta t\} \quad (3.20)$$

ここに、prime は、釣合経路パラメータ t に関する変化率を表す。

上式において、 Δt はあらかじめ十分小さい値に設定しておき、 \mathbf{Q}' は $\psi = \psi_0$ における値で評価する。 Δt は P 要素の降伏の時刻の変化を表す。

上式における、 $\dot{\mathbf{Q}}|_t$ が $\dot{\epsilon}^{pI}, \dot{\epsilon}^{pII}$ の 1 次式で表されていれば、 $\dot{\mathbf{Q}}'$ と Δt も、 $\dot{\epsilon}^{pI}, \dot{\epsilon}^{pII}$ の 1 次式で表せることを示す。したがって、 $\dot{\mathbf{Q}}|_{t+\Delta t}$ が $\dot{\epsilon}^{pI}, \dot{\epsilon}^{pII}$ の 1 次式の形で表され、 $\dot{\mathbf{Q}}$ を、定常状態釣合経路に沿って、未知量である $\dot{\epsilon}^{pI}, \dot{\epsilon}^{pII}$ の 1 次式の形で、逐次表していくことができる。

STAGE3：定常化条件

残留塑性歪の軌道が閉じる条件により、交番塑性定常状態は特徴づけられる。STAGE2 の増分解析を、一方の反転時釣合状態 Γ^μ ($\mu=I$ or II) から、反対側の反転時釣合状態 $\Gamma^{\mu\#}$ まで半サイクル行い、 $\Gamma^{\mu\#}$ における P 要素の残留塑性歪変化率を、 $\dot{\epsilon}^{pI}, \dot{\epsilon}^{pII}$ で表す。これが $\dot{\epsilon}^{p\mu\#}$ と等しいという下記の条件式を解いて、 $\dot{\epsilon}^{pI}, \dot{\epsilon}^{pII}$ を決定する。

$$\dot{\epsilon}^{pII} = \mathbf{h}^I + \mathbf{H}^{I,I} \dot{\epsilon}^{pI} + \mathbf{H}^{I,II} \dot{\epsilon}^{pII}, \quad \dot{\epsilon}^{pI} = \mathbf{h}^{II} + \mathbf{H}^{II,I} \dot{\epsilon}^{pI} + \mathbf{H}^{II,II} \dot{\epsilon}^{pII} \quad (3.21)$$

定常状態変数変化率 $\dot{\mathbf{Q}}$ は、STAGE2 までで、定常状態釣合経路上の任意の釣合状態において、すべて $\dot{\epsilon}^{pI}, \dot{\epsilon}^{pII}$ のみを未知量として含む形で表されているから、(3.21)式を解いて求めた $\dot{\epsilon}^{pI}, \dot{\epsilon}^{pII}$ を代入し、すべての定常状態変数変化率解が求まる。

次節で STAGE1 の部分を、3.6 節で STAGE2 の部分を、3.7 節で STAGE3 の部分を定式化する。3.8 節においては、STAGE2 の増分解析を両反転点から履歴を遡る方向に行う逆時間方向解析による定式化を示す。

3.5 反転時釣合状態における定常状態変数変化率

基礎式(3.3)式、(3.5)式を Γ^I, Γ^{II} 反転時釣合状態について書き、 ψ で微分して、変化率に関する対応する関係式が得られる。

歪変位関係式：

$$\dot{\epsilon}^I = \mathbf{B}(\mathbf{U}^I) \dot{\mathbf{U}}^I \quad (3.22a)$$

$$\dot{\epsilon}^{II} = \mathbf{B}(\mathbf{U}^{II}) \dot{\mathbf{U}}^{II} \quad (3.22b)$$

釣合条件式：

$$\dot{\mathbf{F}}^I = \int_{V_e} \{\mathbf{B}^T(\mathbf{U}^I) \dot{\sigma}^I + \mathbf{S}(\sigma^I, \mathbf{U}^I) \dot{\mathbf{U}}^I\} dV \quad (3.23a)$$

$$\dot{\mathbf{F}}^{II} = \int_{V_e} \{\mathbf{B}^T(\mathbf{U}^{II}) \dot{\sigma}^{II} + \mathbf{S}(\sigma^{II}, \mathbf{U}^{II}) \dot{\mathbf{U}}^{II}\} dV \quad (3.23b)$$

前章で導いた P 要素以外についての定常状態増分変化に対する反転時応力変化率と反転時歪変化率との関係式は次のように表現される。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^I = \mathbf{D}^{II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I + \mathbf{D}^{I,II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} \quad (3.24a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{II} = \mathbf{D}^{II,I} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I + \mathbf{D}^{II,II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} \quad (3.24b)$$

P 要素については、基礎式(3.10)式を Γ^I, Γ^{II} 反転時釣合状態について書き、 ψ で微分して、残留塑性歪が消去されていない、反転時応力変化率と反転時歪変化率の関係式を用いる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^I = \mathbf{E}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pI}) \quad (3.25a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{II} = \mathbf{E}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pII}) \quad (3.25b)$$

(3.24)式と(3.25)式をまとめて、定常状態増分変化に対する反転時応力変化率と反転時歪変化率の関係式を、次式のように表現する。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^I = \mathbf{D}^{II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I + \mathbf{D}^{I,II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} + \mathbf{D}^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pI} \quad (3.26a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{II} = \mathbf{D}^{II,I} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I + \mathbf{D}^{II,II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} + \mathbf{D}^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pII} \quad (3.26b)$$

ここに、

$$\text{P 要素に対して} \quad : \quad \mathbf{D}^p = \mathbf{E}$$

$$\text{P 要素以外に対して} : \quad \mathbf{D}^p = \mathbf{0}$$

(3.22)式を(3.26)式に代入して得られる式を、さらに釣合式(3.23)に代入して、要素に対する反転時定常状態変数の変化率方程式が得られる。

$$\mathbf{K}^{I,I} \dot{\mathbf{U}}^I + \mathbf{K}^{I,II} \dot{\mathbf{U}}^{II} = \dot{\mathbf{F}}^I + \sum_{i=1}^{L_e^I} \bar{\mathbf{F}}_i^I \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI} \quad (3.27a)$$

$$\mathbf{K}^{II,I} \dot{\mathbf{U}}^I + \mathbf{K}^{II,II} \dot{\mathbf{U}}^{II} = \dot{\mathbf{F}}^{II} + \sum_{i=1}^{L_e^{II}} \bar{\mathbf{F}}_i^{II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pII} \quad (3.27b)$$

ここに、

$$\mathbf{K}^{I,I} = \int_{V_e} \{ \mathbf{B}^T(\mathbf{U}^I) \mathbf{D}^{I,I} \mathbf{B}(\mathbf{U}^I) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^I, \mathbf{U}^I) \} dV, \quad \mathbf{K}^{I,II} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T(\mathbf{U}^I) \mathbf{D}^{I,II} \mathbf{B}(\mathbf{U}^{II}) dV,$$

$$\mathbf{K}^{II,I} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T(\mathbf{U}^{II}) \mathbf{D}^{II,I} \mathbf{B}(\mathbf{U}^I) dV, \quad \mathbf{K}^{II,II} = \int_{V_e} \{ \mathbf{B}^T(\mathbf{U}^{II}) \mathbf{D}^{II,II} \mathbf{B}(\mathbf{U}^{II}) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^{II}, \mathbf{U}^{II}) \} dV,$$

$$\bar{\mathbf{F}}_i^I = \int_{V_{pei}} \mathbf{B}^T(\mathbf{U}^I) \mathbf{D}^p dV, \quad \bar{\mathbf{F}}_i^{II} = \int_{V_{pei}} \mathbf{B}^T(\mathbf{U}^{II}) \mathbf{D}^p dV \quad (3.28)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{F}}_i^I$ および $\bar{\mathbf{F}}_i^{II}$ における積分は、有限要素内における各 P 要素に関して行う。 L_e^I は各有限要素ごとの P 要素の個数を示す。

(3.27)式を、全要素について重ね合わせることにより、全体系についての变化率方程式が得られる。

$$\mathbf{K}_G^{I,I} \dot{\mathbf{U}}_G^I + \mathbf{K}_G^{I,II} \dot{\mathbf{U}}_G^{II} = \dot{\mathbf{F}}_G^I + \bar{\mathbf{F}}_G^I \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} \quad (3.29a)$$

$$\mathbf{K}_G^{II,I} \dot{\mathbf{U}}_G^I + \mathbf{K}_G^{II,II} \dot{\mathbf{U}}_G^{II} = \dot{\mathbf{F}}_G^{II} + \bar{\mathbf{F}}_G^{II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII} \quad (3.29b)$$

ここに、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ は全体系における全 P 要素の反転時残留塑性歪変化率からなるベクトルを表す。

全体系の方程式(3.28)に境界条件を導入し解くことにより、反転時節点変位変化率を、P要素の反転時残留塑性歪変化率で表すことができる。

$$\dot{\mathbf{U}}_G^I = \dot{\mathbf{U}}_G^I + \bar{\mathbf{U}}_G^{I,I} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} + \bar{\mathbf{U}}_G^{I,II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}, \quad \dot{\mathbf{U}}_G^{II} = \dot{\mathbf{U}}_G^{II} + \bar{\mathbf{U}}_G^{II,I} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} + \bar{\mathbf{U}}_G^{II,II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII} \quad (3.30)$$

(3.30)式を(3.22)式に代入すれば、反転時歪変化率を $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ で表すことができ、これを、さらに、(3.26)式に代入すれば、反転時応力変化率を、 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}_G^{pII}$ で表すことができる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{I,I} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{I,II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II,I} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II,II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII} \quad (3.31)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^I = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^I + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{I,I} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{I,II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{II} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{II} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{II,I} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{II,II} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII} \quad (3.32)$$

したがって、反転時における定常状態変数について、 ψ に関する変化率を、P要素の反転時残留塑性歪変化率で表すことができた。

3.6 定常状態釣合経路上の任意の釣合状態における定常状態変数変化率の増分解析

3.6.1 定常状態釣合経路の増分表現とその荷重振幅に関する変化率

図 3.5 に示すように、一方の反転点からもう一方の反転点に向かう釣合経路を、線形増分関係式により近似する。

$$\int_{I^I \rightarrow I^{II}} \mathbf{Q}' dt = \sum_{m=1}^{M^I} \mathbf{Q}'^{I(m)} \Delta t^{I(m)} \quad (3.33a)$$

$$\int_{I^{II} \rightarrow I^I} \mathbf{Q}' dt = \sum_{m=1}^{M^{II}} \mathbf{Q}'^{II(m)} \Delta t^{II(m)} \quad (3.33b)$$

ここで、次式のように、釣合経路パラメータの第 m 項までの和と、その時刻における定常状態量を上添字(m)で表す。

$$t^{I(m)} = \sum_{k=1}^m \Delta t^{I(k)}, \quad t^{II(m)} = \sum_{k=1}^m \Delta t^{II(k)} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{Q}^{I(m)} = \sum_{k=1}^m \mathbf{Q}'^{I(k)} \Delta t^{I(k)}, \quad \mathbf{Q}^{II(m)} = \sum_{k=1}^m \mathbf{Q}'^{II(k)} \Delta t^{II(k)} \quad (3.35)$$

上記の表記を用いて、隣接する 2 つの時刻における定常状態量を関係づける式は次のようになる。

$$\mathbf{Q}^{I(m)} = \mathbf{Q}^{I(m-1)} + \mathbf{Q}'^{I(m)} \Delta t^{I(m)} \quad (3.36a)$$

$$\mathbf{Q}^{II(m)} = \mathbf{Q}^{II(m-1)} + \mathbf{Q}'^{II(m)} \Delta t^{II(m)} \quad (3.36b)$$

ψ についての変化率をとり、次式を得る。

$$\dot{\mathbf{Q}}^{I(m)} = \dot{\mathbf{Q}}^{I(m-1)} + \{\dot{\mathbf{Q}}'^{I(m)} \Delta t^{I(m)} + \mathbf{Q}'^{I(m)} \Delta t^{I(m)}\} \quad (3.37a)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}^{II(m)} = \dot{\mathbf{Q}}^{II(m-1)} + \{\dot{\mathbf{Q}}'^{II(m)} \Delta t^{II(m)} + \mathbf{Q}'^{II(m)} \Delta t^{II(m)}\} \quad (3.37b)$$

上式において、釣合経路パラメータ増分 $\Delta t^{I(m)}, \Delta t^{II(m)}$ は、3.6.3 で述べるように、 $\psi = \psi_0$ の既知の定常状態において要素の降伏の時刻が増分の切れ目となるように設定し、また、誤差の累積が大きくなるよう十分小さい値としておく。増分の切れ目の釣合状態における定常状態量 $\mathbf{Q}^{I(m)}, \mathbf{Q}^{II(m)}$ と t に関する変化率 $\mathbf{Q}'^{I(m)}, \mathbf{Q}'^{II(m)}$ も、 $\psi = \psi_0$ の既知の定常状態で評

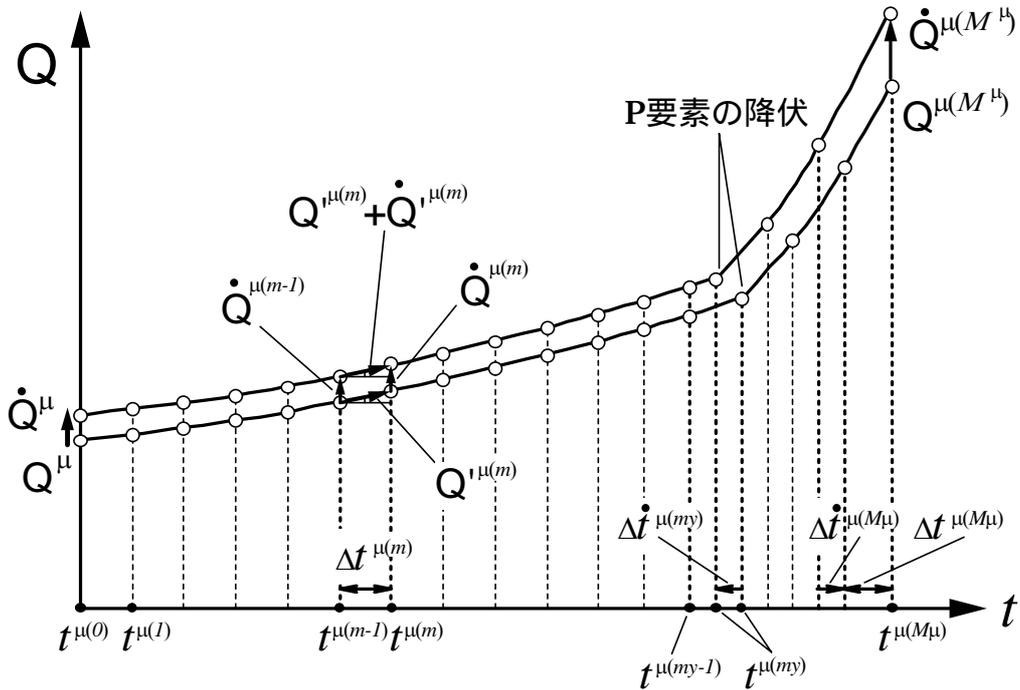


図 3.5 定常状態釣合経路の増分表現と荷重振幅の増加に対する変化

価する。次項以降で示すように、 $\dot{Q}^{I(m-1)}$, $\dot{Q}^{II(m-1)}$ が、P 要素の反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\epsilon}_G^{pI}$, $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ の 1 次式で表されていれば、 $\dot{Q}^{I(m)}$, $\dot{Q}^{II(m)}$ も、 $\Delta t^{I(m)}$, $\Delta t^{II(m)}$ も、 $\dot{\epsilon}_G^{pI}$, $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ の 1 次式で表すことができる。前節で示したように、反転時における定常状態変数変化率は、 $\dot{\epsilon}_G^{pI}$, $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ の 1 次式で表されているから、したがって、増分の切れ目の釣合状態における定常状態変数変化率 $\dot{Q}^{I(m)}$, $\dot{Q}^{II(m)}$ を、上式に基づいて、反対側の反転時釣合状態まで、未知量である $\dot{\epsilon}_G^{pI}$, $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ の 1 次式の形で、逐次表していくことができる。

次項において、 $\dot{Q}^{I(m)}$, $\dot{Q}^{II(m)}$ が、3.6.3 項において、 $\Delta t^{I(m)}$, $\Delta t^{II(m)}$ が、それぞれ $\dot{\epsilon}_G^{pI}$, $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ の 1 次式の形で表すことができることを示す。

3.6.2 定常状態変数の 2 つの経路パラメータに関する変化率

本項では、(3.37)式における、定常状態経路の経路パラメータである荷重振幅 ψ と釣合経路パラメータ t の 2 つの経路パラメータに関する定常状態変数の変化率 \dot{Q} が、未知量である P 要素の反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\epsilon}_G^{pI}$, $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ の 1 次式の形で表すことができることを示す。

今、STAGE2 の定常状態釣合経路に沿っての定常状態変数変化率の増分解析において、一方の反転点 Γ^μ ($\mu=I$ or II) を出発点として、第 $m-1$ 増分までの解析が終了しているものとし、第 m 増分における $\dot{Q}^{\mu(m)}$ の解析を考える。

基礎式(3.6)式、(3.8)式を、定常状態釣合経路上の時刻 $t^{\mu(m-1)}$ において書く。

$$\text{歪変位関係式：} \quad \epsilon^{\mu(m)} = \mathbf{B}(\mathbf{U}^{\mu(m-1)})\mathbf{U}^{\mu(m)} \quad (3.38)$$

$$\text{釣合条件式: } \mathbf{F}^{\mu(m)} = \int_{V_e} \{ \mathbf{B}^T (\mathbf{U}^{\mu(m-1)}) \boldsymbol{\sigma}^{\mu(m)} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m-1)}, \mathbf{U}^{\mu(m-1)}) \mathbf{U}^{\mu(m)} \} dV \quad (3.39)$$

定常状態において、P 要素以外は、弾性挙動する。P 要素については、時刻 t が、図 3.5 に示すように、着目している第 i 番 P 要素の降伏の時刻 $t^{\mu(m_i^{pl})}$ 以前では、弾性であり、 $t^{\mu(m_i^{pl})}$ に達して以後は負荷過程をたどるから、応力歪関係式は、次のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m)} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m-1)}) \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu(m)} \quad (3.40)$$

E 要素、C1 要素、C2 要素：

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} \quad (3.41a)$$

P 要素：

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} \quad \text{at } t < t^{\mu(m_i^{pl})} \quad (3.41b)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E} \mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m-1)}) \mathbf{n}^T (\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m-1)}) \mathbf{E}^T}{\mathbf{n}^T (\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m-1)}) \mathbf{E} \mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m-1)})} \quad \text{at } t \geq t^{\mu(m_i^{pl})} \quad (3.41c)$$

(3.38)式を(3.40)式に代入して得られる式を、さらに釣合式(3.39)に代入して、定常状態釣合経路上の時刻 $t^{\mu(m-1)}$ における、要素についての接線剛性関係式が得られる。

$$\mathbf{K}^{\mu(m-1)} \mathbf{U}^{\mu(m)} = \mathbf{F}^{\mu(m)} \quad (3.42)$$

ここに、

$$\mathbf{K}^{\mu(m-1)} = \int_{V_e} \{ \mathbf{B}^T (\mathbf{U}^{\mu(m-1)}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m-1)}) \mathbf{B}(\mathbf{U}^{\mu(m-1)}) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m-1)}, \mathbf{U}^{\mu(m-1)}) \} dV \quad (3.43)$$

(3.42)式を ψ で微分し、要素についての ψ と t に関する変化率方程式が得られる。

$$\mathbf{K}^{\mu(m-1)} \dot{\mathbf{U}}^{\mu(m)} = \dot{\mathbf{F}}^{\mu(m)} - \dot{\mathbf{K}}^{\mu(m-1)} \mathbf{U}^{\mu(m)} \quad (3.44)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}^{\mu(m-1)} = \int_{V_e} \{ & \dot{\mathbf{B}}^{\mu(m-1)T} \mathbf{D}^{\mu(m-1)} \mathbf{B}^{\mu(m-1)} + \mathbf{B}^{\mu(m-1)T} \dot{\mathbf{D}}^{\mu(m-1)} \mathbf{B}^{\mu(m-1)} + \mathbf{B}^{\mu(m-1)T} \mathbf{D}^{\mu(m-1)} \dot{\mathbf{B}}^{\mu(m-1)} \\ & + \dot{\mathbf{S}}^{\mu(m-1)} \} dV \end{aligned} \quad (3.45)$$

(3.44)式における右辺第 2 項は、 ψ と t の両方の経路パラメータに関する変化率を含まない項であり、以下において、この項が、P 要素の反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}$ の 1 次式の形で表されることを示す。

今、STAGE2 の増分解析において、第 $m-1$ 増分までの解析が終了しているから、第 $m-1$ 項までの増分の和を取ることににより、時刻 $t^{\mu(m-1)}$ における定常状態変数変化率は、次のように $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}$ の 1 次式で表されている。

$$\dot{\mathbf{U}}^{\mu(m-1)} = \dot{\hat{\mathbf{U}}}^{\mu(m-1)} + \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{U}}^{\mu(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.46a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu(m-1)} = \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^{\mu(m-1)} + \sum_{v=I,II} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.46b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu(m-1)} = \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mu(m-1)} + \sum_{v=I,II} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.46c)$$

P 要素:
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu(m-1)} = \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mu(m-1)} + \sum_{v=I,II} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.46d)$$

(3.45)式における $\dot{\mathbf{B}}^{\mu(m-1)}$, $\dot{\mathbf{D}}^{\mu(m-1)}$, $\dot{\mathbf{S}}^{\mu(m-1)}$ について、 \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{S} は \mathbf{U} , $\boldsymbol{\sigma}$ の関数であるから、 \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{S} の $\boldsymbol{\psi}$ に関する変化率は、微分法の Chain rule により、 \mathbf{U} , $\boldsymbol{\sigma}$ の $\boldsymbol{\psi}$ に関する変化率の 1 次形式となる。したがって、 $\dot{\mathbf{B}}^{\mu(m-1)}$, $\dot{\mathbf{D}}^{\mu(m-1)}$, $\dot{\mathbf{S}}^{\mu(m-1)}$ は、 $\dot{\mathbf{U}}^{\mu(m-1)}$, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu(m-1)}$ の 1 次形式であり、(3.46a)式、(3.46b)式を代入することにより、次式のように、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ で表わすことができる。

$$\dot{\mathbf{B}}^{\mu(m-1)} = \dot{\hat{\mathbf{B}}}^{\mu(m-1)} + \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{B}}^{\mu(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.47a)$$

$$\dot{\mathbf{D}}^{\mu(m-1)} = \dot{\hat{\mathbf{D}}}^{\mu(m-1)} + \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{D}}^{\mu(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.47b)$$

$$\dot{\mathbf{S}}^{\mu(m-1)} = \dot{\hat{\mathbf{S}}}^{\mu(m-1)} + \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{S}}^{\mu(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.47c)$$

よって、これらの式を、(3.45)式に代入して、 $\dot{\mathbf{K}}^{\mu(m-1)}$ も、次式のように、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ で表わすことができる。

$$\dot{\mathbf{K}}^{\mu(m-1)} = \dot{\hat{\mathbf{K}}}^{\mu(m-1)} + \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{K}}^{\mu(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.48)$$

したがって、(3.44)式における右辺第 2 項は、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ の 1 次式で表すことができるので、次のように表現する。

$$\dot{\mathbf{K}}^{\mu(m-1)} \mathbf{U}^{\mu(m)} = \dot{\hat{\mathbf{R}}}^{\mu(m-1)} + \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{R}}^{\mu(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.49)$$

要素についての変化率方程式(3.44)式は、次のようになる。

$$\mathbf{K}^{\mu(m-1)} \dot{\mathbf{U}}^{\mu(m)} = \dot{\mathbf{F}}^{\mu(m)} - \dot{\hat{\mathbf{R}}}^{\mu(m-1)} - \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{R}}^{\mu(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.50)$$

(3.50)式を、全要素について重ね合わせることにより、全体系についての変化率方程式が得られ、次のように表される。

$$\mathbf{K}_G^{\mu(m-1)} \dot{\mathbf{U}}_G^{\mu(m)} = \dot{\mathbf{F}}_G^{\mu(m)} - \dot{\hat{\mathbf{R}}}_G^{\mu(m-1)} - \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{R}}_G^{\mu(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.51)$$

この方程式に境界条件を導入し解くことにより、節点変位の $\boldsymbol{\psi}$ と t に関する変化率を、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ を未知量として含む形で表すことができ、次のようになる。

$$\dot{\mathbf{U}}_G^{\mu(m)} = \dot{\hat{\mathbf{U}}}_G^{\mu(m)} + \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{U}}_G^{\mu(m),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.52)$$

(3.38)式を $\boldsymbol{\psi}$ で微分した式に、(3.46a)式と(3.52)式を代入すれば、歪の $\boldsymbol{\psi}$ と t に関する変化率を $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ で表すことができる。さらに、(3.40)式を $\boldsymbol{\psi}$ で微分した式に、この歪の $\boldsymbol{\psi}$ と t に関する変化率の表現と、(3.47b)式とを代入すれば、同様に、応力の $\boldsymbol{\psi}$ と t に関する変化率を $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ で表すことができ、これらは次のように表現できる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu(m)} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu(m)} + \sum_{v=I,II} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu(m),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.53)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu(m)} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu(m)} + \sum_{v=I,II} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu(m),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.54)$$

また、P 要素においては、降伏の時刻 $t^{\mu(m_p)}$ 以降は、残留塑性歪が変動し、これの ψ と t に関する変化率は以下のようにして導く。

塑性歪変化率と歪変化率の関係式(3.14)式を、時刻 $t^{\mu(m-1)}$ において書き、 ψ で微分する。

(3.14)式における係数行列 $\frac{\mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{E}^T}{\mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{E} \mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma})}$ は、 $\boldsymbol{\sigma}$ の関数であるから、これの ψ に関する変化率は

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ の 1 次形式となる。よって、P 要素における残留塑性歪の ψ と t に関する変化率は、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu(m)}$ 、 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu(m-1)}$ の 1 次形式となり、(3.53)式と(3.46b)式を代入することにより、次式のように、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}$ 、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ で表わすことができる。

$$\text{P 要素：} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\mu(m)} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\mu(m)} + \sum_{v=I,II} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\mu(m),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad \text{at } t \geq t^{\mu(m_p)} \quad (3.55)$$

したがって、STAGE2 の定常状態釣合経路に沿っての定常状態変数変化率の増分解析において、任意の時刻における定常状態変数の ψ と t に関する変化率が、P 要素の反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}$ 、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ の 1 次式の形で表すことができた。

3.6.3 釣合経路パラメータ増分長の決定

STAGE2 の増分解析における、釣合経路パラメータ増分長は、以下のようにして決定する。

(1) $\Delta t^{I(m)}$ 、 $\Delta t^{II(m)}$

STAGE2 の解析における増分関係式(3.37)式において、 $\Delta t^{I(m)}$ 、 $\Delta t^{II(m)}$ は、 $\psi = \psi_0$ の既知の定常状態において、P 要素の降伏により、増分が打ち切られるよう、また、釣合経路の線形増分近似による誤差の蓄積が大きくならないよう、十分小さい値に、設定しておく。

(2) $\Delta t^{I(m)}$ 、 $\Delta t^{II(m)}$

(3.37)式における $\Delta t^{I(m)}$ 、 $\Delta t^{II(m)}$ は、以下の、 の要因に該当するもののみ、以下の手順により決定する。それ以外のものは 0 である。

以下において、 のそれぞれについて、 $\Delta t^{I(m)}$ 、 $\Delta t^{II(m)}$ が、未知量である P 要素の反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}$ 、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ の 1 次式の形で表されることを示す。

P 要素の降伏

P 要素の降伏の時刻は、荷重振幅の増加につれて、変化するので、釣合経路増分が正確に P 要素の降伏の時刻で打ち切られるように、 $\Delta t^{I(m)}$ 、 $\Delta t^{II(m)}$ を決定する。

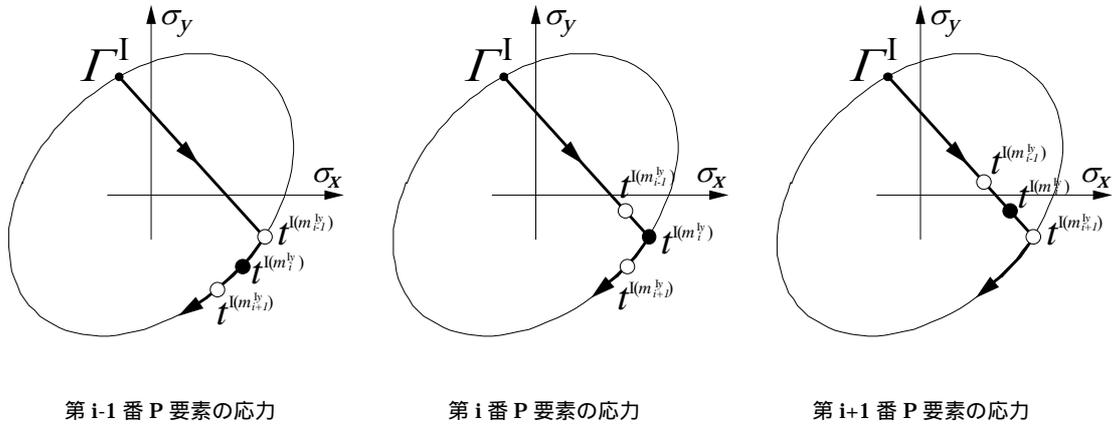


図 3.6 交番塑性要素の番号付け

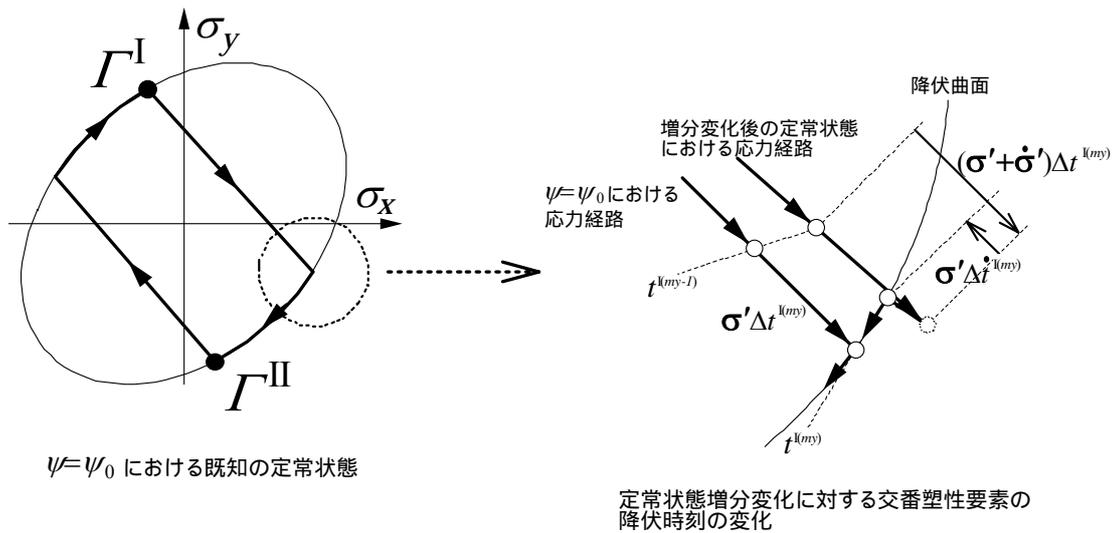


図 3.7 交番塑性要素の降伏時刻の変化

図 3.6 に示すように、反転点から定常状態釣合経路に沿って反対側の反転点まで、降伏する順に、P 要素に番号付けする。 Γ^μ 反転点 ($\mu=I$ or II) を出発点として i 番目に降伏する P 要素の降伏の時刻を $t^{\mu(m_i^{pl})}$ とする。第 i 番 P 要素の降伏によって、増分が打ち切られるよう、 $\Delta t^{\mu(m_i^{pl})}$ を決定する。

STAGE2 の Γ^μ 反転点 ($\mu=I$ or II) を出発点とする解析において、第 i 番 P 要素の降伏時刻直前の増分である第 m_i^{pl} 増分について、3.6.2 項における解析により、定常状態変数の ψ と t に関する変化率が、 $\dot{\epsilon}_G^{pl}$ 、 $\dot{\epsilon}_G^{pl}$ の 1 次式の形で表されているものとする。

第 i 番 P 要素において、降伏条件式(3.9)式を、時刻 $t^{\mu(m_i^{pl})}$ について書くと、次式のように

なる。

$$f(\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m_i^{\mu}-1)} + \boldsymbol{\sigma}'^{\mu(m_i^{\mu})} \Delta t_i^{\mu(m_i^{\mu})}) = 0 \quad (3.56)$$

(3.56)式を ψ で微分すると、次式のようになる。

$$\mathbf{n}^T(\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m_i^{\mu})}) \{ \boldsymbol{\sigma}^{\mu(m_i^{\mu}-1)} + \boldsymbol{\sigma}'^{\mu(m_i^{\mu})} \Delta t_i^{\mu(m_i^{\mu})} + \boldsymbol{\sigma}''^{\mu(m_i^{\mu})} \Delta t_i^{\mu(m_i^{\mu})} \} = 0 \quad (3.57)$$

(3.57)式に、(3.46b)式と(3.54)式を代入し、 $\Delta t_i^{\mu(m_i^{\mu})}$ について解けば、次式のように、 $\Delta t_i^{\mu(m_i^{\mu})}$ を $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ で表すことができる。

$$\Delta t_i^{\mu(m_i^{\mu})} = \dot{\Delta t}_i^{\mu(m_i^{\mu})} + \sum_{v=I,II} \Delta \bar{t}^{\mu(m_i^{\mu}),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.58)$$

載荷プログラムの反転

$\Delta t^{\mu(m)}$ ($\mu=I$ or II) は、 $\psi=\psi_0$ の既知の定常状態において、全増分長を加えた時刻 $t^{\mu(M^{\mu})} = \sum_{k=1}^{M^{\mu}} \Delta t^{\mu(k)}$ において、反対側の反転点に達するように、設定している。よって、 ψ により、全増分長が変化した分、最終増分の増分長の ψ に関する変化率を、以下のようにおき、最終増分を加えた時刻において、反対側の反転点に達するように調整する。

$$\Delta t^{\mu(M^{\mu})} = - \sum_{k=1}^{M^{\mu}-1} \Delta t^{\mu(k)} \quad (3.59)$$

$\Delta t^{\mu(m)}$ ($m=1, \dots, M^{\mu}-1$) は、 ψ において $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ の 1 次式で表されているから、 $\Delta t^{\mu(M^{\mu})}$ も、次のように、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ の 1 次式で表される。

$$\Delta t^{\mu(M^{\mu})} = \dot{\Delta t}_i^{\mu(M^{\mu})} + \sum_{v=I,II} \Delta \bar{t}_i^{\mu(M^{\mu}),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.60)$$

したがって、STAGE2 の定常状態釣合経路に沿っての定常状態変数変化率の増分解析において、釣合経路パラメータ増分の ψ に関する変化率も、P 要素の反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ の 1 次式の形で表すことができた。

3.6.4 釣合経路増分の加え合せ

(3.37)式を、節点変位、応力、歪、残留塑性歪について書くと、それぞれ、次のようになる。

$$\dot{\mathbf{U}}^{\mu(m)} = \dot{\mathbf{U}}^{\mu(m-1)} + \{ \dot{\mathbf{U}}'^{\mu(m)} \Delta t^{\mu(m)} + \mathbf{U}''^{\mu(m)} \Delta t^{\mu(m)} \} \quad (3.61a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu(m)} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu(m-1)} + \{ \dot{\boldsymbol{\sigma}}'^{\mu(m)} \Delta t^{\mu(m)} + \boldsymbol{\sigma}''^{\mu(m)} \Delta t^{\mu(m)} \} \quad (3.61b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu(m)} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu(m-1)} + \{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'^{\mu(m)} \Delta t^{\mu(m)} + \boldsymbol{\varepsilon}''^{\mu(m)} \Delta t^{\mu(m)} \} \quad (3.61c)$$

$$\text{P 要素: } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\mu(m)} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\mu(m-1)} + \{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'^{p\mu(m)} \Delta t^{\mu(m)} + \boldsymbol{\varepsilon}''^{p\mu(m)} \Delta t^{\mu(m)} \} \quad (3.61d)$$

(3.61a)式 ~ (3.61d)式の右辺における、 ψ に関する変化率は、(3.46a)式 ~ (3.46d)式、(3.52)式 ~ (3.55)式、(3.58)式、(3.60)式において、いずれも $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ の 1 次式で表されているから、

これらの式を、(3.61a)式～(3.61d)式の右辺に代入し、整理すれば、 $\dot{\epsilon}_G^{pI}, \dot{\epsilon}_G^{pII}$ の1次式の形で表すことができる。よって、第 m 増分を加え合わせた時刻 $t^{\mu(m)}$ における定常状態変数変化率も、節点変位、応力、歪、残留塑性歪、それぞれについて、次のように、未知量である $\dot{\epsilon}_G^{pI}, \dot{\epsilon}_G^{pII}$ の1次式の形で表すことができる。

$$\dot{U}^{\mu(m)} = \hat{U}^{\mu(m)} + \sum_{v=I,II} \bar{U}^{\mu(m),v} \dot{\epsilon}_G^{pv} \quad (3.62a)$$

$$\dot{\sigma}^{\mu(m)} = \hat{\sigma}^{\mu(m)} + \sum_{v=I,II} \bar{\sigma}^{\mu(m),v} \dot{\epsilon}_G^{pv} \quad (3.62b)$$

$$\dot{\epsilon}^{\mu(m)} = \hat{\epsilon}^{\mu(m)} + \sum_{v=I,II} \bar{\epsilon}^{\mu(m),v} \dot{\epsilon}_G^{pv} \quad (3.62c)$$

P 要素：
$$\dot{\epsilon}^{p\mu(m)} = \hat{\epsilon}^{p\mu(m)} + \sum_{v=I,II} \bar{\epsilon}^{p\mu(m),v} \dot{\epsilon}_G^{pv} \quad (3.62d)$$

したがって、以上の増分解析を一方の反転点からもう一方の反転点まで行うことにより、定常状態釣合経路上の任意の釣合状態における定常状態変数変化率を、すべて P 要素の反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\epsilon}_G^{pI}, \dot{\epsilon}_G^{pII}$ のみを未知量として含む1次式の形で表すことができる。

3.7 定常化条件

前節までの解析により、定常状態釣合経路上の任意の釣合状態における、定常状態変数の変化率が、すべて P 要素の反転時残留塑性歪変化率のみを未知量として含む形で表されている。本節では、交番塑性定常状態を特徴づける条件を導き、これを解いて、未知量のまま残している P 要素の反転時残留塑性歪変化率を決定し、定常状態変数変化率解が求まることを示す。

交番塑性定常状態は、残留塑性歪の軌道が閉じる条件により、特徴づけられる。定常状態の増分変化に対して、この条件は、以下のようにして導かれる。

STAGE2 の増分解析を、一方の反転時釣合状態 Γ^μ ($\mu=I$ or II) から、反対側の反転時釣合状態 $\Gamma^{\mu\#}$ まで半サイクル行う。

Γ^μ 反転点から第 i 番に降伏する P 要素の残留塑性歪について、増分関係式(3.37)式を、 Γ^μ 反転点から $\Gamma^{\mu\#}$ 反転点まで、弾性過程では変動しないことを反映させて、適用すれば、次のようになる。

$$\dot{\epsilon}_i^{pI(M^I)} = \dot{\epsilon}_i^{pI} + \sum_{k=m_i^I+1}^{M^I} \{ \dot{\epsilon}_i^{p'I(k)} \Delta t^{I(k)} + \epsilon_i^{p'I(k)} \dot{\Delta t}^{I(k)} \} \quad (3.63a)$$

$$\dot{\epsilon}_i^{pII(M^{II})} = \dot{\epsilon}_i^{pII} + \sum_{k=m_i^{II}+1}^{M^{II}} \{ \dot{\epsilon}_i^{p'II(k)} \Delta t^{II(k)} + \epsilon_i^{p'II(k)} \dot{\Delta t}^{II(k)} \} \quad (3.63b)$$

(3.63)式に、(3.55)式と、(3.58)式、(3.60)式を代入し、整理すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI(M^I)} &= \sum_{k=m_i^{M^I}+1}^{M^I} \{ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI(k)} \Delta t^{I(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{pI(k)} \hat{\Delta t}^{I(k)} \} \\ &+ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI} + \sum_{v=I,II} \sum_{k=m_i^{M^I}+1}^{M^I} \{ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pI(k),v} \Delta t^{I(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{pI(k)} \Delta \bar{t}_i^{-I(k),v} \} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \end{aligned} \quad (3.64a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pII(M^{II})} &= \sum_{k=m_i^{M^{II}}+1}^{M^{II}} \{ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pII(k)} \Delta t^{II(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{pII(k)} \hat{\Delta t}^{II(k)} \} \\ &+ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pII} + \sum_{v=I,II} \sum_{k=m_i^{M^{II}}+1}^{M^{II}} \{ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pII(k),v} \Delta t^{II(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{pII(k)} \Delta \bar{t}_i^{-II(k),v} \} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \end{aligned} \quad (3.64b)$$

よって、反対側の反転時における第 i 番 P 要素の残留塑性歪変化率を、両反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ で表わすことができ、(3.64)式は $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ を含む項と含まない項に分けて、次のように書ける。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI(M^I)} = \mathbf{h}_i^I + \sum_{v=I,II} \mathbf{H}_i^{I,v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.65a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pII(M^{II})} = \mathbf{h}_i^{II} + \sum_{v=I,II} \mathbf{H}_i^{II,v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.65b)$$

図 3.4 において示されているように、残留塑性歪の軌道が閉じるには、STAGE2 の増分解析において、定常状態釣合経路に沿って、残留塑性歪の定常状態増分変化を追跡していったものが、反対側の反転時における残留塑性歪変化率と等しくなければならない。したがって、定常状態である条件として、次式が成り立たなければならない。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pII} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI(M^I)} = \mathbf{h}_i^I + \sum_{v=I,II} \mathbf{H}_i^{I,v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.66a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pII(M^{II})} = \mathbf{h}_i^{II} + \sum_{v=I,II} \mathbf{H}_i^{II,v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.66b)$$

(3.66a)式、(3.66b)式を、すべての P 要素について、まとめて、次のように表現する。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII} = \mathbf{h}_G^I + \sum_{v=I,II} \mathbf{H}_G^{I,v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.67a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} = \mathbf{h}_G^{II} + \sum_{v=I,II} \mathbf{H}_G^{II,v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.67b)$$

(3.67a)式、(3.67b)式が、交番塑性定常状態を特徴づける、反転時における P 要素の残留塑性歪変化率についての関係式である。

(3.67a)式、(3.67b)式において $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ 以外の量は既知量であり、これを解くことにより、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ を決定することができる。

3.6.4 項で示したように、定常状態変数変化率は、STAGE2 までで、定常状態釣合経路上の任意の釣合状態において、すべて $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ のみを未知量として含む形で表されているから、(3.67a)式、(3.67b)式の解を代入することにより、すべての定常状態変数変化率解が求まる。

よって、(3.18)式に基づいて、定常状態変数増分を加え合わせていくことにより、定常状

態経路を追跡することができる。

3.8 逆時間方向釣合経路解析による定式化

STAGE2 の増分解析は、定常状態における残留塑性歪の変動を解析することが目的であり、両反転点から履歴を遡る方向（逆時間方向）に行えば、全 P 要素が弾性過程となる区間の釣合経路の解析を省くことができる。特に、交番塑性領域に移行して直後は、P 要素が塑性変形過程をたどる釣合経路が短いから、計算時間の大幅な短縮になる。

このように、STAGE2 の増分解析を履歴を遡る方向へ行う場合を、逆時間方向釣合経路解析と呼び、本節では、この場合の定式化を行う。前節までの定式化における、履歴の進行方向に行う増分解析を、順方向釣合経路解析と呼び、区別する。

逆時間方向釣合経路解析による場合も、前節までと同様に、STAGE1～3 の 3 段階の解析により、定常状態経路増分を求める。この 3 段階の解析の概要を、図 3.8 に示す。

STAGE1 は、順方向釣合経路解析の場合と全く同じ解析を行う。

STAGE2 において、逆時間方向へ増分解析する場合、まず、全 P 要素において、負荷過程の応力歪関係式を用いて、反転点から、増分解析していく。P 要素における降伏は、降伏条件ではなく、残留塑性歪がその直近の除荷時、すなわち反対側の反転時と等しい条件によって、特徴づけられる。この条件によって、P 要素の降伏の時刻を決定し、降伏の時刻以降は、弾性過程の応力歪関係式を用いて、増分解析していき、全 P 要素が降伏の時刻に達するまで、解析を行う。

STAGE3 において、定常化条件のうち P 要素の降伏時刻の決定に用いた以外の式と降伏条件から、反転時における P 要素残留塑性歪変化率を決定する。

よって、STAGE2 と STAGE3 の定式化に違いがあり、3.8.1 項で、STAGE2 について、3.8.2 項で STAGE3 について、詳細を述べる。

3.8.1 定常状態釣合経路上の任意の釣合状態における定常状態変数変化率の逆時間方向増分解析

(1) 定常状態釣合経路の逆時間方向への増分関係式とその荷重振幅に関する変化率

図 3.9 に示すように、弾性過程の釣合経路を除いて、一方の反転点から、時間を遡る方向にたどり、全 P 要素が降伏曲面から離れる時刻 $t^{\mu(m)_{L^p}}$ ($\mu=I$ or II) までの釣合経路を解析対象とし、これを線形増分関係式により近似し、次のように表現する。

$$\int_{t^I \rightarrow t^{\mu(m)_{L^p}}} Q' dt = \sum_{m=1}^{M^{pI}} Q'^{I(m)} \Delta t^{I(m)} \quad (3.68a)$$

$$\int_{t^{II} \rightarrow t^{\mu(m)_{L^p}}} Q' dt = \sum_{m=1}^{M^{pII}} Q'^{II(m)} \Delta t^{II(m)} \quad (3.68b)$$

ここに、 L^p は全体系における全 P 要素の個数を示す。

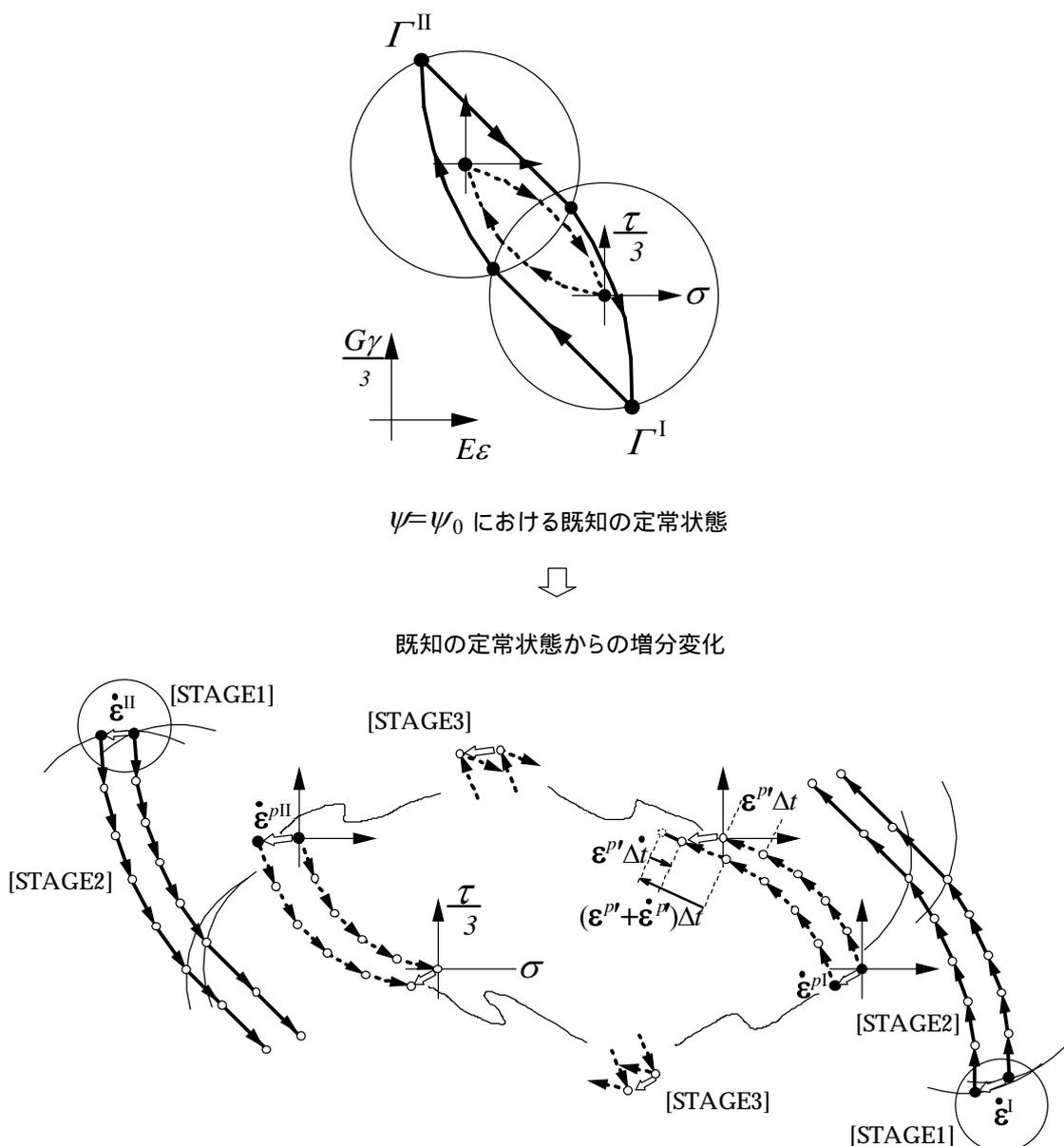


図 3.8 逆時間方向解析による定常状態増分変化の解析の概要

本節でも、(3.34)式、(3.35)式の表記を用いる。隣接する時刻の定常状態量の関係式とその ψ に関する変化率は、(3.36)式、(3.37)式と同じ表現となる。

以下において、(3.37)式における、 $\dot{Q}^{I(m)}$ 、 $\dot{Q}^{II(m)}$ 、および、 $\Delta t^{I(m)}$ 、 $\Delta t^{II(m)}$ が、それぞれ $\dot{\varepsilon}_G^{pI}$ 、 $\dot{\varepsilon}_G^{pII}$ の 1 次式の形で表すことができることを示す。

(2) 定常状態変数の 2 つの経路パラメータに関する変化率

逆時間方向に釣合経路を追跡していく場合、P 要素については、出発点の反転点から、降伏の時刻 $t^{\mu(m_i^{ps})}$ までが、負荷過程の釣合経路であり、 $t^{\mu(m_i^{ps})}$ 以後が弾性挙動する釣合経路であ

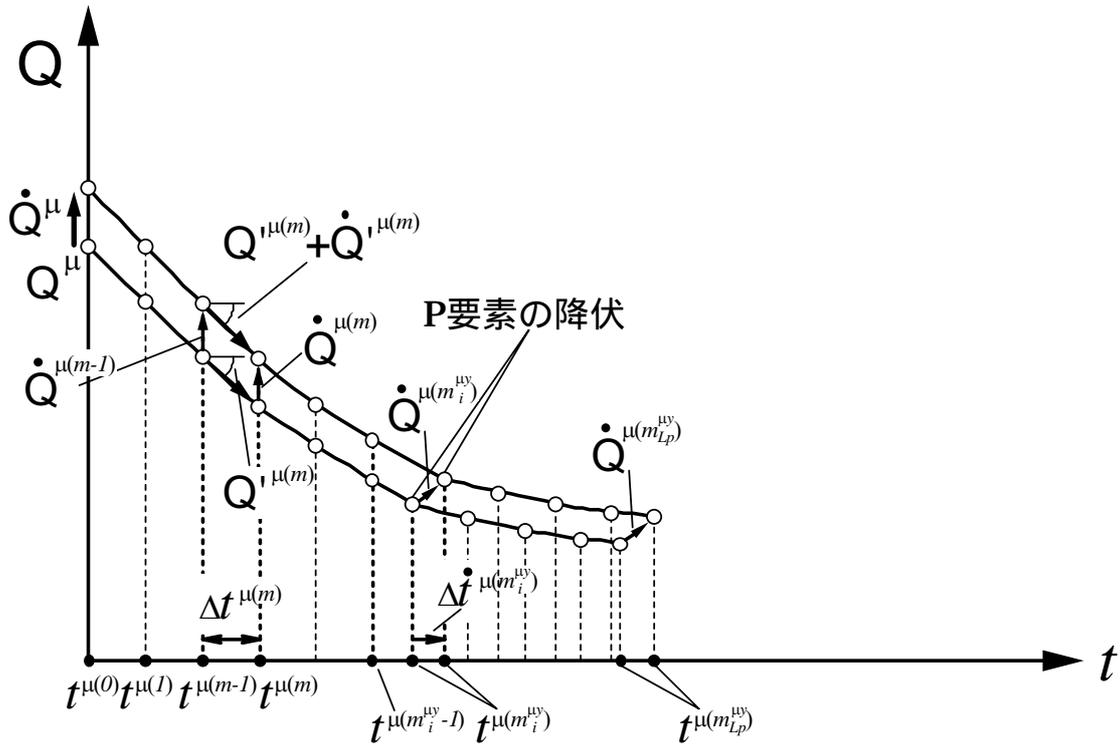


図 3.9 逆時間方向解析における定常状態釣合経路の増分表現と荷重振幅の増加に対する変化

る。よって、応力歪関係式(3.40)式における係数行列 \mathbf{D} は、次のようになる。

$$\text{P要素:} \quad \mathbf{D} = \frac{\mathbf{En}(\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m-1)})\mathbf{n}^T(\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m-1)})\mathbf{E}^T}{\mathbf{n}^T(\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m-1)})\mathbf{En}(\boldsymbol{\sigma}^{\mu(m-1)})} \quad \text{at } t < t^{\mu(m_i^{wy})} \quad (3.69a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} \quad \text{at } t \geq t^{\mu(m_i^{wy})} \quad (3.69b)$$

P要素の応力歪関係式として(3.69a)式、(3.69b)式を用いて、(3.42)式の接線剛性関係式を構築する。

荷重の表現については、逆時間方向であるから、荷重の向きが逆になるが、時間の進行方向も逆向きであるから、荷重ベクトルの t に関する変化率は順方向と同一となる。

以降の、定常状態変数変化率の釣合経路パラメータ t に関する変化率 \dot{Q}' の解析の手続きは、3.6.2 項と同様である。すなわち、第 $m-1$ 増分までの解析により、時刻 $t^{\mu(m-1)}$ における定常状態変数変化率 $\dot{Q}^{I(m-1)}$, $\dot{Q}^{II(m-1)}$ が、(3.46a)式 ~ (3.46d)式のように、P要素反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\epsilon}_G^{pl}$, $\dot{\epsilon}_G^{pll}$ の1次式で表されているとする。すると、接線剛性関係式(3.42)式の ψ に関する変化率を、(3.50)式のように表すことができ、これを全要素で重ね合わせた全体系の方程式(3.51)式を解いて、第 m 増分における節点変位ベクトルの ψ と t に関する変化率が(3.52)式のように、 $\dot{\epsilon}_G^{pl}$, $\dot{\epsilon}_G^{pll}$ の1次式の形で表すことができ、その他の定常状態変数の ψ と t に関する変化率も、(3.53)式 ~ (3.55)式のように表せる。

(3) 釣合経路パラメータ増分長の決定

釣合経路パラメータ増分の ψ に関する変化率 $\Delta t^{I(m)}, \Delta t^{II(m)}$ は、3.6.3(2)と同様、P要素の降伏の時刻で増分が打ち切られるように決定する。

順方向釣合経路解析と異なり、逆時間方向解析の場合、降伏の時刻以前は、P要素は負荷過程を進行しているため、降伏の時刻は、降伏条件ではなく、残留塑性歪が直近の除荷時すなわち反対側の反転時と等しい条件によって、特徴づけられる。よって、逆時間方向解析の場合には、順方向の定式化における、STAGE3の定常化条件の一部を、降伏の時刻の決定に用い、次項で述べるように、降伏条件は、STAGE3におけるP要素の反転時残留塑性歪変化率を決定する際に用いる。

図3.10に示すように、反転時から逆時間方向に降伏時刻に達する順に、すなわち、順方向の場合とは逆の順番に、P要素に番号付けする。 Γ^μ 反転点($\mu=I$ or II)を出発点として逆時間方向に i 番目に降伏時刻に到達するP要素の降伏時刻を $t^{\mu(m_i^{\psi})}$ とする。第 i 番P要素の降伏の時刻への到達によって、増分が打ち切られるよう、 $\Delta t^{\mu(m_i^{\psi})}$ を決定する。

STAGE2の解析の Γ^μ 反転点($\mu=I$ or II)を出発点とする第 m_i^{ψ} 増分について、(2)における解析により、定常状態変数の ψ と t に関する変化率が、 $\dot{\epsilon}_G^{pI}, \dot{\epsilon}_G^{pII}$ の1次式の形で表されているものとする。

P要素の降伏は、残留塑性歪が反対側の反転時と等しい条件によって、特徴づけられる。第 i 番P要素の降伏の時刻 $t^{\mu(m_i^{\psi})}$ を特徴づける条件は、次式ようになる。

$$\epsilon_i^{p\mu(m_i^{\psi}-1)} + \epsilon_i^{p\mu(m_i^{\psi})} \Delta t^{\mu(m_i^{\psi})} = \epsilon_i^{p\mu\#} \quad (3.70)$$

(3.70)式を ψ で微分すると、次式ようになる。

$$\dot{\epsilon}_i^{p\mu(m_i^{\psi}-1)} + \dot{\epsilon}_i^{p\mu(m_i^{\psi})} \Delta t^{\mu(m_i^{\psi})} + \epsilon_i^{p\mu(m_i^{\psi})} \Delta \dot{t}^{\mu(m_i^{\psi})} = \dot{\epsilon}_i^{p\mu\#} \quad (3.71)$$

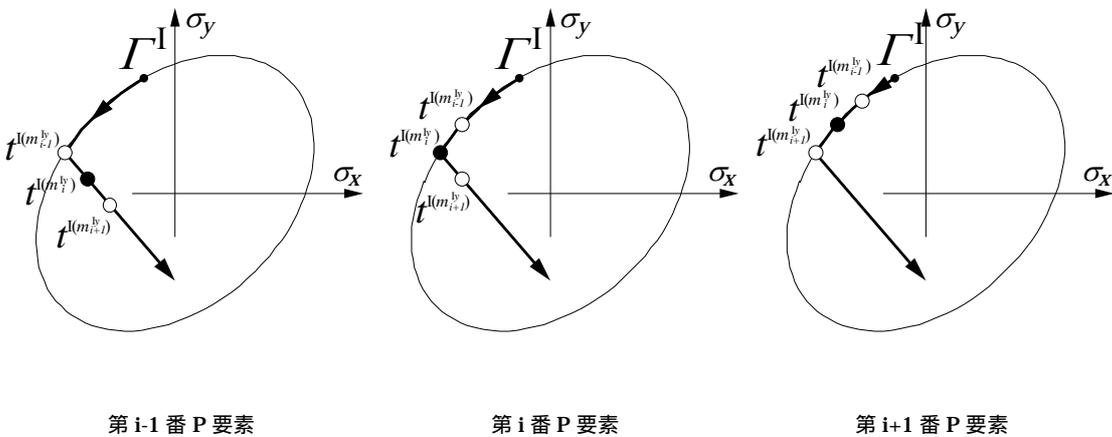


図3.10 逆時間方向解析による場合の交番塑性要素の番号付け

(3.71)式に、(3.46d)式と(3.55)式を代入すると、次式ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\mu(m_i^{\mu})} \Delta t^{\mu(m_i^{\mu})} &= -\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\mu(m_i^{\mu}-1)} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\mu(m_i^{\mu})} \Delta t^{\mu(m_i^{\mu})} \\ &+ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\mu\#} - \sum_{v=I,II} \left\{ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\mu(m_i^{\mu}-1),v} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\mu(m_i^{\mu}),v} \Delta t^{\mu(m_i^{\mu})} \right\} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \end{aligned} \quad (3.72)$$

6成分からなる(3.72)式のうちの1式を、 $\Delta t^{\mu(m_i^{\mu})}$ について解く。これから、(3.58)式のよ
うに、 $\Delta t^{\mu(m_i^{\mu})}$ を $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ で表すことができる。

(3.72)式のうち、 $\Delta t^{\mu(m_i^{\mu})}$ の決定に用いなかった5式は、次項で述べるように、STAGE3
におけるP要素反転時残留塑性歪変化率の決定に用いる。

3.8.2 定常化条件と降伏条件によるP要素反転時残留塑性歪変化率の決定

逆時間方向解析の場合、STAGE2における降伏の時刻の決定に、降伏条件を用いること
ができないため、降伏条件は、反転時において、P要素の応力点が降伏曲面上に乗っているた
めに、残留塑性歪変化率が満たす条件として用いる。さらに、P要素の反転時残留塑性歪変
化率を決定する条件として、残留塑性歪の軌道が閉じる条件のうち、降伏の時刻の決定に
用いなかった成分の式を用いる。以上の方針に基づいて、P要素の反転時残留塑性歪変化率
を決定する条件式を導く。

STAGE2の増分解析を、一方の反転時 Γ^{μ} ($\mu=I$ or II)から、逆時間方向にたどり、全P
要素が降伏の時刻に達する時刻 $t^{\mu(m_i^{\mu})}$ まで行う。

第*i*番のP要素の残留塑性歪について、増分関係式(3.37)式を、 Γ^{μ} 反転点から、同要素
の降伏の時刻 $t^{\mu(m_i^{\mu})}$ まで、逆時間方向に適用すれば、次式ようになる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI(m_i^I)} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI} + \sum_{k=1}^{m_i^I} \{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI(k)} \Delta t^{I(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{pI(k)} \Delta t^{I(k)} \} \quad (3.73a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pII(m_i^{II})} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pII} + \sum_{k=1}^{m_i^{II}} \{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pII(k)} \Delta t^{II(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{pII(k)} \Delta t^{II(k)} \} \quad (3.73b)$$

(3.73)式における $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\mu(m)}$ および $\Delta t^{\mu(m)}$ は、3.8.1(2)および(3)で、それぞれ説明したように、
順方向解析における(3.55)式と(3.58)式と同じ形で表現できるから、これらを代入し、整理
すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI(m_i^I)} &= \sum_{k=1}^{m_i^I} \{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI(k)} \Delta t^{I(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{pI(k)} \Delta t^{I(k)} \} \\ &+ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI} + \sum_{v=I,II} \sum_{k=1}^{m_i^I} \{ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI(k),v} \Delta t^{I(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{pI(k)} \Delta \bar{t}_i^{I(k),v} \} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \end{aligned} \quad (3.74a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\text{II}(m_i^{\text{II}})} &= \sum_{k=1}^{m_i^{\text{II}}} \{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\text{II}(k)} \Delta t^{\text{II}(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{p\text{II}(k)} \dot{\Delta t}^{\text{II}(k)} \} \\ &+ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\text{I}} + \sum_{v=\text{I,II}} \sum_{k=1}^{m_i^{\text{II}}} \{ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\text{II}(k),v} \Delta t^{\text{II}(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{p\text{II}(k)} \Delta \bar{t}_i^{\text{II}(k),v} \} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \end{aligned} \quad (3.74b)$$

よって、第 i 番 P 要素の降伏の時刻 $t^{\mu(m_i^{\text{II}})}$ における残留塑性歪変化率を、両反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{p\text{I}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{p\text{II}}$ で表わすことができ、次のように、(3.65)式と同様な形で表現できる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\text{I}(m_i^{\text{I}})} = \mathbf{h}_i^{p\text{I}} + \sum_{v=\text{I,II}} \mathbf{H}_i^{p\text{I},v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.75a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\text{II}(m_i^{\text{II}})} = \mathbf{h}_i^{p\text{II}} + \sum_{v=\text{I,II}} \mathbf{H}_i^{p\text{II},v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.75b)$$

残留塑性歪の軌道が閉じるには、STAGE2 の増分解析を、反転時から逆時間方向に全 P 要素の降伏の時刻までたどり、残留塑性歪の定常状態増分変化を追跡していったものが、反対側の反転時における残留塑性歪変化率と等しくなければならない。したがって、次式が成り立つ。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\text{II}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\text{II}(m_i^{\text{II}})} = \mathbf{h}_i^{p\text{II}} + \sum_{v=\text{I,II}} \mathbf{H}_i^{p\text{II},v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.76a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\text{I}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{p\text{I}(m_i^{\text{I}})} = \mathbf{h}_i^{p\text{I}} + \sum_{v=\text{I,II}} \mathbf{H}_i^{p\text{I},v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (3.76b)$$

(3.76a)式、(3.76b)式とも、3.8.1(3)において、降伏の時刻の変化を表す $\Delta t^{\mu(m)}$ を決定する際に用いた成分の式は、意味がない自明な式になっている。(3.76a)式、(3.76b)式から、それぞれ、この自明な 1 式を除いて、さらに、残留塑性歪変化率を含む項と含まない項に分け、再整理して、次のように表現する。

$$\mathbf{h}_i^{p^*\text{I}} + \sum_{v=\text{I,II}} \mathbf{H}_i^{p^*\text{I},v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} = \mathbf{0} \quad (3.77a)$$

$$\mathbf{h}_i^{p^*\text{II}} + \sum_{v=\text{I,II}} \mathbf{H}_i^{p^*\text{II},v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} = \mathbf{0} \quad (3.77b)$$

(3.77a)式、(3.77b)式を、すべての P 要素について、まとめて、次のように表現する。

$$\mathbf{h}_G^{p^*\text{I}} + \sum_{v=\text{I,II}} \mathbf{H}_G^{p^*\text{I},v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} = \mathbf{0} \quad (3.78a)$$

$$\mathbf{h}_G^{p^*\text{II}} + \sum_{v=\text{I,II}} \mathbf{H}_G^{p^*\text{II},v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} = \mathbf{0} \quad (3.78b)$$

(3.78a)式、(3.78b)式が、逆時間方向釣合経路解析による場合における、定常化条件から導かれる P 要素反転時残留塑性歪変化率を決定するための式である。

(3.78)式は、未知量である全 P 要素の反転時残留塑性歪変化率に対して、式の数不足している。この不足を補うのが、STAGE1 および STAGE2 において用いていない、P 要素の降伏条件であり、以下において、不足分の式を導く。

第 i 番 P 要素において、降伏条件式(3.9)式を、反転時について書くと、次式のようになる。

$$f(\sigma^I) = 0 \quad (3.79a)$$

$$f(\sigma^{II}) = 0 \quad (3.79b)$$

(3.79a)式、(3.79b)式を ψ で微分すると、次式のようになる。

$$\mathbf{n}^T(\sigma^I)\dot{\sigma}^I = 0 \quad (3.80a)$$

$$\mathbf{n}^T(\sigma^{II})\dot{\sigma}^{II} = 0 \quad (3.80b)$$

反転時応力変化率 $\dot{\sigma}^I, \dot{\sigma}^{II}$ は、(3.32)式のように、 $\dot{\epsilon}_G^{pI}, \dot{\epsilon}_G^{pII}$ で表されているから、これを(3.80a)式、(3.80b)式に代入すれば、残留塑性歪変化率を含む項と含まない項に分け、整理して、次のように表現できる。

$$h_i^{y*I} + \sum_{v=I,II} \mathbf{H}_i^{y*I,v} \dot{\epsilon}_G^{pv} = 0 \quad (3.81a)$$

$$h_i^{y*II} + \sum_{v=I,II} \mathbf{H}_i^{y*II,v} \dot{\epsilon}_G^{pv} = 0 \quad (3.81b)$$

(3.81a)式、(3.81b)式を、すべての P 要素について、まとめて、次のように表現する。

$$\mathbf{h}_G^{y*I} + \sum_{v=I,II} \mathbf{H}_G^{y*I,v} \dot{\epsilon}_G^{pv} = 0 \quad (3.82a)$$

$$\mathbf{h}_G^{y*II} + \sum_{v=I,II} \mathbf{H}_G^{y*II,v} \dot{\epsilon}_G^{pv} = 0 \quad (3.82b)$$

(3.78a)式、(3.78b)式、および、(3.82a)式、(3.82b)式が、逆時間方向釣合経路解析による場合における、反転時の P 要素の残留塑性歪変化率 $\dot{\epsilon}_G^{pI}, \dot{\epsilon}_G^{pII}$ を決定するための方程式である。

定常状態変数変化率は、STAGE2 までで、定常状態釣合経路上の任意の釣合状態において、すべて $\dot{\epsilon}_G^{pI}, \dot{\epsilon}_G^{pII}$ のみを未知量として含む形で表されているから、(3.78a)式、(3.78b)式、(3.82a)式、(3.82b)式の解を代入することにより、すべての定常状態量変化率解が求まる。

3.9 履歴挙動解析結果との比較による解析法の検証

図 3.11 に示す剛体棒と 2 次元有限要素からなる梁-柱モデルについて、図 3.12 に示す段階的振幅漸増完全両振り繰り返し横荷重プログラム STIFAC を作用させたときの履歴挙動解析を行い、最終振幅における定常状態量を求める。これを、同一モデルについて、本解析法により定常状態経路を追跡して得られた解と比較し、解析法の検証を行う。

可変形部分は要素内変位場を線形近似した 2 次元有限要素で離散化し、可変形部分の構成材料は von Mises の降伏条件に従う完全弾塑性体で、材料定数は図 3.11 に示す通りである。

本モデルに対して、まず、2 章のシェイクダウン領域における基本対称定常状態経路の追跡を、交番塑性領域に移行するまで行う。 $\psi=93.68\text{kN}$ で最外縁の要素が交番塑性状態に移行するので、それ以上の振幅に対して、本章の解析法による定常状態経路解析を行う。

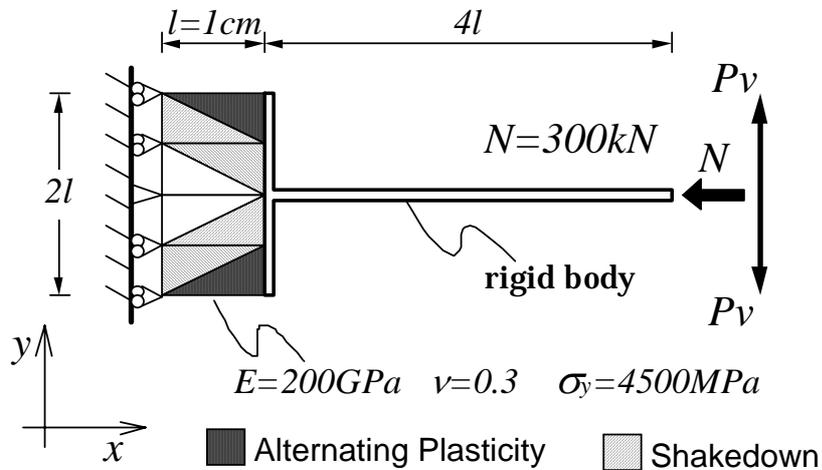


図 3.11 解析モデル

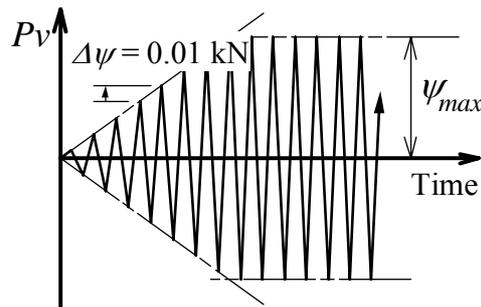


図 3.12 段階的振幅漸増完全両振り繰り返し横荷重プログラム STIFAC

交番塑性領域に移行する振幅レベル以上の領域における要素の応力状態を図 3.11 に示す。

履歴挙動解析は、参考文献[13]の増分摂動法を用いて行った。最終振幅 ψ_{max} の異なる種々の STIFAC プログラムに対して、 ψ_{max} における収束後の定常状態を求めた。図 3.13 に種々の ψ_{max} に対する残留塑性歪の周期軌道を、図 3.14 に $\psi_{max}=98.0\text{kN}$ に対する応力の周期軌道を、それぞれ示す。

これに対して、図 3.13 と図 3.14 に丸印で示した値が、本定常状態経路解析法により求めた、反転点における定常状態量である。

履歴挙動解析による定常状態解と本定常状態経路解析法による解は全く重なって一致しており、各载荷振幅レベルでの定常状態が精度よく予測されていることがわかる。

よって、本章で提示した定常状態経路解析法の正当性が例証された。

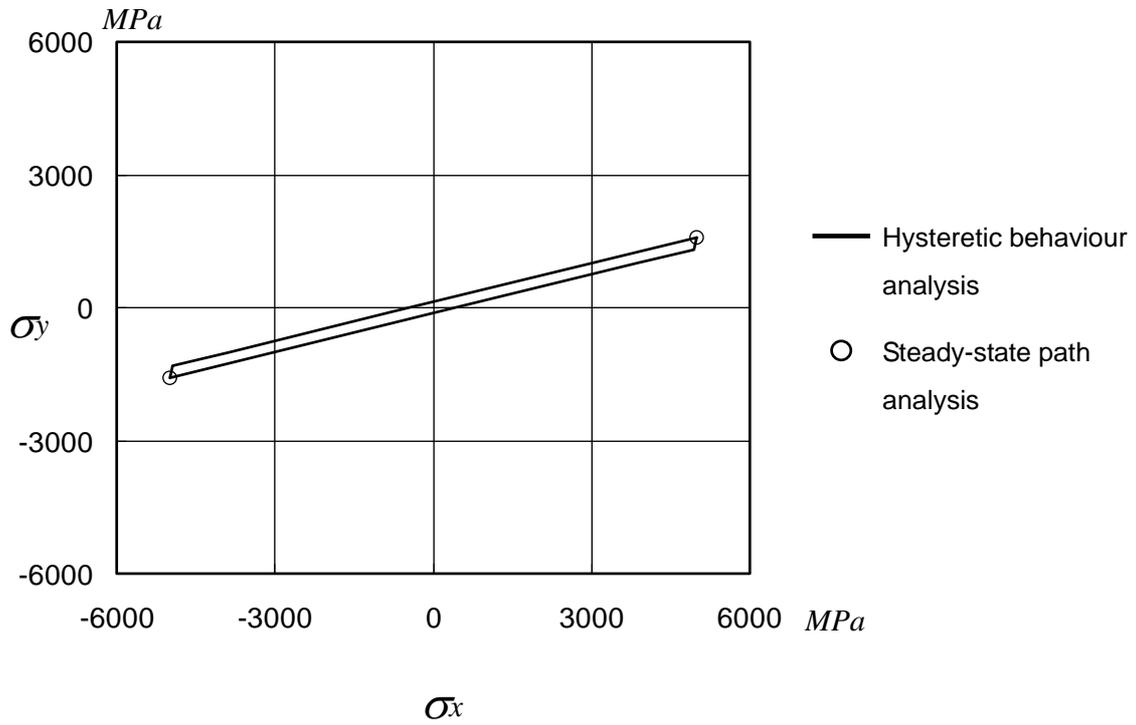


图 3.13 应力周期轨道 ($\psi_{\max}=98.0\text{kN}$)

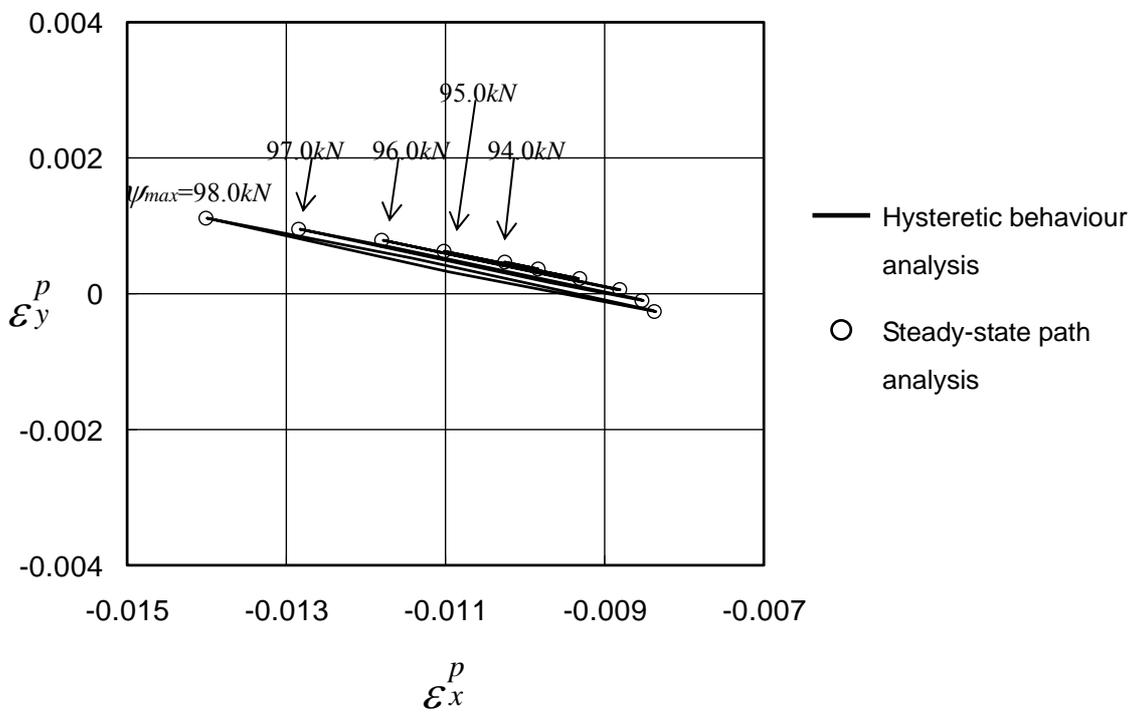


图 3.14 残留塑性歪周期轨道

3.10 まとめ

本章では、完全弾塑性材料で構成される 3 次元連続体に対する交番塑性領域における定常状態経路解析法を提示した。交番塑性領域においては、定常状態増分変化に対する構成則が陽な形で導けないため、経路の追跡が極めて困難であり、本解析法は、3 次元連続体に対する対称限界理論の一般化の根幹を成す部分である。

本解析法では、以下の手順により、定常状態変数の変化率を求める。

- (1) 反転時釣合状態における定常状態変数の変化率を、残留塑性歪変化率を未知量として含む形で表す。
- (2) 反転時釣合状態を出発点として反対側の反転時まで、釣合経路上のすべての時刻の定常状態変数の変化率を、反転時残留塑性歪変化率を未知量として含む形で表していく増分解析を行う。
- (3) 残留塑性歪の軌道が閉じる条件から、反転時残留塑性歪変化率を決定する。これを (1)(2) で得られた定常状態変数の変化率の反転時残留塑性歪変化率による数式表現に代入する。

(2) の増分解析において、交番塑性要素の降伏時刻の変化率も、反転時の残留塑性歪変化率で表し、厳密に扱う。交番塑性要素が多数存在する場合でも、逐次消去することができ、未知量は増えないことを示した。

(2) の増分解析は、定常状態釣合経路を逆時間方向にたどることにより、弾性過程の釣合経路の追跡を省いて効率化でき、その場合の定式化も示した。

更に、2 次元有限要素梁-柱モデルについての数値解析例を示し、履歴挙動解析結果との比較により、解析法の検証を行った。

参考文献

- [1] A. R. S. Ponter and H. Chen, A minimum theorem for cyclic load in excess of shakedown, with application to the evaluation of a ratchet limit, *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol.20, pp.539-553, 2001.
- [2] H. Chen and A. R. S. Ponter, A method for the evaluation of a ratchet limit and the amplitude of plastic strain for bodies subjected to cyclic loading, *Eur. J. Mech. A/Solids* Vol.20, pp.555-571, 2001.
- [3] C. Polizzotto, A study on plastic shakedown of structures: Part I-Basic properties, *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.60, pp.318-323, 1993.
- [4] C. Polizzotto, A study on plastic shakedown of structures: Part II-Theorems, *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.60, pp.324-330, 1993.
- [5] C. Polizzotto, Variational methods for the steady state response of elastic-plastic solids subjected to cyclic loads, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.40, pp.2673-2697, 2003.
- [6] W. Prager, A New Method of Analyzing Stresses and Strains in Work-Hardening

- Plastic Solids, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* 78, pp.493-496, 1956.
- [7] W. Prager, *An Introduction to Plasticity*, Chapter 1, Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 1959.
- [8] C. O. Frederick and P. J. Armstrong, *Convergent internal stresses and steady cyclic states of stresses*, *J. Strain Anal.*, Vol.1, pp.154-162, 1966.
- [9] 久田俊明、弾塑性確率有限要素法の基礎式（非線形 FEM の感度解析）、日本機械学会論文集（A 編） Vol.56、No.524、pp.966-970、1990.
- [10] 久田俊明、野口裕久、非線形有限要素法の基礎と応用、第 10 章、丸善、1995.
- [11] M. Ohsaki and J. S. Arora, *Design Sensitivity Analysis of Elastoplastic Structures*, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.37, pp.737-762, 1994.
- [12] 大崎純、上谷宏二、増分摂動法を用いた弾塑性トラスの設計感度解析、日本建築学会構造系論文報告集、第 477 号、pp.49-56、1995.
- [13] Y. Yokoo, T. Nakamura, and K. Uetani, *The Incremental Perturbation Method for Large Displacement Analysis of Elastic-Plastic Structures*, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.10, pp.503-525, 1976.

第4章 交番塑性領域における3次元連続体に対する対称限界理論

4.1 序

シェイクダウン領域においては、単軸応力状態を対象とした対称限界理論と同様に、残留塑性歪変化率を消去することにより、定常状態の増分変化に対する応力ひずみ変化率関係式を導くことができた。しかし、前章で述べたように、交番塑性領域においては、残留塑性歪変化率を消去することができず、定常状態経路の追跡に対して、新しい理論を構築する必要があった。定常状態経路の分岐点である対称限界を予測する理論も、定常状態経路の追跡の理論に基づいて展開されるから、既往の対称限界理論とは全く異なる理論展開を必要とし、新しい分岐点理論を構築しなければならない。

交番塑性領域における対称限界理論を展開することは、次のような実用上の意義を有している。地震時の建築構造物におけるように、一定鉛直荷重の下で交番繰り返し水平荷重を受ける場合、交番塑性領域において対称限界に達する軸力の範囲は、シェイクダウン領域において対称限界に達する軸力の範囲より、低い側である。建築構造物においては、常時の鉛直荷重による応力が、降伏応力度に対して十分余裕を持って小さくなるよう設計されるから、激震時の安全性を検討する際に、対象となる不安定挙動の多くは、交番塑性領域に属すると考えられる。シェイクダウン領域における理論は、構造物の一部が、たとえ、それが非常に限られた狭い範囲であっても、交番塑性状態に移行して後は、全く適用できない。したがって、交番塑性領域への拡張は、極めて重要である。

著者らは、文献[1]において、降伏曲面を多面体で近似することにより、降伏曲面上の応力点の移動距離が小さく、応力点が多面体の角を通過しない定常状態に限定して、交番塑性領域における対称限界理論を展開している。また、文献[2,3]においては、この多面体近似による方法を発展させ、応力点が多面体の角を通過する定常状態に対しても、角を離れる瞬間の釣合状態に着目し、角の通過が増える度に、系の全自由度数分、方程式のサイズを大きくする定式化により、交番塑性領域における定常状態経路を追跡する解析法を展開している。本章で展開される理論は、これらの理論と異なり、降伏条件を曲面のまま扱うものであり、降伏曲面上での応力点の移動距離の大小による定式化の違いはなく、応力点の移動距離の大きい定常状態に対しても方程式のサイズを増やさず解析することができる。

本章では、前章で展開された定常状態経路解析法に基づいて、完全弾塑性材料で構成される3次元連続体に対して、交番塑性領域における対称限界理論を構築する。前章における交番塑性領域の定常状態経路解析の支配方程式は、残留塑性歪変化率を未知量とする定式化により導かれ、最終的に、定常状態を特徴づける条件に対応する、反転時残留塑性歪変化率の方程式に帰着される。定常状態経路の特異性は、この定常化条件の方程式に集約されている。よって、2章のシェイクダウン領域における対称限界理論で導入した、初期形状に関して対称に配置した一対の座標系を用いて、定常化条件の方程式を対称成分と逆対称成分に関する方程式に変換し、対称限界条件を導く。更に、本理論による2次元有限要素

素梁-柱モデルについての数値解析例を示し、履歴挙動解析結果との比較による検証を行う。

4.2 解析モデルと基礎式

4.2.1 解析モデル

本章で扱う解析モデルは、図 4.1 に示すように、2 章と同様、ある 1 平面に関して、形状・材料特性分布について、対称性を持つものとする。3 章と同じく、有限要素法を適用した離散化モデルを対象とする。要素分割は、解析モデルの変形前の対称面に関して、対称を行う。3 章における基礎式(3.1)式～(3.8)式を採用し、理論を展開する。モデルの構成材料は、前章までと同様、完全弾塑性体であり、3 章における(3.9)式～(3.15)式の方法則を採用する。

4.2.2 载荷条件

図 4.1 に示すように、荷重についても、2 章と同様、形状・材料特性分布についての対称面に関して対称な荷重を作用させる。すなわち、3 章で導入した荷重 \mathbf{P} について、固定荷重 \mathbf{P}_C はモデルの対称面に関して対称で、繰り返し荷重 $\mathbf{P}_V = \psi\alpha(t)\bar{\mathbf{P}}_V$ について、 α は Γ^I 反転時において -1、 Γ^{II} 反転時において 1 をとり、両反転時の間を変動し、 $\bar{\mathbf{P}}_V$ はモデルの対称面に関して逆対称であるものとする。

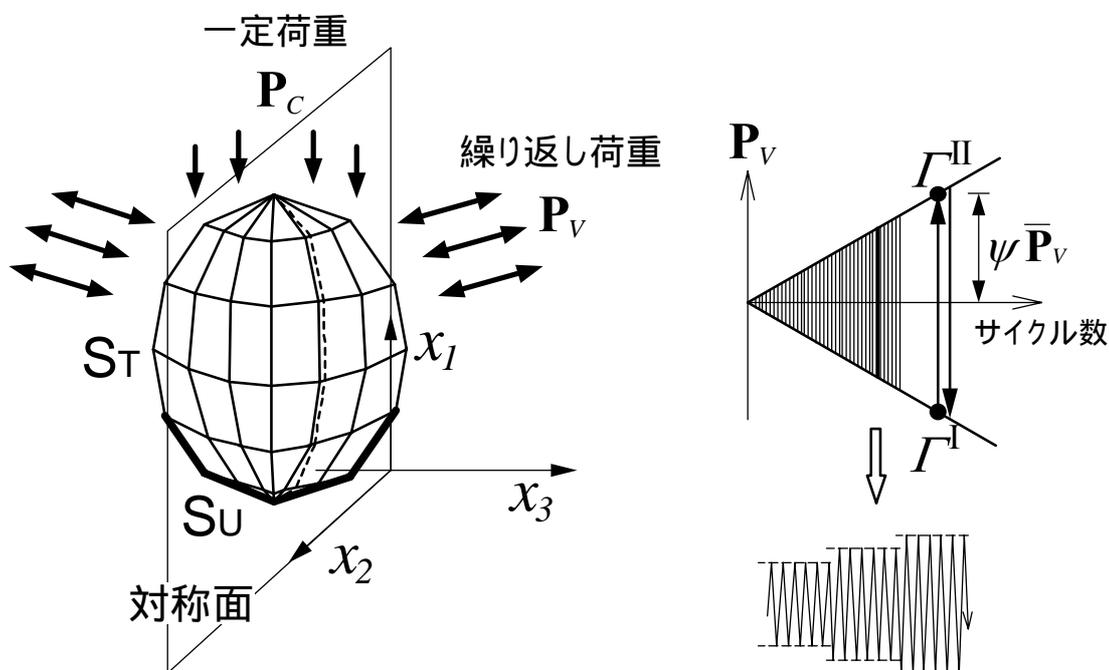


図 4.1 解析モデルと荷重プログラム

4.3 理論解析の概要

本章で提示する、交番塑性領域における 3 次元連続体に対する対称限界理論は、前章で展開した、定常状態経路解析法に基づいて、対称定常状態経路の分岐点として、対称限界を求める理論である。

前章で展開した、定常状態経路解析法は、線形化増分解析により行われ、各振幅増分段階において、定常状態の増分変化に関して、以下の 3 段階の解析を行うものであった。

STAGE1：反転点における定常状態変数変化率を、残留塑性歪変化率を未知量として含む形で表す。

STAGE2：定常状態釣合経路上の反転時以外の釣合状態における定常状態変数変化率を、反転時残留塑性歪変化率を未知量として含む形で表していく増分解析を、一方の反転時から反対側の反転時まで行う。

STAGE3：定常化条件により、反転時残留塑性歪変化率を決定する。

本理論においても、基本対称定常状態経路の追跡にあたって、この STAGE1~3 の手順により定常状態変数変化率を求め、増分解析する。

対称限界条件は、以下の方針に従って、誘導する。

STAGE1 と STAGE2 においては、定常状態変数の対称成分と逆対称成分への変換を行わず、3 章における、対称性を有しない構造物を含めた、一般的な定式化に従った解析を行う。STAGE1 と STAGE2 の方程式は、対称限界においても、正則であり、定常状態変数変化率を、反転時残留塑性歪変化率を未知量として含む形で表すことができる。正則である理由は、STAGE1 については、P 要素を、残留塑性歪変化率が指定された弾性要素として、弾性的に振舞うものとして解析しているからである。また、STAGE2 については、P 要素の反転時残留塑性歪を変化させたときの、定常状態釣合経路増分の変化量を求める方程式になっており、この方程式が特異となるのは、釣合経路の分岐点においてである。本論文で対象としているのは、釣合経路が正則であっても、定常状態経路が分岐する、塑性座屈理論では扱えない現象であり、このような釣合経路の分岐が起こる場合は、本章では、対象外とする。

定常状態経路の特異性は、STAGE3 の定常状態を特徴づける条件に集約されている。STAGE3 の方程式を、定常状態の対称成分と逆対称成分に関する方程式に変換し、逆対称成分に関する方程式が非自明解を持つ条件として、分岐点条件が導かれる。2 章のシェイクダウン領域における対称限界理論と同様の考え方に従って、定常状態変数の対称成分と逆対称成分を定義し、STAGE3 の方程式をこれらの量に関する方程式に変換する。定常状態の対称成分と逆対称成分に関する変化率方程式は完全に分離される。前者の変化率方程式

から、基本対称定常状態経路の変化率解を求めることができる。後者の変化率方程式は線形斉次式となり、これが非零解を持つ条件として、対称限界条件が導かれる。

なお、既知の定常状態の対称性から、STAGE2 の計算量は大幅に減らすことができる。STAGE2 における定常状態釣合経路に沿って行う増分解析は、一方の反転時から行うものと、もう一方の反転時から行うものは、対称性を持つはずで、どちらか片方の半サイクルのみ行えば、十分である。さらに、逆時間方向解析を適用すれば、塑性変形過程のみ追跡すればよいから、計算量は相当少なくなる。前章の定常状態経路解析法は、定常状態釣合経路の追跡を伴うため、一見、計算量が非常に多くなる印象を与えるかもしれない。しかし、対称限界解析においては、片側半サイクルの塑性変形過程のみの追跡を行えばよく、交番塑性領域においても、1方向単調载荷に対する解析と同程度の計算量で、対称限界を予測することができる。

以上の方針に基づき、次節以降において、交番塑性領域における 3次元連続体の対称限界を予測するための解析理論を展開する。次節で STAGE1 の部分を、4.5 節で STAGE2 の部分を、4.6 節で STAGE3 の部分を定式化し、4.7 節で対称限界解析全体の流れを示す。

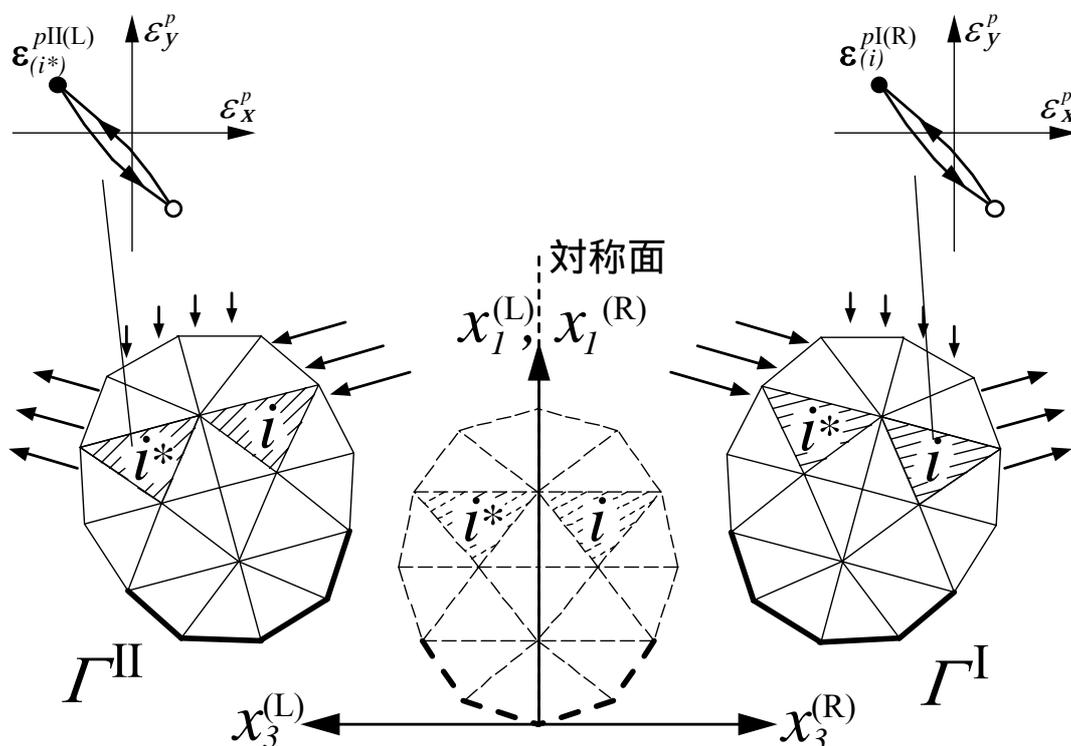


図 4.2 対称定常状態における周期挙動

4.4 片側反転点における定常状態変数変化率

本節では、STAGE1 における、反転点に属する定常状態諸量の荷重振幅に関する変化率の誘導について示す。

STAGE1 は、定常状態の対称成分と逆対称成分による定式化を行わず、3 章における、対称性を有しない一般的な問題に対する定式化に従った解析を行う。問題の対称性から、片方の反転時釣合状態における定常状態変数変化率のみ誘導すればよいが、構成則において、両方の反転時に属する量が連成しているため、両方の反転時における基礎式に基づいて誘導しなければならない。

解析手順は 3.5 節と全く同様である。以下に再掲しておく。

両反転時釣合状態における、基礎式の載荷振幅 ψ に関する変化率表現は、次の通りであった。

$$\text{歪変位関係式： } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I = \mathbf{B}(\mathbf{U}^I)\dot{\mathbf{U}}^I \quad (4.1a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} = \mathbf{B}(\mathbf{U}^{II})\dot{\mathbf{U}}^{II} \quad (4.1b)$$

$$\text{釣合条件式： } \dot{\mathbf{F}}^I = \int_{V_e} \{\mathbf{B}^T(\mathbf{U}^I)\dot{\boldsymbol{\sigma}}^I + \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^I, \mathbf{U}^I)\dot{\mathbf{U}}^I\}dV \quad (4.2a)$$

$$\dot{\mathbf{F}}^{II} = \int_{V_e} \{\mathbf{B}^T(\mathbf{U}^{II})\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{II} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^{II}, \mathbf{U}^{II})\dot{\mathbf{U}}^{II}\}dV \quad (4.2b)$$

$$\text{反転時変化率応力・歪変化率関係式： } \dot{\boldsymbol{\sigma}}^I = \mathbf{D}^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I + \mathbf{D}^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} + \mathbf{D}^p\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pI} \quad (4.3a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{II} = \mathbf{D}^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I + \mathbf{D}^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} + \mathbf{D}^p\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pII} \quad (4.3b)$$

歪変位関係式を構成則に代入し、これを釣合式に代入し、要素方程式を導き、全要素について重ね合わせ、次のような、全体系の変化率方程式が得られる。

$$\mathbf{K}_G^{II}\dot{\mathbf{U}}_G^I + \mathbf{K}_G^{III}\dot{\mathbf{U}}_G^{II} = \dot{\mathbf{F}}_G^I + \bar{\mathbf{F}}_G^I\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} \quad (4.4a)$$

$$\mathbf{K}_G^{III}\dot{\mathbf{U}}_G^I + \mathbf{K}_G^{III}\dot{\mathbf{U}}_G^{II} = \dot{\mathbf{F}}_G^{II} + \bar{\mathbf{F}}_G^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII} \quad (4.4b)$$

この方程式を境界条件の下で解いて、両反転時釣合状態における節点変位変化率を、P 要素の反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ で表すことができる。

$$\dot{\mathbf{U}}_G^I = \hat{\mathbf{U}}_G^I + \bar{\mathbf{U}}_G^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} + \bar{\mathbf{U}}_G^{III}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}, \quad \dot{\mathbf{U}}_G^{II} = \hat{\mathbf{U}}_G^{II} + \bar{\mathbf{U}}_G^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} + \bar{\mathbf{U}}_G^{III}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII} \quad (4.5)$$

(4.5)式を(4.1)式に代入すれば、両反転時歪変化率を $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ で表すことができ、さらに、これを(4.3)式に代入し、両反転時応力変化率を $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}_G^{pII}$ で表すことができる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^I + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{III}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{III}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII} \quad (4.6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^I = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^I + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{III}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{II} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{II} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{III}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII} \quad (4.7)$$

以上により、両反転点における定常状態変数変化率の P 要素残留塑性歪変化率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pI}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pII}$ による表現を誘導できる。このうち、片方の反転点の定常状態変数変化率を用いて、次節の STAGE2 における、反転点を出発点とする半サイクルの定常状態釣合経路上の定常状態変数変化率の増分解析を行う。

4.5 片側反転点からの半サイクルの定常状態釣合経路上における定常状態変数変化率の増分解析

既知の定常状態の対称性から、STAGE2 の増分解析について、 Γ^I 反転点から出発する増分解析と、 Γ^{II} 反転点から出発する増分解析は、対称性を持つ。すなわち、図 4.2 に示す、2 章で導入した、一对の座標系のそれぞれに基づいて、それぞれの増分解析を定式化すれば、対応する係数は、すべて一致する。したがって、どちらか半サイクルのみの解析を行えば十分であり、本節では、 Γ^I 反転点からの半サイクルの解析を行う。解析手順は 3.6 節と全く同様であり、以下に概要を示す。

3.6 節の図 3.5 と同様に、 Γ^I 反転点から Γ^{II} 反転点に向かう釣合経路を、線形増分関係式により近似する。

$$\int_{\Gamma^I \rightarrow \Gamma^{II}} \mathbf{Q}' dt = \sum_{m=1}^{M^I} \mathbf{Q}'^{I(m)} \Delta t^{I(m)} \quad (4.8)$$

増分の切れ目の時刻を、 $t^{I(m)} = \sum_{k=1}^m \Delta t^{I(k)}$ により定義し、その時刻における定常状態量を

$\mathbf{Q}^{I(m)} = \sum_{k=1}^m \mathbf{Q}'^{I(k)} \Delta t^{I(k)}$ のように、上添字(m)で表せば、隣接する 2 つの時刻における定常状態

量に関係づける式は次のように表現される。

$$\mathbf{Q}^{I(m)} = \mathbf{Q}^{I(m-1)} + \mathbf{Q}'^{I(m)} \Delta t^{I(m)} \quad (4.9)$$

載荷振幅 ψ についての変化率をとり、隣接する時刻における定常状態変数変化率の関係式が得られる。

$$\dot{\mathbf{Q}}^{I(m)} = \dot{\mathbf{Q}}^{I(m-1)} + \{\dot{\mathbf{Q}}'^{I(m)} \Delta t^{I(m)} + \mathbf{Q}'^{I(m)} \dot{\Delta t}^{I(m)}\} \quad (4.10)$$

(4.8) 式において、釣合経路パラメータ増分 $\Delta t^{I(m)}$ は、既知の定常状態において要素の降伏の時刻が増分の切れ目となるように設定し、さらに、誤差の累積が大きくなるように十分小さい値としておく。また、 $\mathbf{Q}^{I(m)}$ と $\mathbf{Q}'^{I(m)}$ も既知の定常状態で評価する。

今、 $\dot{\mathbf{Q}}^{I(m-1)}$ が、次式のように、P 要素の反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\epsilon}_G^{pI}, \dot{\epsilon}_G^{pII}$ の 1 次式で表されているとする。

$$\dot{\mathbf{Q}}^{I(m-1)} = \dot{\mathbf{Q}}^{I(m-1)} + \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{Q}}^{I(m-1),v} \dot{\epsilon}_G^{pv} \quad (4.11)$$

$\dot{\mathbf{Q}}'^{I(m)}$ と $\dot{\Delta t}^{I(m)}$ も、同様の $\dot{\epsilon}_G^{pI}, \dot{\epsilon}_G^{pII}$ の 1 次式の形で表せることを、以下において示す。

$\dot{\mathbf{Q}}'^{I(m)}$ は ψ と t という 2 つの経路パラメータに関する変化率であり、定常状態釣合経路に沿う接線剛性関係式から、次のようにして誘導する。

時刻 $t^{I(m-1)}$ において、要素についての接線剛性関係式を構築し、 ψ で微分し、次式を得る。

$$\mathbf{K}^{I(m-1)} \dot{\mathbf{U}}'^{I(m)} = \dot{\mathbf{F}}'^{I(m)} - \dot{\mathbf{K}}^{I(m-1)} \mathbf{U}'^{I(m)} \quad (4.12)$$

ここに、

$$\dot{\mathbf{K}}^{I(m-1)} = \int_{V_e} \{ \mathbf{B}^{I(m-1)T} \mathbf{D}^{I(m-1)} \mathbf{B}^{I(m-1)} + \mathbf{B}^{I(m-1)T} \dot{\mathbf{D}}^{I(m-1)} \mathbf{B}^{I(m-1)} + \mathbf{B}^{I(m-1)T} \mathbf{D}^{I(m-1)} \dot{\mathbf{B}}^{I(m-1)} + \dot{\mathbf{S}}^{I(m-1)} \} dV \quad (4.13)$$

(4.13)式における $\dot{\mathbf{B}}^{I(m-1)}$ 等は、(4.11)式を用いて、 $\dot{\mathbf{B}}^{I(m-1)} = \dot{\hat{\mathbf{B}}}^{I(m-1)} + \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{B}}^{I(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv}$ のように

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pll}$ で表すことができ、よって、 $\dot{\mathbf{K}}^{I(m-1)}$ も、 $\dot{\mathbf{K}}^{I(m-1)} = \dot{\hat{\mathbf{K}}}^{I(m-1)} + \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{K}}^{I(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv}$ のように、

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pll}$ で表わすことができる。

したがって、(4.12)式は、右辺第2項を $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pll}$ の1次式で表すことができ、次のようになる。

$$\mathbf{K}^{I(m-1)} \dot{\mathbf{U}}^{I(m)} = \dot{\mathbf{F}}^{I(m)} - \dot{\hat{\mathbf{R}}}^{I(m-1)} - \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{R}}^{I(m-1),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (4.14)$$

(4.14)式を、全要素で重ね合わせ、全体系の方程式を導き、境界条件を導入し解くことにより、節点変位と節点力の ψ と t に関する変化率を、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pll}$ を未知量として含む形で表すことができる。これを、時刻 $t^{I(m-1)}$ における、歪変位変化率関係式(3.38)式を ψ で微分した式に代入し、さらに、これを、応力歪変化率関係式(3.40)式を ψ で微分した式に、代入すれば、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{I(m)}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{I(m)}$ も $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pll}$ で表すことができる。また、P要素における残留塑性歪の ψ と t に関する変化率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{I(m)}$ も、塑性歪変化率と歪変化率の関係式について、同様の手順を行うことにより、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pll}$ で表すことができる。

したがって、すべての定常状態変数の ψ と t に関する変化率を、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pll}$ の1次式で表すことができる。

$$\dot{\mathbf{Q}}^{I(m)} = \dot{\hat{\mathbf{Q}}}^{I(m)} + \sum_{v=I,II} \bar{\mathbf{Q}}^{I(m),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (4.15)$$

$\Delta t^{I(m)}$ は、P要素の降伏時刻が、定常状態増分変化に伴い変化するため、正確に釣合経路増分の切れ目となるよう、解析が必要な量であり、以下のようにして、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pll}$ による表現を誘導する。

時刻 $t^{I(m)}$ が P要素の降伏時刻であるとする。降伏時刻で打ち切られる増分となる第 m 増分においては、定常状態変数の ψ と t に関する変化率 $\dot{\mathbf{Q}}^{I(m)}$ が、(4.15)式の形で表されているので、これを用いて導く。

時刻 $t^{I(m)}$ における P要素の降伏条件式 $f(\boldsymbol{\sigma}^{I(m-1)} + \boldsymbol{\sigma}^{I(m)} \Delta t^{I(m)}) = 0$ を ψ で微分し、次式を得る。

$$\mathbf{n}^T(\boldsymbol{\sigma}^{I(m)}) \{ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{I(m-1)} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{I(m)} \Delta t^{I(m)} + \boldsymbol{\sigma}^{I(m)} \Delta \dot{t}^{I(m)} \} = 0 \quad (4.16)$$

(4.11)式の形で表されている $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{I(m-1)}$ と、(4.15)式の形で表されている $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{I(m)}$ を、(4.16)式に代入し、 $\Delta \dot{t}^{I(m)}$ について解けば、 $\Delta \dot{t}^{I(m)}$ を $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pl}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pll}$ で表すことができる。

$$\Delta \dot{t}^{I(m)} = \Delta \dot{\hat{t}}^{I(m)} + \sum_{v=I,II} \Delta \bar{t}^{I(m),v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pv} \quad (4.17)$$

したがって、(4.10)式における $\dot{Q}^{I(m)}$ と $\Delta t^{I(m)}$ は、 $\dot{\epsilon}_G^{pI}$ 、 $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ の 1 次式の形で表すことができる。

4.4 節で示したように、STAGE1 で、 Γ^I 反転時における定常状態変数変化率は、 $\dot{\epsilon}_G^{pI}$ 、 $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ の 1 次式で表されているから、よって、 Γ^I 反転点を出発点として、定常状態釣合経路上の任意の釣合状態における定常状態変数変化率 $\dot{Q}^{I(m)}$ を、(4.10)式に基づいて、 Γ^{II} 反転点まで、未知量である $\dot{\epsilon}_G^{pI}$ 、 $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ の 1 次式の形で、逐次表していくことができる。

4.6 定常化条件と変数の対称成分と逆対称成分による定式化

交番塑性定常状態は、残留塑性歪の軌道が閉じる条件により、特徴づけられる。STAGE3 においては、この条件から、残った未知量である、P 要素の反転時残留塑性歪変化率 $\dot{\epsilon}_G^{pI}$ 、 $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ が決定され、定常状態変数変化率を求めることができる。3.7 節では、定常状態の増分変化に対して、この定常化条件を、STAGE2 において求めた諸量を用いて、 $\dot{\epsilon}_G^{pI}$ 、 $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ に関する方程式として誘導した。

交番塑性領域における定常状態増分変化を求める問題は、最終的に、この定常化条件として誘導される、P 要素の反転時残留塑性歪変化率に関する方程式に帰着される。定常状態経路の特異性は、この定常化条件式に集約されており、定常状態経路の分岐点である対称限界を特徴づける条件は、この方程式が非自明解を持つことである。

本節では、2 章のシェイクダウン領域における対称限界理論で導入した、3 次元連続体についての定常状態変数の対称成分と逆対称成分の定義を用いて、定常化条件をこれらの量に関する方程式に変換する。逆対称成分に関する方程式が非零解を持つ条件として、対称限界条件を導く。

3.7 節で示した通り、定常状態の増分変化に対して、残留塑性歪の軌道が閉じる条件は、以下のようにして導かれる。

STAGE2 の増分解析を、 Γ^I 反転点から Γ^{II} 反転点まで行う。増分関係式(4.10)式を、第 i 番の P 要素の残留塑性歪について、この要素の降伏時刻 $t^{I(m_i^I)}$ から Γ^{II} 反転点まで、適用すれば、反対側の反転時における量は次式のように表現できる。

$$\dot{\epsilon}_i^{pI(M^I)} = \dot{\epsilon}_i^{pI} + \sum_{k=m_i^I+1}^{M^I} \{ \dot{\epsilon}_i^{pI(k)} \Delta t^{I(k)} + \epsilon_i^{pI(k)} \Delta t^{I(k)} \} \quad (4.18)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}_i^{pI(k)}$ は(4.15)式のように、 $\Delta t^{I(k)}$ は(4.17)式のように、 $\dot{\epsilon}_G^{pI}$ 、 $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ の 1 次式で表されているから、これらを(4.18)式に代入し、整理すれば、 $\dot{\epsilon}_G^{pI}$ 、 $\dot{\epsilon}_G^{pII}$ を含む項と含まない項に分けて、次のように書ける。

$$\dot{\epsilon}_i^{pI(M^I)} = \mathbf{h}_i^I + \mathbf{H}_i^{I,I} \dot{\epsilon}_G^{pI} + \mathbf{H}_i^{I,II} \dot{\epsilon}_G^{pII} \quad (4.19)$$

図 4.3(a)に示すように、定常状態である条件として、これが第 i 番 P 要素の Γ^{II} 反転点における残留塑性歪変化率と等しくなければならない。よって、次式が成り立つ。

$$\dot{\epsilon}_i^{pII} = \dot{\epsilon}_i^{pI(M^I)} = \mathbf{h}_i^I + \mathbf{H}_i^{I,I} \dot{\epsilon}_G^{pI} + \mathbf{H}_i^{I,II} \dot{\epsilon}_G^{pII} \quad (4.20)$$

図 4.2 に示すように、全 P 要素に番号 i ($=1, \dots, L^p$) を付ける。第 i 番 P 要素に対して、初期対称面に関して、対称な位置にある要素も P 要素であり、この要素を、要素番号に上添字*を付して、第 i^* 番 P 要素と表記する。

解析モデルを、初期対称面に関して、右側部分と左側部分に分け、右側部分に属する P 要素に番号 l ($=1, \dots, L^p/2$) を付ける。左側部分の対称な位置にある要素も P 要素であるが、上添字*による表記を用いれば、この要素は第 l^* 番 P 要素となる。

(4.23)式について、第 l 番 P 要素と第 l^* 番 P 要素の成分を表記し、次のように表現する。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l^{p\text{II(R)}} \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{l^*}^{p\text{II(R)}} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_l^{\text{I(R)}} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{l^*}^{\text{I(R)}} \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{H}_{l,l}^{\text{I,I(R)}} & \dots & \mathbf{H}_{l,l^*}^{\text{I,I(R)}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{H}_{l^*,l}^{\text{I,I(R)}} & \dots & \mathbf{H}_{l^*,l^*}^{\text{I,I(R)}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l^{\text{I(R)}} \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{l^*}^{\text{I(R)}} \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{H}_{l,l}^{\text{I,II(R)}} & \dots & \mathbf{H}_{l,l^*}^{\text{I,II(R)}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{H}_{l^*,l}^{\text{I,II(R)}} & \dots & \mathbf{H}_{l^*,l^*}^{\text{I,II(R)}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l^{\text{II(R)}} \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{l^*}^{\text{II(R)}} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

ここで、(4.24)式について、(4.25)式における第 l 番 P 要素の成分の位置に第 l^* 番 P 要素の成分が来るように、(4.25)式における第 l^* 番 P 要素の成分の位置に第 l 番 P 要素の成分が来るように、並び替えを行うと、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{l^*}^{p\text{I(L)}} \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l^{p\text{I(L)}} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_{l^*}^{\text{II(L)}} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_l^{\text{II(L)}} \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{H}_{l^*,l^*}^{\text{II,II(L)}} & \dots & \mathbf{H}_{l^*,l}^{\text{II,II(L)}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{H}_{l,l^*}^{\text{II,II(L)}} & \dots & \mathbf{H}_{l,l}^{\text{II,II(L)}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{l^*}^{\text{II(L)}} \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l^{\text{II(L)}} \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{H}_{l^*,l^*}^{\text{II,I(L)}} & \dots & \mathbf{H}_{l^*,l}^{\text{II,I(L)}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{H}_{l,l^*}^{\text{II,I(L)}} & \dots & \mathbf{H}_{l,l}^{\text{II,I(L)}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{l^*}^{p\text{I(L)}} \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l^{p\text{I(L)}} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

変化率を評価する既知の定常状態の対称性から、(4.25)式と(4.26)式において、係数行列、定数項ベクトルの対応する位置にある成分は等しい。

$$\mathbf{h}_l^{\text{I(R)}} = \mathbf{h}_{l^*}^{\text{II(L)}}, \quad \mathbf{h}_{l^*}^{\text{II(R)}} = \mathbf{h}_l^{\text{I(L)}} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{H}_{l,l}^{\text{I,I(R)}} = \mathbf{H}_{l^*,l^*}^{\text{II,II(L)}}, \quad \mathbf{H}_{l,l^*}^{\text{I,I(R)}} = \mathbf{H}_{l^*,l}^{\text{II,II(L)}}, \quad \mathbf{H}_{l^*,l}^{\text{I,I(R)}} = \mathbf{H}_{l,l^*}^{\text{II,II(L)}}, \quad \mathbf{H}_{l^*,l^*}^{\text{I,I(R)}} = \mathbf{H}_{l,l}^{\text{II,II(L)}} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{H}_{l,l}^{\text{I,II(R)}} = \mathbf{H}_{l^*,l^*}^{\text{II,I(L)}}, \quad \mathbf{H}_{l,l^*}^{\text{I,II(R)}} = \mathbf{H}_{l^*,l}^{\text{II,I(L)}}, \quad \mathbf{H}_{l^*,l}^{\text{I,II(R)}} = \mathbf{H}_{l,l^*}^{\text{II,I(L)}}, \quad \mathbf{H}_{l^*,l^*}^{\text{I,II(R)}} = \mathbf{H}_{l,l}^{\text{II,I(L)}} \quad (4.29)$$

P 要素残留塑性歪の対称成分 $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{pf}$ と逆対称成分 $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{pb}$ を、第 i 番 P 要素と第 i^* 番 P 要素に属する量を用いて、次式で定義する。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{pf} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_i^{p\text{I(R)}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{i^*}^{p\text{II(L)}}}{2} \quad (4.30)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{pb} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_i^{p\text{I(R)}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{i^*}^{p\text{II(L)}}}{2} \quad (4.31)$$

(4.25)式と(4.26)式における、係数行列と定数項ベクトルは等しいから、両方の式の和を

とり 1 / 2 を乗じ、式を整理すれば、次のようになる。

$$\mathbf{H}_G^{I,II(R)} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pf} \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i^*}^{pf} \\ \vdots \end{Bmatrix} + (\mathbf{H}_G^{I,II(R)} - \mathbf{I}) \begin{Bmatrix} \vdots \\ \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pII(R)} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i^*}^{pI(L)}}{2} \\ \vdots \\ \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i^*}^{pII(R)} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{pI(L)}}{2} \\ \vdots \end{Bmatrix} = -\mathbf{h}_G^{I(R)} \quad (4.32)$$

ここで、左辺第 2 項の P 要素残留塑性歪変化率からなるベクトルについて、座標系 R に基づく量を座標系 L に基づく量に、座標系 L に基づく量を座標系 R に基づく量に、それぞれ座標変換を行い、さらに、第 i 番 P 要素の成分と第 i^* 番 P 要素の成分が入れ替わるように成分の並び替えを行えば、左辺第 1 項の P 要素残留塑性歪変化率の対称成分からなるベクトルと一致する。したがって、(4.32) 式の左辺第 2 項を変形することにより、P 要素残留塑性歪変化率の対称成分に関する方程式が得られ、次のように表現できる。

$$\mathbf{H}^f \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pf} = -\mathbf{h}_G^{I(R)} \quad (4.33)$$

ここで、

$$\mathbf{H}^f = \mathbf{H}_G^{I,II(R)} + (\mathbf{H}_G^{I,II(R)} - \mathbf{I})\boldsymbol{\beta}\mathbf{A}$$

また、 $\boldsymbol{\beta}$ は座標系 R、L の間の変換行列を表し、 \mathbf{A} は P 要素残留塑性歪変化率ベクトルにおいて第 i 番 P 要素の成分と第 i^* 番 P 要素の成分が入れ替わるように変換する行列を表す。

また、(4.25) 式と (4.26) 式の差をとり 1 / 2 を乗じ、式を整理すれば、P 要素残留塑性歪変化率の逆対称成分に関する方程式が得られ、次のようになる。

$$\mathbf{H}^b \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G^{pb} = \mathbf{0} \quad (4.34)$$

ここで、

$$\mathbf{H}^b = \mathbf{H}_G^{I,II(R)} - (\mathbf{H}_G^{I,II(R)} - \mathbf{I})\boldsymbol{\beta}\mathbf{A}$$

4.7 対称限界解析法

以上の定式化に基づいて、以下の 3 段階の手順により、交番塑性領域における 3 次元連続体の対称限界を求めることができる。

STEP1：基本対称定常状態経路の追跡

以下の手順により定常状態変数変化率を求め、増分型解析法により、基本対称定常状態経路を追跡する。

各振幅増分段階において、STAGE1 と STAGE2 の解析を行い、P 要素残留塑性歪変化率

の対称成分 $\dot{\epsilon}_G^{pf}$ に関する方程式(4.33)式を構築する。(4.33)式を解いて、 $\dot{\epsilon}_G^{pf}$ を求める。

対称定常状態へ移行するとき、P 要素残留塑性歪変化率の逆対称成分は 0 であるから、反転時における量と対称成分の関係は次のようになる。

$$\dot{\epsilon}_i^{pl(R)} = \dot{\epsilon}_{i*}^{pl(L)} = \dot{\epsilon}_i^{pf} \quad (4.35)$$

よって、全 P 要素の反転時残留塑性歪変化率は次式により求められる。

$$\dot{\epsilon}_G^{pl(R)} = \dot{\epsilon}_G^{pf}, \quad \dot{\epsilon}_G^{pl(L)} = \beta \mathbf{A} \dot{\epsilon}_G^{pf} \quad (4.36)$$

STAGE1 における(4.5)式～(4.7)式により片側反転時における定常状態変数変化率が、STAGE2 における(4.10)式、(4.15)式、(4.17)式により片側半サイクルの定常状態釣合経路上のすべての定常状態変数変化率が、それぞれ P 要素反転時残留塑性歪変化率で表されているから、これに、(4.36)式を代入することにより、すべての定常状態変数変化率を求めることができる。

STEP2：対称限界条件の誘導

STEP1 における、基本対称定常状態経路の増分型解析の各振幅増分段階において、STAGE1 と STAGE2 の解析を行い、P 要素残留塑性歪変化率の逆対称成分に関する方程式(4.34)式を構築する。

対称限界は(4.34)式が非零解を持つことで特徴づけられ、対称限界条件は以下のようになる。

$$\Lambda_1 = 0 \quad (4.37)$$

ここで、 Λ_1 は \mathbf{H}^b の 1 次固有値である。

STEP1 では領域間境界の連続的伝播を考慮していないため、(4.37)式の左辺は不連続に変化する場合もあり、次式を対称限界条件とする。

$$\Lambda_1 \leq 0 \quad (4.38)$$

STEP3：対称限界予測解

STEP1 の手順により基本対称定常状態経路の追跡していき、この経路上で STEP2 で誘導した対称限界条件(4.38)式を最初に満たす定常状態を見出す。これが対称限界予測解である。

4.8 履歴挙動解析結果との比較による理論の検証

図 4.3 に示す剛体棒と 2 次元有限要素からなる梁-柱モデルについて、一定軸荷重の下で図 4.4 に示す段階的振幅漸増完全両振り繰り返し横荷重プログラム STIFAC を作用させたときの履歴挙動解析を行い、この解析結果を、同一モデルの本理論による対称限界予測解と比較し、理論の妥当性を検証する。

可変形部分は要素内変位場を線形近似した 2 次元有限要素で離散化し、可変形部分の構成材料は von Mises の降伏条件に従う完全弾塑性体で、材料定数は図 4.3 に示す通りであ

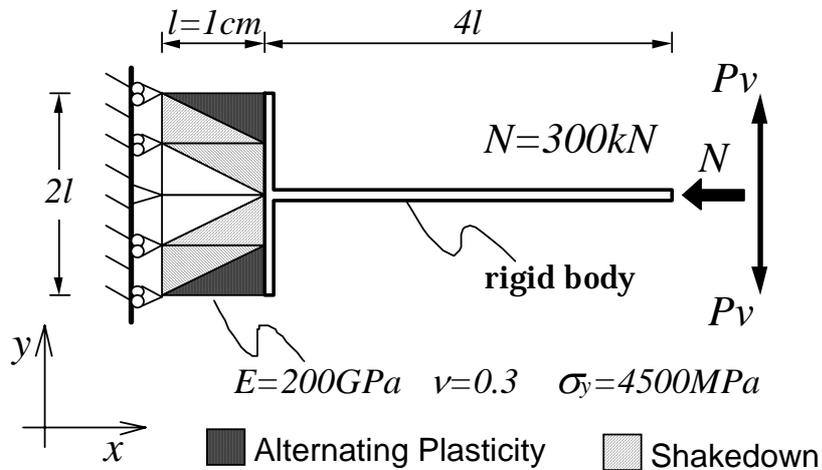


図 4.3 解析モデル

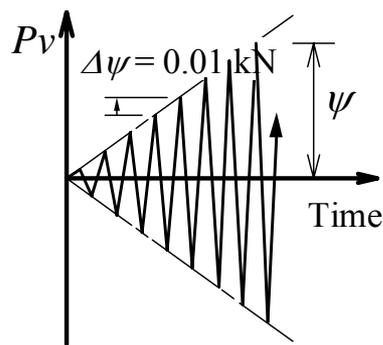


図 4.4 段階的振幅漸増完全両振り繰り返し横荷重プログラム STIFAC

る。

本モデルに対して、まず、2章のシェイクダウン領域における基本対称定常状態経路の追跡を、交番塑性領域に移行するまで行う。 $\psi=93.68\text{kN}$ で最外縁の要素が交番塑性状態に移行するので、それ以後の振幅について、本章の対称限界理論解析を行う。 $\psi=98.34\text{kN}$ において、対称限界条件が満たされ、このときの要素の応力状態の分布を図 4.3 に示す。

本モデルに対する履歴挙動解析は、参考文献[4]の増分摂動法を用いて行った。

STIFAC プログラムに対して、下式で定義される反転時頂点逆対称たわみ変形の増幅係数 v^b のサイクルごとの変動を求めた。これを図 4.5 に実線で示した。

$$v^b = \left(\frac{2v^I|_{(i)\text{cycle}} + v^{\text{II}}|_{(i-1)\text{cycle}} + v^{\text{II}}|_{(i+1)\text{cycle}}}{4} \right) \Bigg|_{x=5l, y=0} \quad (4.39)$$

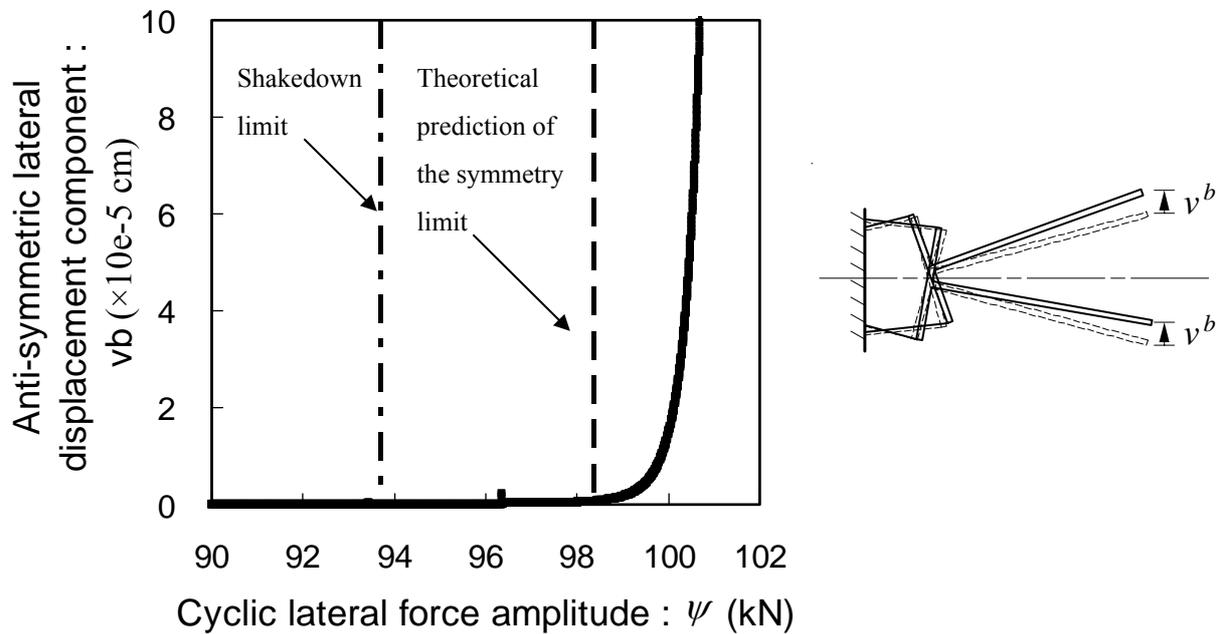


図 4.5 頂点逆対称たわみ変形の推移

ここで、 $()^{\text{II}}|_{(i-1)\text{cycle}}$, $()^{\text{I}}|_{(i)\text{cycle}}$, $()^{\text{II}}|_{(i+1)\text{cycle}}$ は連続する 3 個の反転時釣合状態に属する量を表す。

これに対して、同図中に引いた破線の位置に対応する ψ の値が上の理論解析で求めた対称限界振幅予測解である。なお、一点鎖線の位置はシェイクダウン限界振幅であり、この値より大きい ψ に対して、解析モデルは交番塑性状態を呈する。 ψ が破線の位置より大きくな

るに連れて、 v^b は急激に増大しており、この対称限界予測解により非対称定常状態への移行が的確に予測されている。よって、本章で提示した対称限界理論の正当性が例証された。

4.9 まとめ

本章では、前章で展開された定常状態経路解析法に基づいて、完全弾塑性材料で構成される 3 次元連続体に対して、交番塑性領域における対称限界理論を展開した。

本理論の定式化の要点および特徴は以下のようにまとめられる。

- (1) 交番塑性領域においては、定常状態変数の変化率を求める解析は、反転時残留塑性歪変化率を求める方程式に帰着される。定常状態経路の特異性は、この反転時残留塑性歪変化率の方程式に集約されており、これを、対称成分と逆対称成分に関する方程式に変換する。
- (2) 対称成分と逆対称成分への変換は、2 章のシェイクダウン領域における対称限界理論

で導入した、初期形状に関して対称に設けた一对の座標系を用いた定式化により行う。
(3) 交番塑性領域においても、定常状態の対称成分と逆対称成分に関する変化率方程式は互いに連成せず、完全に分離され、1次元梁-柱の対称限界理論と共通の特徴が保持される。

以上により導かれた基礎式に基づき、対称限界解析の具体的手順を示した。

更に、2次元有限要素梁-柱モデルについて、本理論による対称限界予測解を履歴挙動解析結果と比較し、理論の検証を行った。

参考文献

- [1] 上谷宏二、小林正実、繰り返し両振り载荷を受けるシャイベ構造物の臨界点解析、日本建築学会中国支部研究報告集、第15巻、pp.17-20、1989.
- [2] 上谷宏二、小林正実、交番塑性変形を受ける連続体の定常状態経路解析法(その2 降伏曲面の多面体近似による解法)、日本建築学会中国支部研究報告集、第19巻、pp.77-80、1995.
- [3] 上谷宏二、小林正実、交番塑性変形を受ける連続体の定常状態経路解析法(その2 降伏曲面の多面体近似による解法)、日本建築学会大会学術講演梗概集(北海道)、構造、pp.363-364、1995.
- [4] Y. Yokoo, T. Nakamura, and K. Uetani, The Incremental Perturbation Method for Large Displacement Analysis of Elastic-Plastic Structures, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.10, pp.503-525, 1976.

第5章 繰り返しねじれ変形を受ける薄肉円筒部材における歪の非一様化現象の発生限界の予測理論

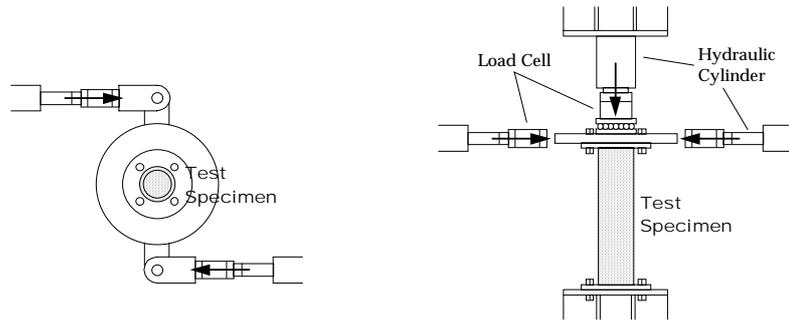
5.1 序

図 5.1 に示すように、辻らによって行われた、鋼管の繰り返しねじれ挙動に関する実験的研究[1,2]において、局部座屈が生じていない、ほぼ一様応力であるはずのねじれ振幅の範囲で、歪分布に顕著に不均一性が現れる結果が報告されている。また、同種の実験は、多軸応力状態における材料の力学的性質を調べるための標準的試験方法（軸力ねじり複合加力試験）として行われる。一様応力を仮定して、材料法則が誘導されるため、歪の非一様化は、不都合であり、このような現象の起こる限界とその性状を把握しておかなければならない。

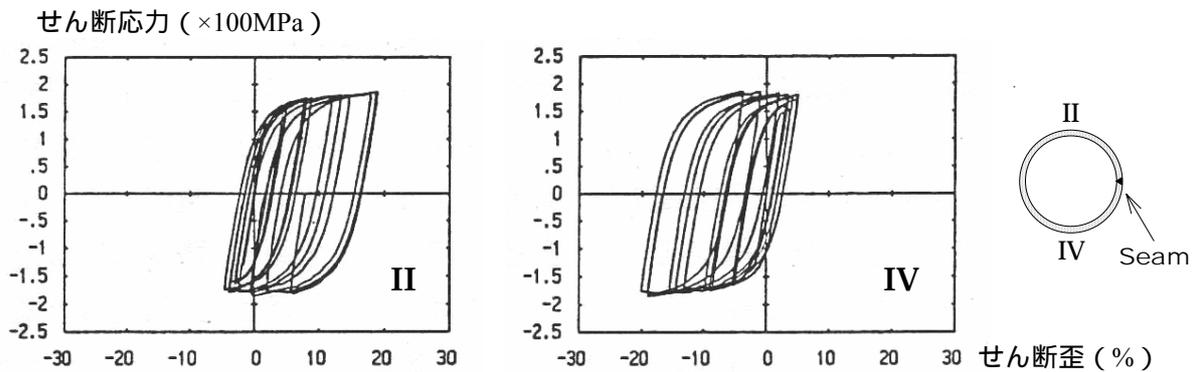
Biot は、剛体に囲まれた一様な応力状態にある弾性体において、不均一な歪が生じる **Internal buckling** の理論を展開した[3-5]。前述の歪の非一様化は、**Internal buckling** と類似した現象である。一方、前述の現象は、繰り返し载荷の下で顕著に現れ、繰り返し载荷の下での分岐現象は対称限界理論により予測できる。単調载荷の下での分岐点と対称限界とは、本質的に異なる臨界点であるが、両者は類似した側面も有している。したがって、前述の現象は、**Internal buckling** と類似した、繰り返し载荷の下での分岐現象であり、対称限界理論を応用することにより、明らかにすることが期待できる。

上述のねじり変形を受ける円筒部材に歪の非一様化が生じる現象について、従来から行われてきた研究は、**Luders band** の進展の観点からの研究[6]である。また、上述の鋼構造薄肉円筒部材で観察されることを報告した研究も、軸力とねじり载荷の下での履歴特性の解明を目的とした研究である。いずれも、実験結果から、その性状を把握しようとするものであるのに対して、本研究は、構造安定論の立場から、理論的に解明しようとするものであり、このような観点からの取り組みは、行われたことはない。

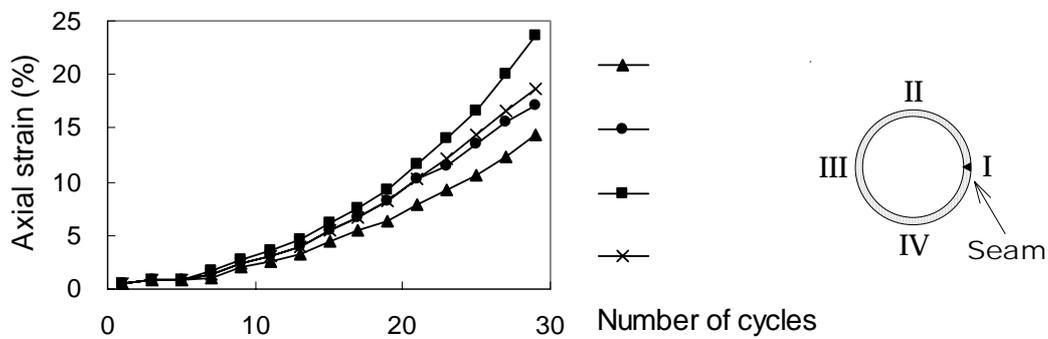
本章では、繰り返しねじれ変形を受ける薄肉円筒部材において、歪の非一様化が起こる臨界点の予測理論を展開する。肉厚が十分に小さく平面応力状態にあると見なせる薄肉円筒部材を対象とし、2次元有限要素で離散化近似する。シェイクダウン領域に限定し、2章の対称限界理論を応用して、歪の非一様化の発生限界を予測する。本理論による数値解析を実施し、上述の実験結果に対応した、円周方向に細かく波打つ分岐モードが求まり、**Internal buckling** と類似した現象の発生が予測されることを示す。単調ねじれ载荷に対する分岐点解析も行い、これにより、繰り返し载荷時における歪の非一様化は単調载荷時の分岐点よりはるかに小さな振幅で起こり、また、両者の分岐モードが大きく異なることを示す。また、履歴挙動解析を行い、さらに現象の特徴を明らかにする。



(a) 試験装置見取図



(b) 実験におけるせん断応力とせん断歪の関係



(c) 繰り返しねじれ荷による軸方向歪の変化

図 5.1 辻らによる鋼管の繰り返しねじれ挙動に関する実験的研究[1,2]

5.2 解析モデル

軸方向荷とねじれ荷を受ける、肉厚が十分に小さく平面応力状態にあると見なせる薄肉円筒部材を考える。軸方向に x 軸を、円筒部材の底面の円周方向に沿って y 軸をとる。図 5.2 に示すように、円筒部材を $y = \pi R$ で母線に沿って切り開き、2次元連続体として解析する。ここで、 R は円筒部材断面の初期形状における半径を表す。 $y = \pi R$ における変位およ

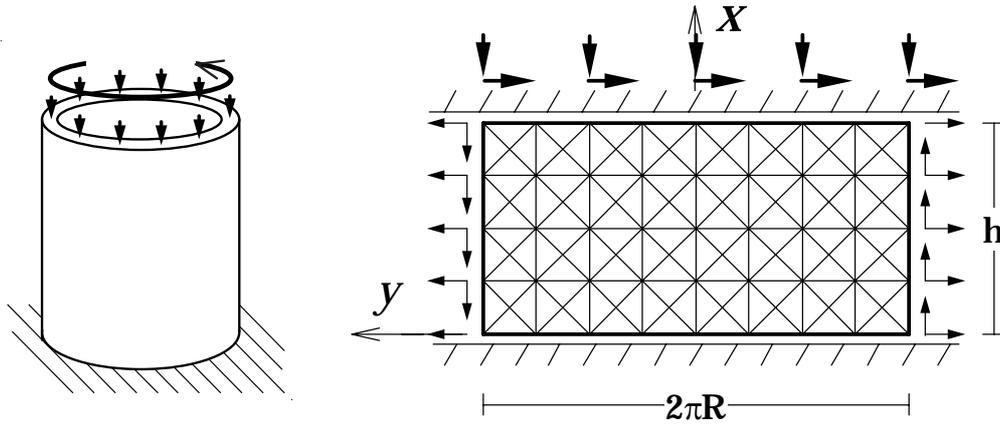


図 5.2 解析モデル

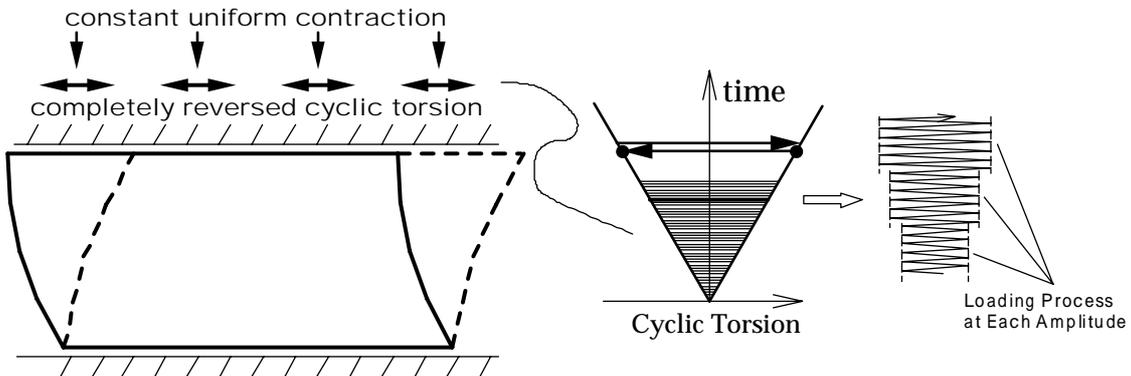


図 5.3 载荷プログラム

び応力の連続条件は以下のように書ける。

$$u(x, -\pi R) = u(x, \pi R), \quad v(x, -\pi R) = v(x, \pi R) \quad (5.1)$$

$$\sigma_y(x, -\pi R) = \sigma_y(x, \pi R), \quad \tau_{xy}(x, -\pi R) = \tau_{xy}(x, \pi R) \quad (5.2)$$

円筒部材の構成材料は、滑らかな曲面を降伏条件とする完全弾塑性体とし、弾性域で Hooke の法則に従い、塑性域で塑性ポテンシャルを降伏関数に一致させた連合流れ則に従うものとする。

2次元有限要素法を適用し、変位場を離散化近似する。

底面を固定し、上端面において、軸方向に一定強制変位を作用させ、円周方向には、次式で表される完全両振り繰り返しねじれ変形を作用させる。

$$v(h, y) = \psi h \alpha(t) \quad (5.3)$$

ここで、 h は円筒部材の初期形状における高さを表す。 ψ はねじれ角振幅であり、 α は右

側反転時において 1、左側反転時において - 1 をとり、両者の値の間を繰り返し変動する
 載荷パラメタ ψ である。図 5.3 に示すように、連続的振幅漸増繰り返し曲げプログラム
 COIDA と同様、各振幅レベルにおいて定常状態に収束するまで完全両振りねじれ載荷を繰
 り返し、 ψ は微小量ずつ増加させる。

5.3 理論の概要

前述した漸増振幅繰り返しねじれプログラムの下で、本解析モデルは、載荷振幅が小さ
 い範囲では、1つのサイクルを通じて、すべての釣合状態において、歪分布が一様である、
 定常状態を呈する。対称限界理論からの類推により、載荷振幅が、ある値に達したとき、
 このような歪分布が一様な定常状態から、歪分布が非一様な定常状態への移行が起こると
 考える。このような定常状態の推移は、図 5.4 のように視覚化できる。この歪の非一様化現
 象を起こす定常状態経路の分岐点を、歪一様限界 (Strain uniformity limit) と名付ける。

本理論では、歪一様限界を、対称限界理論と同様に、以下の 3 段階の手順で求める。

STEP1: 各ねじれ載荷振幅レベルにおける、歪が一様な定常状態解を求める。

STEP2: 歪が非一様な定常状態へ移行する条件を定式化する。

STEP3: 歪が一様な定常状態解列の中で、歪の非一様化の条件を最初に満足する定常状
 態を見いだす。

本章では、シェイクダウン領域に限定して理論を展開する。したがって、2章における基
 本仮定 (CH1) ~ (CH3) を採用する。

(CH1) 定常状態における載荷プログラム反転時のすべての状態変数は、単調増加量であ
 る載荷振幅に関する連続かつ区分的に微分可能な関数である。

(CH2) 定常状態において、降伏曲面上にある応力点の除荷が生じるのは、載荷プログラ
 ムの進行方向の反転の瞬間のみである。

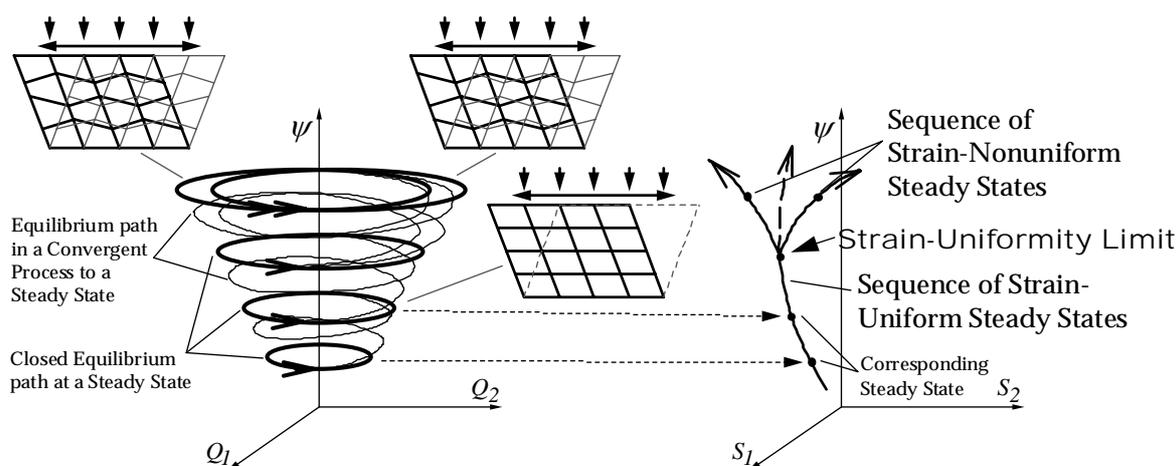


図 5.4 定常状態釣合経路の連続的变化と定常状態経路

(CH3) 歪一様限界における歪が一様な定常状態から歪が非一様な定常状態への移行に際し、構造物内部の有限領域において、反転時に降伏曲面に達していた応力状態点の軌跡が、降伏曲面から離れることはない。

また、2章と同様に、支配方程式を両反転時釣合状態に属する量を用いて導く。以下において、右側反転時釣合状態 I^I に属する量を上添字 I で表し、左側反転時釣合状態 I^{II} に属する量を上添字 II で表し、また、载荷振幅 ψ に関する変化率を dot で表す。

以上の方針に基づき、次節以降において、薄肉円筒部材における歪の非一様化現象を予測するための理論解析法を展開する。5.5 節で STEP1 の部分を、5.6 節で STEP2 の部分を定式化する。

5.4 構成則

本解析モデルは、歪一様限界以下の载荷振幅レベルの定常状態では、 $\sigma_x^I = \sigma_x^{II}$ であり、また、全要素とも同じ値をとる。 σ_y についても同様である。 τ_{xy} については、 $\tau_{xy}^I = -\tau_{xy}^{II}$ であり、全要素とも同じ値をとる。したがって、降伏は、全要素同時に起こり、それ以降、図 5.5 における (b) の両反転時応力点とも降伏曲面に達するシェイクダウン状態を呈する。

本章では、シェイクダウン領域までを対象とする。よって、構成則は、2.4 節において導いたものを採用し、弾性範囲では、E ループに対する式を用い、降伏後は、C 2 ループに対する式を用いる。これらをまとめて、構成則を次のように表現する。

$$\dot{\sigma}^I = \mathbf{D}^{II} \dot{\epsilon}^I + \mathbf{D}^{III} \dot{\epsilon}^{II}, \quad \dot{\sigma}^{II} = \mathbf{D}^{II} \dot{\epsilon}^I + \mathbf{D}^{III} \dot{\epsilon}^{II} \quad (5.4)$$

5.5 歪が一様な定常状態解

本節では、各ねじれ载荷振幅レベルに対する、歪が一様な定常状態解を求める。

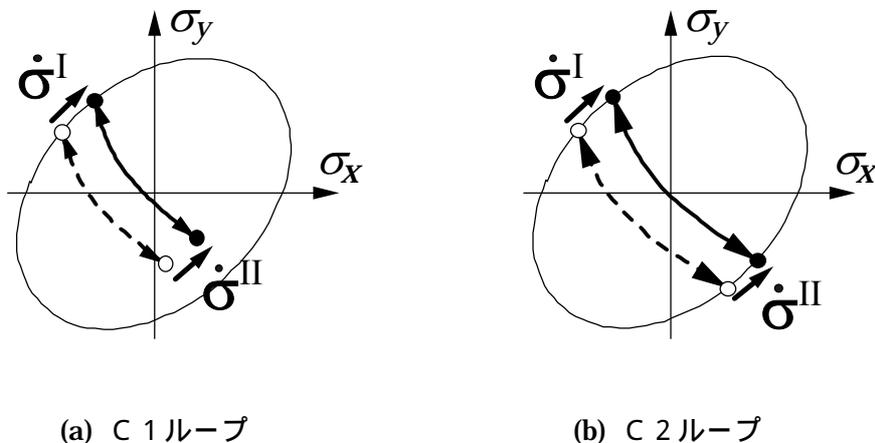


図 5.5 シェイクダウン応力ループの分類

本章では、軸方向載荷と円周方向載荷の両方とも、変位制御とする場合を対象としている。したがって、歪が一様な釣合状態における変位場は、構成則を介することなしに、軸方向載荷と円周方向載荷の指定変位制御パラメータのみを用いて、explicit に表現することができる。変位場は、次式のように書ける。

$$u = (\lambda - 1)X, \quad v = \psi \alpha X \quad (5.5)$$

ここで、 λ は軸方向の stretch であり、 X は初期形状における x 座標を表す。

Γ^I 反転時における変位場は、(5.4)式における α に 1 を代入し、次式のようになる。

$$u^I = (\lambda - 1)X, \quad v^I = \psi X \quad (5.6)$$

Γ^{II} 反転時における変位場は、(5.4)式における α に - 1 を代入することにより得られる。

2 章と同様に、Total Lagrange 型の定式化を採用する。 Γ^I 反転時における歪が一様な釣合状態の Green の歪は、(5.5)式から求められ、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^I &= \frac{\partial u^I}{\partial X} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u^I}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^I}{\partial X} \right)^2 \right\} = \frac{\lambda^2 - 1}{2} + \frac{\psi^2}{2}, \quad \varepsilon_y^I = \frac{\partial v^I}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u^I}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^I}{\partial Y} \right)^2 \right\} = 0 \\ \gamma_{xy}^I &= \frac{\partial u^I}{\partial Y} + \frac{\partial v^I}{\partial X} + \left(\frac{\partial u^I}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial u^I}{\partial Y} \right) + \left(\frac{\partial v^I}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial v^I}{\partial Y} \right) = \psi \end{aligned} \quad (5.7)$$

ここで、 X, Y は初期形状における x, y 座標を表す。

Γ^{II} 反転時における歪は、(5.6)式における ψ に $-\psi$ を代入することにより得られる。

応力は、シェイクダウン領域までの範囲では、(5.4)式の構成則を用いて求められる。構成則が変化率の関係式であるので、まず、上で導いた、歪の explicit な表現から、定常状態増分変化に対する歪変化率を求める。

(5.7)式を ψ で微分して、 Γ^I 反転時における歪の変化率が得られる。

$$\dot{\varepsilon}_x^I = \psi, \quad \dot{\varepsilon}_y^I = 0, \quad \dot{\gamma}_{xy}^I = 1 \quad (5.8)$$

Γ^{II} 反転時における歪変化率は、(5.7)式における ψ に $-\psi$ を代入し、これを ψ で微分することにより得られる。

両反転時歪変化率を(5.4)式に代入することにより、反転時応力変化率が求まる。これに載荷振幅増分 $\Delta\psi$ を乗じて、加え合わせていくことにより、各載荷振幅レベルにおける、歪が一様な定常状態の反転時応力を求められる。

以上により、シェイクダウン領域における、歪が一様な定常状態解を求めることができる。

5.6 歪の非一様化現象の発生条件

本節では、前節で求めた、歪が一様な定常状態経路上で、歪一様限界を特徴づける条件を誘導する。

図 5.2 に示すように、有限要素法を適用した離散化モデルに対して誘導する。よって、3

章の 3.2.1 項における有限要素法モデルの基礎式表現を用いて定式化する。

基礎式(3.3)式、(3.5)式を Γ^I, Γ^{II} 反転時釣合状態について書き、 ψ で微分して、定常状態変化率に関する対応する関係式が得られ、次のように表現できる。

歪変位関係式：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I = \mathbf{B}(\mathbf{U}^I)\dot{\mathbf{U}}^I, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} = \mathbf{B}(\mathbf{U}^{II})\dot{\mathbf{U}}^{II} \quad (5.9)$$

釣合条件式：

$$\dot{\mathbf{F}}^I = \int_{V_e} \{\mathbf{B}^T(\mathbf{U}^I)\dot{\boldsymbol{\sigma}}^I + \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^I, \mathbf{U}^I)\dot{\mathbf{U}}^I\} dV, \quad \dot{\mathbf{F}}^{II} = \int_{V_e} \{\mathbf{B}^T(\mathbf{U}^{II})\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{II} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^{II}, \mathbf{U}^{II})\dot{\mathbf{U}}^{II}\} dV \quad (5.10)$$

構成則は、(5.4)式であり、再掲する。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^I = \mathbf{D}^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I + \mathbf{D}^{III}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{II} = \mathbf{D}^{II}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I + \mathbf{D}^{III}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{II} \quad (5.11)$$

(5.9)式を(5.11)式に代入して得られる式を、さらに(5.10)式に代入して、要素に対する変化率方程式が得られる。これを、全要素について重ね合わせることにより、全体系についての変化率方程式が得られ、次のように表現できる。

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{P}} \quad (5.12)$$

ここで、

$$\mathbf{D} = \left\{ \mathbf{U}_G^I \quad \mathbf{U}_G^{II} \right\}^T, \quad \mathbf{P} = \left\{ \mathbf{F}_G^I \quad \mathbf{F}_G^{II} \right\}^T$$

境界条件は次のようになる。

上端：

$$\dot{u}^I = \dot{u}^{II} = 0, \quad \dot{v}^I = h, \quad \dot{v}^{II} = -h \quad (5.13)$$

底面：

$$\dot{u}^I = \dot{u}^{II} = \dot{v}^I = \dot{v}^{II} = 0 \quad (5.14)$$

両側面：

$$\dot{u}_r^I = \dot{u}_l^I, \quad \dot{u}_r^{II} = \dot{u}_l^{II}, \quad \dot{v}_r^I = \dot{v}_l^I, \quad \dot{v}_r^{II} = \dot{v}_l^{II} \quad (5.15)$$

$$\dot{f}_{x\ r}^I = -\dot{f}_{x\ l}^I, \quad \dot{f}_{x\ r}^{II} = -\dot{f}_{x\ l}^{II}, \quad \dot{f}_{y\ r}^I = -\dot{f}_{y\ l}^I, \quad \dot{f}_{y\ r}^{II} = -\dot{f}_{y\ l}^{II}, \quad (5.16)$$

ここで、図 5.6 に示すように、下添字 r は右側面の節点に属する量を表し、下添字 l は左側面の節点に属する量を表す。

全体系の剛性方程式(5.12)を、変位が指定された境界、すなわち、上端と底面の節点の成分、右側面の節点の成分、左側面の節点の成分、それ以外の成分に分けて、次のように表現する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ir} & \mathbf{K}_{il} & \mathbf{K}_{io} \\ \mathbf{K}_{ri} & \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rl} & \mathbf{K}_{ro} \\ \mathbf{K}_{li} & \mathbf{K}_{lr} & \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lo} \\ \mathbf{K}_{oi} & \mathbf{K}_{or} & \mathbf{K}_{ol} & \mathbf{K}_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{D}}_i \\ \dot{\mathbf{D}}_r \\ \dot{\mathbf{D}}_l \\ \dot{\mathbf{D}}_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{P}}_r \\ \dot{\mathbf{P}}_l \\ \dot{\mathbf{P}}_o \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

ここで、下添字 o は上端と底面の節点に属する量を表し、下添字 i は上端、底面、両側面

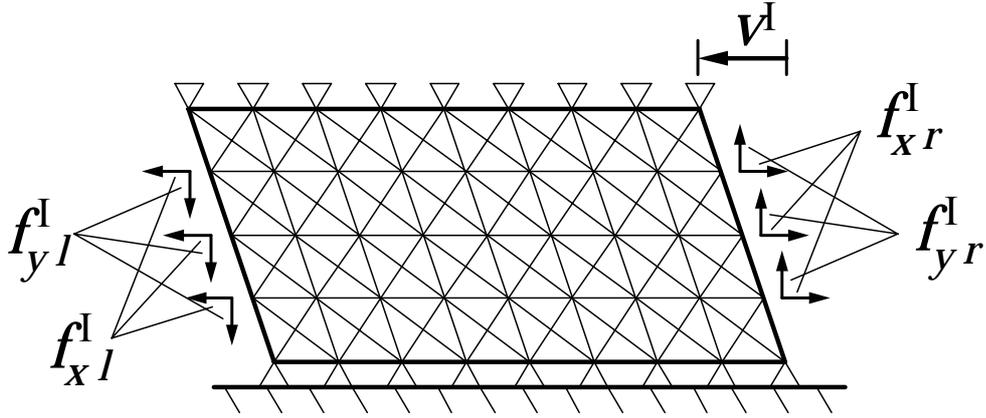


図 5.6 境界条件

以外の内部の節点に属する量を表す。また、 $\bar{\cdot}$ は、指定量を表す。

両側面の境界条件(5.15)式、(5.16)式から、次式が成り立つ。

$$\dot{\mathbf{D}}_r = \dot{\mathbf{D}}_l, \quad \dot{\mathbf{P}}_r + \dot{\mathbf{P}}_l = \mathbf{0} \quad (5.18)$$

よって、(5.17)式は、次のように縮約できる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ir} + \mathbf{K}_{il} & \mathbf{K}_{io} \\ \mathbf{K}_{ri} + \mathbf{K}_{li} & \mathbf{K}_{rr} + \mathbf{K}_{rl} + \mathbf{K}_{lr} + \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{ro} + \mathbf{K}_{lo} \\ \mathbf{K}_{oi} & \mathbf{K}_{or} + \mathbf{K}_{ol} & \mathbf{K}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}}_i \\ \dot{\mathbf{D}}_r \\ \bar{\mathbf{D}}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{P}}_o \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

これから、第1行、第2行について、定数項を右辺にまとめて、変位変化率についての方程式が得られ、次のように表現できる。

$$\mathbf{K}^* \dot{\mathbf{D}}^* = \dot{\mathbf{P}}^* \quad (5.20)$$

ここで、

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ir} + \mathbf{K}_{il} \\ \mathbf{K}_{ri} + \mathbf{K}_{li} & \mathbf{K}_{rr} + \mathbf{K}_{rl} + \mathbf{K}_{lr} + \mathbf{K}_{ll} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{D}}^* = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}}_i \\ \dot{\mathbf{D}}_r \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}^* = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{io} \\ \mathbf{K}_{ro} + \mathbf{K}_{lo} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_o$$

方程式(5.20)は、自明解として、前節で求めた、歪が一様な変化率解を持つ。これを、 $\dot{\mathbf{D}}^{*f}$ とし、 $\dot{\mathbf{D}}^*$ を、 $\dot{\mathbf{D}}^{*f}$ とそれとの差に分解する。

$$\dot{\mathbf{D}}^* = \dot{\mathbf{D}}^{*f} + \dot{\mathbf{D}}^{*b} \quad (5.21)$$

$\dot{\mathbf{D}}^{*f}$ は、(5.20)式の解であるから、次式が成り立つ。

$$\mathbf{K}^* \dot{\mathbf{D}}^{*f} = \dot{\mathbf{P}}^* \quad (5.22)$$

(5.21)式を、(5.20)式に代入して、次式を得る。

$$\mathbf{K}^* (\dot{\mathbf{D}}^{*f} + \dot{\mathbf{D}}^{*b}) = \dot{\mathbf{P}}^* \quad (5.23)$$

(5.22)式と(5.23)式の差を取り、次の同次方程式を得る

$$\mathbf{K}^* \dot{\mathbf{D}}^{*b} = \mathbf{0} \quad (5.24)$$

歪の非一様化は、(5.20)式における非自明解の存在で特徴づけられ、これは、(5.24)式における非零解が存在することに対応する。よって、次式が歪の非一様化現象の発生条件と

なる。

$$\Lambda_1 = 0 \quad (5.25)$$

ここで、 Λ_1 は K^* の 1 次固有値である。

降伏は全要素で同時に起こるため、(5.25)式の左辺は不連続に変化する場合もあり、次式を歪の非一様化現象の発生条件とする。

$$\Lambda_1 \leq 0 \quad (5.26)$$

前節で求めた、歪が一樣な定常状態解列の中で、(5.26)式を最初に満たす定常状態を見だし、これを、歪の非一様化現象の発生の予測解とする。

5.7 解析例

図 5.7 に示す解析モデルに対して、本理論による歪の非一様化現象の予測解を求める。要素内変位場を線形近似した 2 次元有限要素により離散化する。モデルを構成する材料

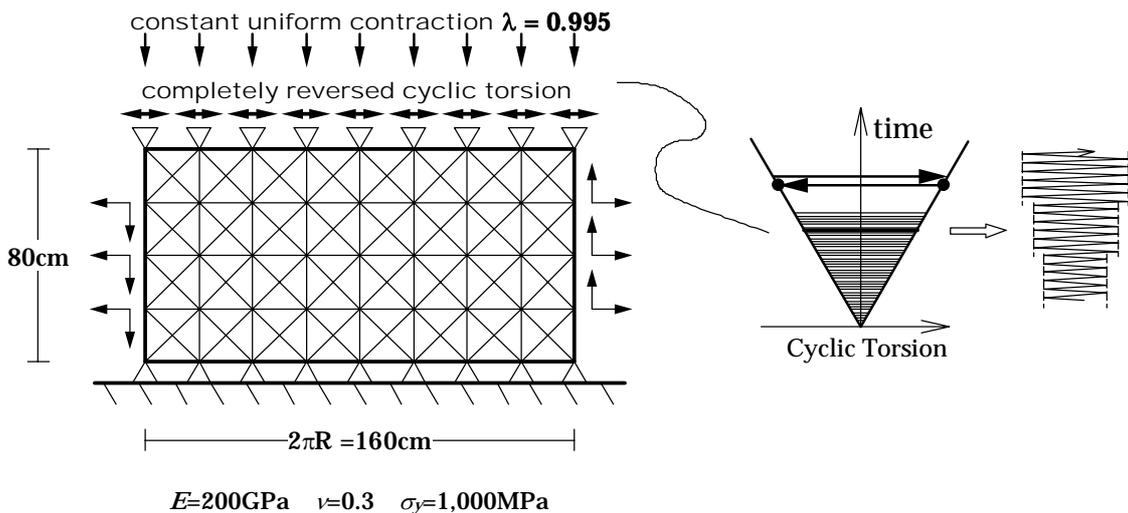


図 5.7 解析モデル

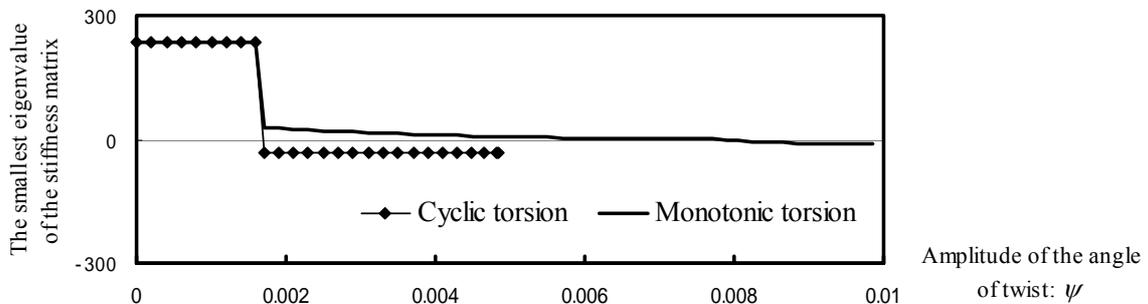


図 5.8 定常状態経路解析の剛性行列と単調載荷時の剛性行列における 1 次固有値の変化

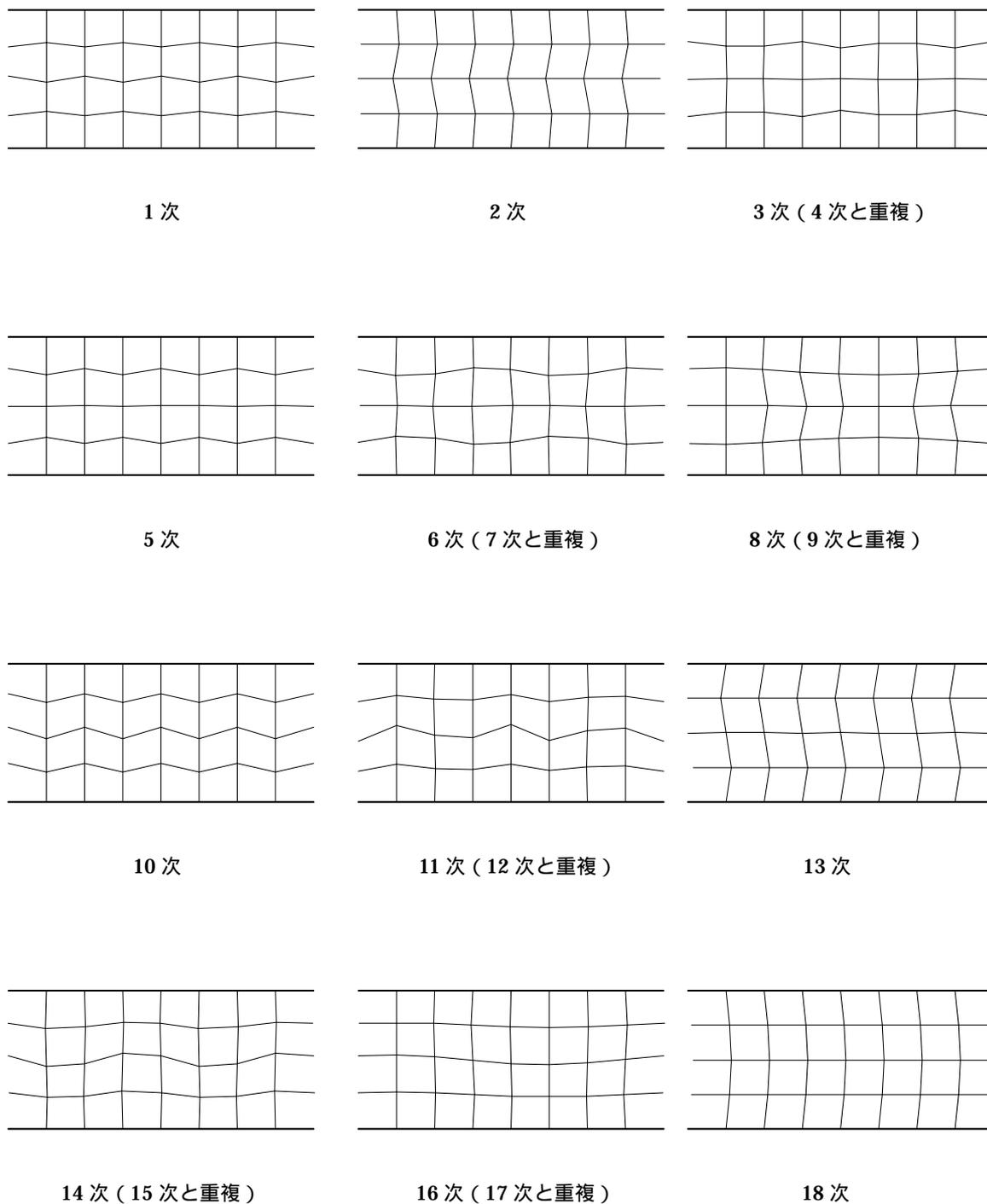


図 5.9 定常状態経路の分岐モード

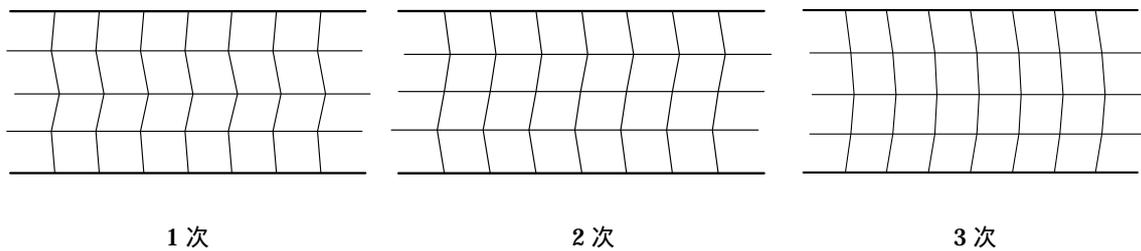


図 5.10 単調載荷時の分岐モード

は von Mises の降伏条件に従う完全弾塑性材料で、材料定数は図 5.7 に示した通りである。

軸方向には、stretch が 0.995 となるように一様な一定強制変位を作用させる。円周方向には、5.2 節で述べた繰り返しねじれ載荷を行う。

ねじれ角振幅 ψ の増加に対する K^* の 1 次固有値 Λ_1 の変化を図 5.8 に示す。 $\psi=0.0017$ 付近で、全要素が同時に降伏し、これによって、 K^* の固有値が 18 個、同時に負になり、これだけの個数の定常状態経路分枝を持つ多重分岐点となる。負の固有値の固有モードをすべて図 5.9 に示す。2 次、13 次、18 次の 3 つの固有モードは、軸対称であるが、その他の固有モードは、円周方向にも波打つモードとなっている。このような円周方向に波打つ変形は、図 5.1 の鋼管の実験結果における円周方向の歪分布の不均一性に対応している。また、低次モードほど波長が短く、柱や平板の座屈モードとは逆転しており、Biot の Internal buckling 理論と類似している。このような細かく波打つ変形モードの発生により、軸方向にも円周方向にも歪の非一様化が引き起こされることが予測される。

更に、同一モデルについて、ねじれ載荷を単調に 1 方向に作用させたときの分岐点解析を行う。このときの、ねじれ角に対する、剛性行列の 1 次固有値の変化を図 5.8 に示す。単調載荷に対しても、繰り返し載荷と同じねじれ角で、全要素が同時に降伏するが、降伏時には、剛性行列は正則であり、剛性行列が特異となるのは、 $\psi=0.0065$ 付近で降伏時よりもはるかに大きなねじれ角においてである。3 個の固有値が、ほぼ同じねじれ角で 0 になり、固有モードを図 5.10 に示す。これら 3 個の分岐モードはすべて軸対称である。よって、上述の繰り返し載荷時に発生が予測される円周方向における歪の非一様化を引き起こす分岐モードは、単調載荷時には現れないことがわかる。

5.8 履歴挙動解析との比較

本節では、前節で理論解析を行ったモデルと同一のモデルについて、初期不整を与えて、履歴挙動解析を行い、理論の妥当性を検証するとともに、履歴挙動性状の特徴を明らかにする。

図 5.11 に示すように、軸方向の強制変位について、節点毎にわずかの不整を与える。こ

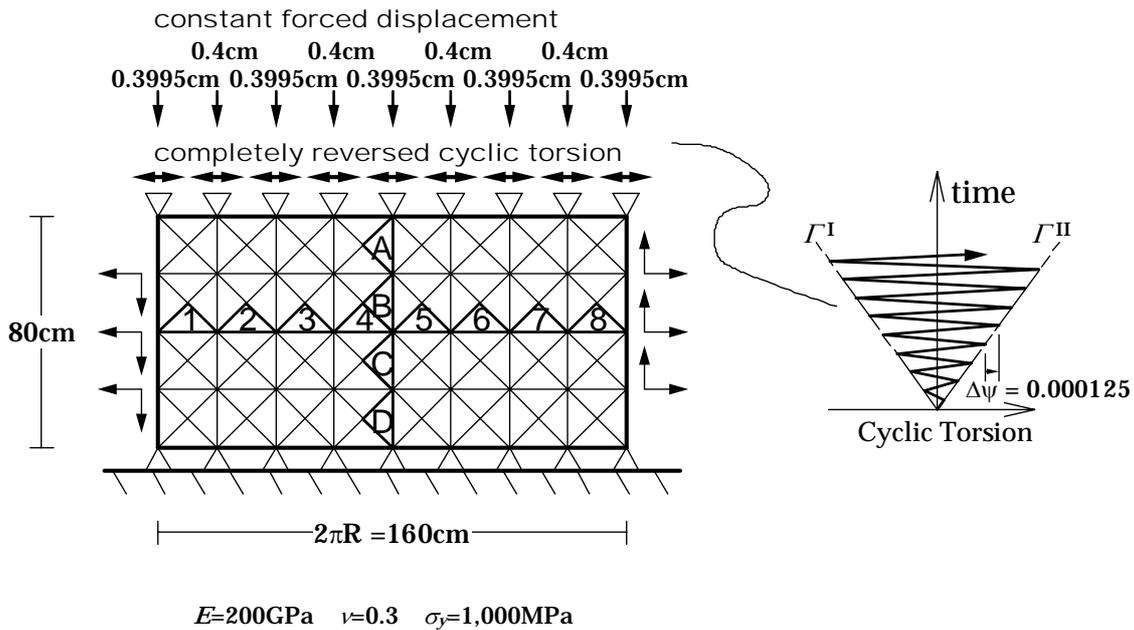


図 5.11 解析モデルと荷重プログラム

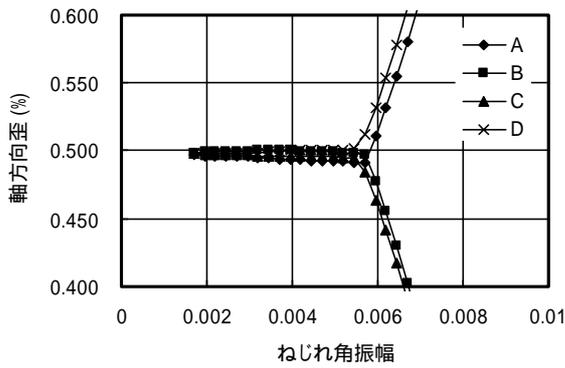
れに半サイクル毎に振幅が少しずつ増加する完全両振りねじり変形を作用させ、この荷重プログラムに対する履歴挙動を増分解析法により追跡する。なお、複合非線形の扱いについては非常に高い精度が要求されるため、増分解析法として参考文献[7]の増分摂動法を採用する。

(1) 歪の推移

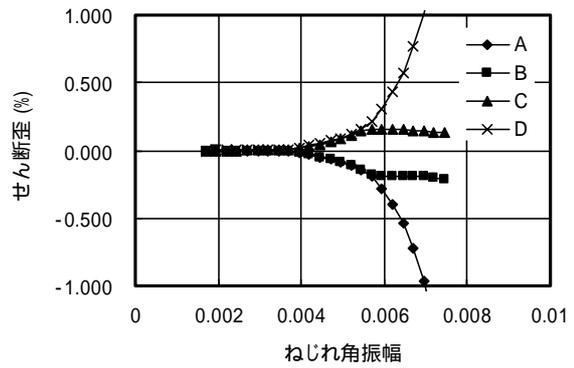
図 5.11 に示した軸方向に並ぶ A、B、C、D の 4 つの要素について、 Γ^I 反転時における軸方向歪およびせん断歪のねじれ振幅の増加に対する推移を図 5.12 に示す。せん断歪については、初期不整を与えないような歪を生じる場合との差を示した。弾性範囲では歪はほぼ一様で、降伏は全領域でほぼ同一の振幅で起こる。降伏後、ねじれ角が 0.004 の付近から、A、B の 2 つの要素と C、D の 2 つの要素の間で、せん断歪のばらつきが増大していき、さらに、ねじれ角が 0.0055 の付近からは、4 つの要素で、せん断歪のばらつきが増大している。軸方向歪については、ねじれ角が 0.0055 の付近から、A、D の 2 つの要素と B、C の 2 つの要素の間で、ばらつきが急激に増大している。

これに対して、同じ初期不整を含む軸方向強制変位を与えたモデルに、単調ねじれ荷重を作用させた場合の解析も行った。図 5.13 に、同じ 4 つの要素の軸方向歪およびせん断歪の推移を示した。単調荷重では、軸方向歪およびせん断歪とも、繰り返し荷重時に見られた歪のばらつきが増大は見られない。

また、図 5.14 に、図 5.11 に示した円周方向に並ぶ 1~8 の 8 つの要素について、繰り返し荷重時の軸方向歪の推移を示した。これらの円周方向に並ぶ要素の間には、軸方向に並

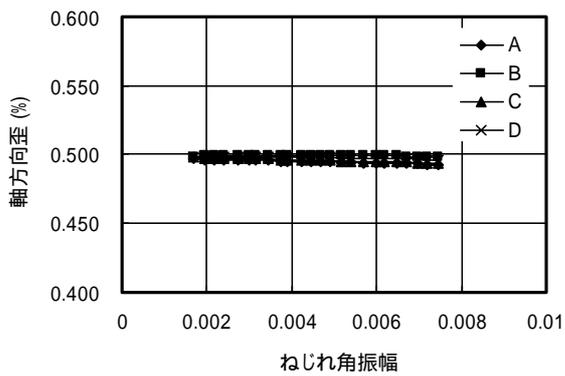


(a) 軸方向歪の推移 ; Γ^1 反転時

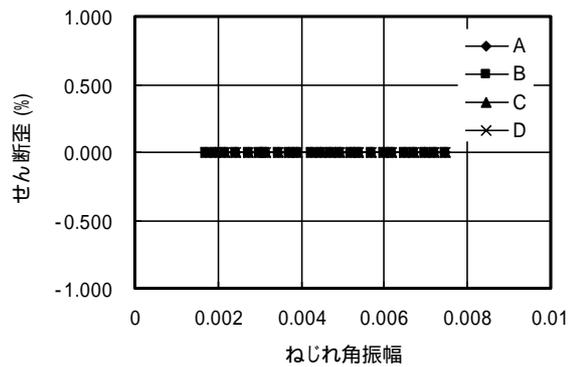


(b) せん断歪の推移 ; Γ^1 反転時
(一様な歪成分との差)

図 5.12 繰り返し载荷時における軸方向に並ぶ要素間の歪の比較



(a) 軸方向歪の推移



(b) せん断歪の推移
(一様な歪成分との差)

図 5.13 単調载荷時における軸方向に並ぶ要素間の歪の比較

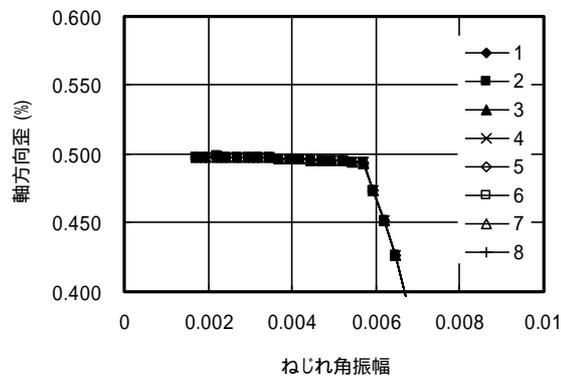


図 5.14 繰り返し载荷時における円周方向に並ぶ要素間の歪の比較 ; Γ^1 反転時軸方向歪

が要素の間に見られた歪のばらつきの増大は生じていない。

(2) 変形モードの比較

図 5.15 に、繰り返し载荷時の反転点における変形について、初期不整を与えない様な変形を生じる場合との差を示した。いずれの図も中央点の円周方向変位で基準化して描いてある。前節の図 5.9 に示した、理論解析における次数の最も高い 18 次の分岐モードが生じている。上述の繰り返し载荷時における歪のばらつきの増大は、この分岐モードの発生によるものであることがわかる。

一方、図 5.16 に、単調载荷時の変形について、初期不整を与えない場合との差を示した。繰り返し载荷時におけるねじれ角 0.0037 の変形図と同じ倍率で拡大して描いてある。単調载荷時には、繰り返し载荷時におけるような分岐モードの発生はなく、ほぼ一樣な変形を生じていることがわかる。

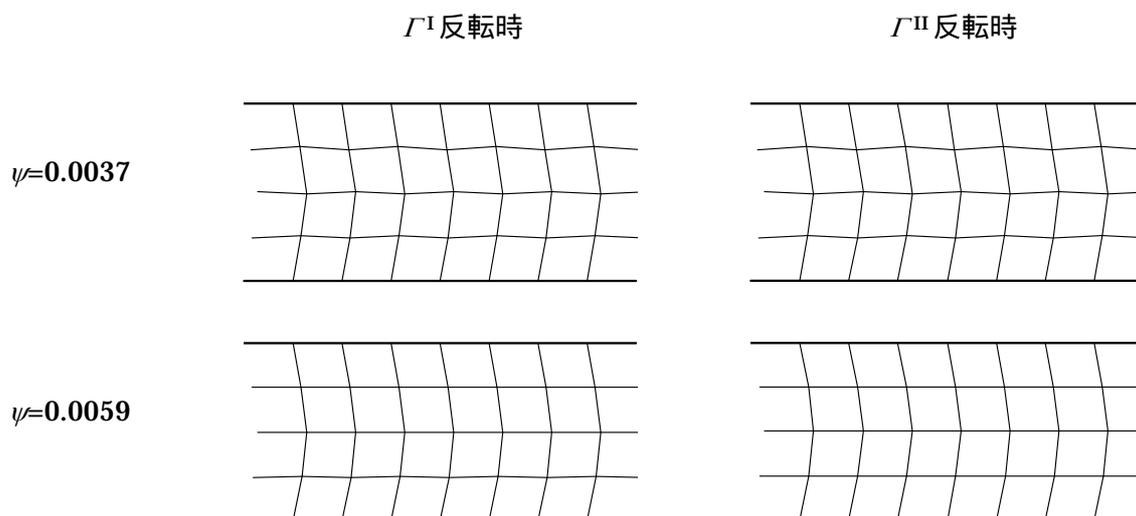


図 5.15 繰り返し载荷時の反転点変形モード
(一樣な変形成分との差、中央点の円周方向変位で基準化)

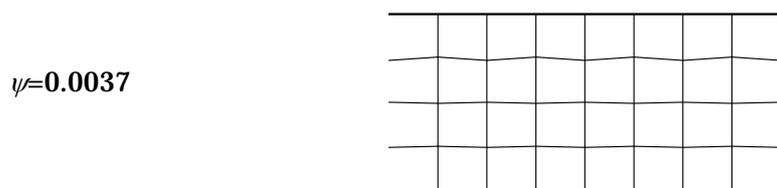


図 5.16 単調载荷時の変形モード
(一樣な変形成分との差、 $\psi=0.0037$ の繰り返し载荷と同じ倍率で拡大)

(3) 応力状態の推移

図 5.17 に、繰り返し载荷時における応力状態の推移を示した。降伏後、ねじれ角が 0.0039 になるまでは、両反転時応力点とも降伏曲面に達するシェイクダウン状態を呈する。図 5.15 に示した分岐モードの発生により、ねじれ角が 0.0039 において、片側反転時の応力点が降伏曲面を離れ、解析モデルの上半分と下半分で、それぞれ反対側の反転時応力点が降伏曲面に達するシェイクダウン状態を呈する。さらに振幅を増加させると、ねじれ角が 0.0056 において、中ほどの 2 列の全要素で、もう片方の反転時応力点も降伏曲面を離れ、以降の振幅増加に対して、弾性挙動を呈する。この中ほどの 2 列の全要素が弾性挙動を示すことにより、図 5.12 に示したような、非常に急激な歪のばらつきが増大が起こっていることがわかる。

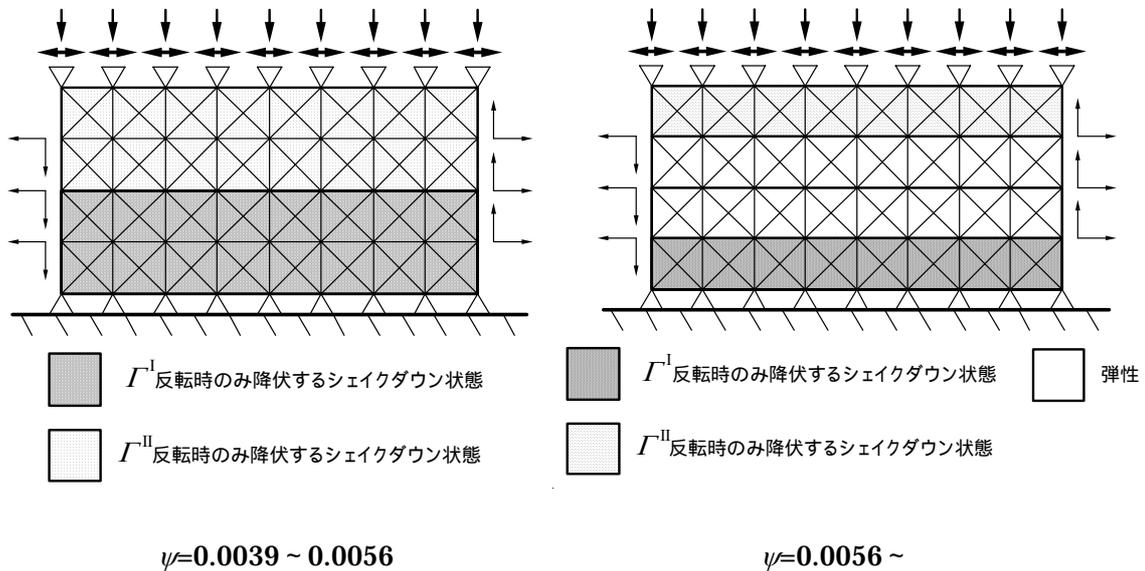


図 5.17 応力状態の推移

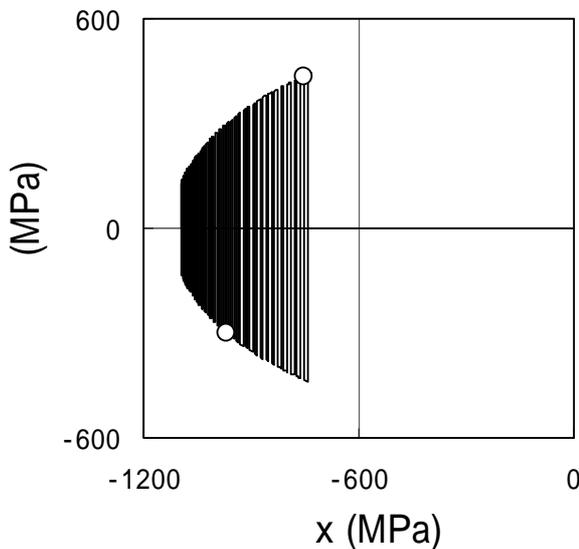


図 5.18 要素 C の応力の推移
(○ は降伏曲面を離れた反転時応力点を表す)

よって、本履歴挙動解析においては、理論解析における分岐モードのうち、最も次数の高いモードの発生により、歪の非一様化が起こっていることがわかる。但し、この分岐モードは、理論予測では最も起こりにくいモードである。理論解析における低次の分岐モードの発生は、本解析では見られなかった。しかし、高次モードであれ、理論において予測された分岐モードのうちの 1 つであり、このモードの発生により、単調荷重時の分岐点振幅より小さい振幅で、歪の非一様化が起こっている。したがって、本理論の妥当性が例証された。

5.9 まとめ

本章では、以下の条件が成立する場合に限定して、繰り返しねじれ変形を受ける薄肉円筒部材において、歪の非一様化が起こる臨界点を予測する理論を展開した。

肉厚が十分に小さく平面応力状態にあると見なせる

交番塑性変形を生じない

滑らかな降伏曲面に支配される完全弾塑性材料で構成される

2次元有限要素法による離散化モデル

軸方向荷重、ねじれ荷重とも変位制御である

本理論の定式化の要点は以下のようにまとめられる。

- (1) 基本経路に対応する、歪が一様な定常状態列を求める。変位は軸方向荷重とねじれ荷重の 2 つの変位制御パラメータにより決定され、応力は構成則により求める。
- (2) 定常状態の増分変化に対する変化率方程式を導く。この方程式には、自明解として、基本経路をたどる変化率解が存在し、余解が存在する条件として、歪が一様でない定常状態への分岐点条件が導ける。

本理論による数値解析を実施した。実験で計測されている円周方向の歪の非一様化に対応する分岐モードが得られ、また、低次モードほど波長が短く、**Internal buckling** と類似した性質を持つことが明らかになった。単調ねじれ荷重に対する分岐点解析も行い、単調荷重時の分岐点振幅は繰り返し荷重時の分岐点振幅よりはるかに大きく、また、分岐モードは軸対称となった。したがって、円周方向の歪の非一様化を引き起こす分岐モードは、繰り返し荷重時に、単調荷重時の分岐よりはるかに小さい振幅で現れる予測となった。

更に、理論解析を行ったモデルと同一のモデルの履歴挙動解析を行った。繰り返し荷重時において、単調荷重時の分岐点振幅より小さい振幅で、急激に軸方向の歪の非一様化が起こり、本理論予測と整合する結果となった。

参考文献

- [1] 辻文三、西本真佐美、電縫鋼管材の弾塑性ねじれ変形挙動に関する研究、昭和 63 年度日本建築学会近畿支部研究報告集、pp.229-232、1988.
- [2] 辻文三、西本真佐美、電縫鋼管材の弾塑性ねじれ変形挙動に関する研究（その 3）、平

成元年度日本建築学会近畿支部研究報告集、pp.265-268、1989.

- [3] M. A. Biot, *Mechanics of Incremental Deformation*, John Wiley & Sons, New York, 1965.
- [4] M. A. Biot, *Internal Buckling under Initial Stress in Finite Elasticity*, Proc. Roy. Soc. A, Vol.273, pp.306-328, 1963.
- [5] P. Z. Bazant and L. Cedolin, *Stability of Structures, Chapter 11:Three-dimensional Continuum Instabilities and Effects of Finite Strain Tensor*, Oxford University, New York, 1991.
- [6] J. Zhang and Y. Jiang, *An experimental study of inhomogeneous cyclic plastic deformation of 1045 steel under multiaxial cyclic loading*, Int. J. Plasticity, Vol.21, pp.2174-2190, 2005.
- [7] Y. Yokoo, T. Nakamura, and K. Uetani, *The Incremental Perturbation Method for Large Displacement Analysis of Elastic-Plastic Structures*, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.10, pp.503-525, 1976.

第6章 結論

本論文では、1次元梁-柱部材に対して展開されている対称限界理論について、交番塑性領域まで含めて、3次元連続体に対する拡張一般化を行った。対称限界理論では、構成則として、定常状態の増分変化に伴う応力と歪の変化率の関係式が必要である。3次元連続体に対して拡張する際には、多軸応力状態における構成則が必要となるため、この構成則を誘導する部分で1次元梁-柱の場合とは異ってくる。シェイクダウン領域においては、単軸応力状態と同様の誘導方針に従い、構成則を導くことができ、これに基づいて、理論を拡張した。これに対して、交番塑性領域においては、構成則を陽な形で導くことができず、単軸応力状態に対する理論とは全く異なる定常状態経路解析の理論を新たに構築した。これに基づいて、対称限界理論の拡張を行った。これらの基礎理論は、あらゆる種類の構造物に対して、繰り返し载荷の下での臨界現象を解明する際に必要となるものである。建築構造の分野においても、繰り返し水平荷重を受ける骨組およびその構成部材の臨界現象の解明に役立てることができ、これらを考慮して、より合理的な耐震設計とすることが期待できる。

また、本論文では、繰り返し载荷の下での分岐現象の具体的な事例の1つとして、薄肉円筒部材のねじれ変形の下での歪の非一様化現象を取り上げ、上述の基礎理論を応用して、この現象の発生限界を予測する理論を展開した。これも、軸力ねじり複合加力材料実験における歪の不均一化の防止に有用であり、材料実験分野への貢献が期待できる。

本論文では、完全弾塑性体のみを扱っているが、歪硬化体への拡張も、著者らにより既に行われている。交番塑性領域における拡張は、発表論文[11]において概要が示されている。交番塑性領域における拡張理論は、本質的部分は完全弾塑性体と同様であり、本論文では割愛した。シェイクダウン領域における拡張は、完全弾塑性体とは本質的に異なる考え方によって、構成則を誘導することにより行われる。これは樋口公平氏の修士論文における成果であり、著者による成果も加えて、詳細が発表論文[13]に掲載されている。したがって、歪硬化体まで含めて、3次元連続体に対する対称限界理論の一般化はほぼ達成されていると言ってよい。今後は、本論文で扱った歪の非一様化現象の予測のような、様々な実際的な問題への応用が望まれる。

本論文は、本章を含めて、6つの章から構成される。第1章が序論であり、第2章から第4章までは一般理論、第5章は一般理論の実際的な問題への応用である。

第1章では、研究の背景、既往研究の状況、研究の目的を述べ、本論文の構成を示した。既往のいずれの理論を適用しても、本研究の目的である多軸応力状態の構成則モデルに従う3次元連続体の対称限界を予測することはできないことを示した。

第2章では、完全弾塑性材料で構成される3次元連続体に対して、シェイクダウン領域に限定して、対称限界理論の拡張一般化を行った。シェイクダウン状態では、残留塑性歪が一定であり、単軸応力状態と同様の誘導方針に従い、残留塑性歪の消去により、構成則

を導くことができた。この構成則に基づいて、定常状態増分変化に対する変化率方程式を定式化した。初期形状における対称面に関して対称に設けた一对の座標系を導入し、定常状態の対称成分と逆対称成分を新たに定義し、これらに関する方程式に変換した。対称成分に関する方程式と逆対称成分に関する方程式は互いに連成せず、完全に分離され、1次元梁-柱の対称限界理論と共通の特徴が保持されることを示した。2次元有限要素梁-柱モデルについて、履歴挙動解析結果との比較により、理論の正当性を検証した。

第3章では、完全弾塑性材料で構成される3次元連続体に対して、交番塑性領域における定常状態経路解析法までを定式化した。交番塑性領域においては、構成則が陽な形で導けないため、経路の追跡が極めて困難であり、この章が、対称限界理論の一般化の根幹を成す部分である。以下の(1)~(3)の手順により、定常状態変数の変化率を求める解析法を新たに提示した。(1)反転時釣合状態における定常状態変数の変化率を、残留塑性歪変化率を未知量として含む形で表す。(2)反転時釣合状態を出発点として反対側の反転時まで、釣合経路上のすべての時刻の定常状態変数の変化率を、反転時残留塑性歪変化率を未知量として含む形で表していく増分解析を行う。(3)残留塑性歪の軌道が閉じる条件から、反転時残留塑性歪変化率を決定する。更に、(2)の増分解析は、定常状態釣合経路を逆時間方向にたどることにより、弾性過程の釣合経路の追跡を省いて効率化でき、その場合の定式化も示した。2次元有限要素梁-柱モデルについて、履歴挙動解析結果との比較により、理論の正当性を検証した。

第4章では、3章で展開した定常状態経路解析法に基づいて、完全弾塑性材料で構成される3次元連続体に対して、交番塑性領域まで含めて、対称限界理論を拡張一般化した。3章における、定常状態変数の変化率を求める解析は、最終的に、反転時残留塑性歪変化率を求める方程式に帰着され、定常状態経路の特異性は、この方程式に集約されている。これを、2章で定義した対称成分と逆対称成分に関する方程式に変換した。これら2つの方程式は互いに連成せず、完全に分離され、交番塑性領域においても、1次元梁-柱の対称限界理論と共通の特徴が保持されることを示した。以上により導かれた基礎式に基づき、対称限界解析の具体的手順を示した。2次元有限要素梁-柱モデルについて、履歴挙動解析結果との比較により、理論の正当性を検証した。

第5章では、繰り返しねじれ変形を受ける薄肉円筒部材において、ほぼ一様であるはずの歪分布が顕著に非一様化する実験結果が報告されており、この歪の非一様化が起こる臨界点を予測する理論を展開した。肉厚が十分に小さく平面応力状態にあると見なせる薄肉円筒部材を対象とし、2次元有限要素法により離散化近似した。シェイクダウン領域に限定して理論を展開した。まず、基本経路に対応する、歪が一様な定常状態解列を求めた。次に、定常状態の増分変化に関する変化率方程式を導いた。この方程式には、自明解として、上で求めた基本経路をたどる変化率解が存在し、余解が存在する条件として、歪の非一様化現象の発生条件を導いた。本理論による数値解析を実施した。実験で計測されている円周方向の歪の非一様化を引き起こす分岐モードが得られた。低次モードほど波長が短

く、**Internal buckling** と類似した性質を持つことが明らかになった。単調ねじれ荷荷に対する分岐点解析も行い、単調荷荷時の分岐点振幅は繰り返し荷荷時の分岐よりはるかに大きく、また、分岐モードは軸対称となった。したがって、円周方向の歪の非一様化を引き起こす分岐モードは、繰り返し荷荷時に、単調荷荷時の分岐よりはるかに小さい振幅で現れる予測となることを示した。更に、理論解析を行ったモデルと同一のモデルの履歴挙動解析を行った。繰り返し荷荷時において、単調荷荷時の分岐点振幅より小さい振幅で、急激に軸方向の歪の非一様化が起こり、本理論予測と整合する結果となった。

付録：発表論文一覧（審査を受けたもののみ示す）

- [1] 完全弾塑性連続体に対する対称限界理論(第 1 報：シェイクダウン領域についての解析理論)、日本建築学会構造系論文報告集、第 460 号、pp.57-67, 1994. (共著 上谷宏二)
- [2] Symmetry limit theory for three-dimensional continua, in: Proceedings of Plasticity '95, The fifth international symposium on plasticity and its current applications, pp.475-478, 1995. (with Koji Uetani)
- [3] Numerical analysis of the symmetry limit of three-dimensional continua subjected to cyclic reversed loading, in: Proceedings of the 3rd Asia-Pacific Symposium on Advances in Engineering Plasticity and its Applications, pp.851-856, 1996. (with Koji Uetani)
- [4] Symmetry limit theory for three-dimensional continua in the shakedown range, in: Proceedings of the 32nd Solid Mechanics Conference, Zakopane, Poland, pp.385-386, 1998. (with Koji Uetani and Yoshikazu Araki)
- [5] 滋賀県における地震観測システムと観測結果の考察、第 4 回都市直下地震災害総合シンポジウム論文集、pp.601-604、1999. (共著 藤原悌三、福本和正、森井雄史)
- [6] Horizontal Strengths and Dynamic Characteristics of an Existing Wooden Frame House with Thatched Roof, in: Proceedings of Hazards 2000, 2000. (with Kazumasa Fukumoto and Teizo Fujiwara)
- [7] Soil Condition and Seismic Characteristics in Shiga Prefecture, Japan, in: Proceedings of Hazards 2000, 2000. (with Teizo Fujiwara, Kazumasa Fukumoto, Koji Matsunami, and Takeshi Morii)
- [8] Estimation of Site Response and Sediment Thickness using Records from Seismic Observational Network for Strong Motion in Shiga, Japan, in: Proceedings of Hazards 2000, 2000. (with Koji Matsunami, Teizo Fujiwara, Kazumasa Fukumoto, Takeshi Morii, and Isao Wakabayashi)
- [9] Symmetry limit theory for elastic-perfectly plastic continua in the shakedown region, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.48, pp.2035-2056, 2000. (with Koji Uetani and Yoshikazu Araki)
- [10] A method for steady-state path analysis of three-dimensional continua in the alternating plasticity states, in: Proceedings of the Third International Conference on Advances in Structural Engineering and Mechanics, Seoul, Korea, pp.663-674 (CD-ROM), 2004. (with Koji Uetani and Yoshikazu Araki)
- [11] Symmetry limit theory for three-dimensional continua using a bounding surface plasticity model, in: Proceedings of McMat2005, 2005 Joint ASME/ASCE/SES

- Conference on Mechanics and Materials, Baton Rouge, LA, No.598 (CD-ROM), 2005.
(with Koji Uetani)
- [12] Symmetry limit theory for elastic-perfectly plastic structures in the alternating plasticity region, in: Advances in Steel Structures, Proceedings of ICASS'05, Shanghai, China, Vol.2, pp.1527-1532, 2005. (with Koji Uetani)
- [13] Symmetry limit theory for work-hardening structures in the shakedown region, in: Behavior of Steel Structures in Seismic Areas, Proceedings of STESSA 2006, Yokohama, pp.549-554, 2006. (with Koji Uetani and Kohei Higuchi)
- [14] The occurrence limit of strain nonuniformity of thin-walled cylinders subjected to cyclic torsion, Key Engineering Materials, Vol.340-341, pp.1411-1416, 2007. (with Koji Uetani and Tomohiro Mikami)
- [15] The Initiation of Strain Nonuniformity in Thin-walled Cylinders Subjected to Cyclic Torsion Analogous to Internal Buckling, in: XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics CD-ROM Proceedings, Adelaide, Australia, SM17::Stability of structures, 2008. (with Koji Uetani)
- [16] 高軸力下で繰り返し载荷を受けるT字形架構の崩壊挙動に関する実験、鋼構造年次論文報告集、第16巻、pp.429-436、2008。（共著 永田明日香）

謝辞

上谷宏二先生（現京都大学教授）には、4回生初めの研究室配属以来、4回生時におけるゼミ、先生の指導の下で行った卒業研究、卒業後に米子高専助手になってからの本学位論文に向けての研究活動と、24年もの長い年月にわたって、ご指導を受けてまいりました。思えば、先生に、学位論文に向けて、“交番塑性領域における定常状態経路解析”のテーマを示されたのは、米子高専助手に着任して間もない頃でありました。構成則を導けない問題において、どうやって解を求めるか、また、更に、どうやって臨界点を予測するか、相当の難問のように思えました。その際に、「木の根、幹をしっかりさせておくことが最も大切で、やがて、枝葉を茂らせ、花を咲かせるのは何とでもなる」「世の中でこんなことを考えているのは我々だけだよ」等々の先生が常々おっしゃっておられた言葉は、この難問に立ち向かう強い支えとなりました。やがて、5年かけて、本論文第3章の基本的部分を完成し、この難問の解決の目途を立てることができました。しかし、それから、プログラミングやエラーの消去に手間取り、また、理論の整備や表現の練り直しに歳月を要し、その間に得られた成果も加えて、本学位論文の完成までには、さらに15年もの長い年月がかかってしまいました。これだけの長い期間、先生からは、終始、ご指導をいただくことができ、また励ましいただきました。完成にこぎつけられたのは、偏に先生のおかげであります。ここに深甚なる感謝の意を表します。

中村恒善先生（京都大学名誉教授）には、講義において構造力学の面白さを教えていただき、構造力学を専攻することを決意するに至ったのは、先生のおかげであります。また、4回生のときの講座担任として、進路相談の折に研究者となることを強く勧めて下さり、米子高専助手として研究者の道を歩むきっかけを与えて下さったのも、先生のおかげであります。本論文に関してご指導を受ける機会が設けられなかったものの、本論文の研究成果を上げられたのは、このような筆者の京都大学在学時代に受けた先生のご指導とご厚情があったのであります。深く感謝申し上げます。

また、筆者は、平成5年から平成6年にかけて、上谷宏二先生（前出）、大崎純先生（現京都大学准教授）の紹介により、塑性学の世界的権威である、米国アイオワ大学のH. C. Wu教授および米国アイオワ大学のY. F. Dafalias教授の下で研究活動に携わる機会を得ました。H. C. Wu教授は、塑性流れ理論とは異なる塑性理論として名高いEndochronic理論が開始されたアイオワ大学において、それを引き継ぎ、実験的研究を中心に進めておられる方です。Y. F. Dafalias教授は、繰り返し応力に対する構成則モデルとして最も多く利用されているBounding Surface Plasticity Modelの提案者であります。本論文の核心部分である第3章の基本的部分の完成は、留学前であったものの、その後の理論の整備、および、歪硬化体への拡張は、これらの留学中の経験があったからこそ行えたものであります。両先生に深く感謝申し上げます。

井上一朗先生（現岡山理科大学教授）、林康裕先生（現京都大学教授）、田村武先生（現

京都大学教授)には、ご多忙の折、本論文についての議論の機会を与えていただき、大変有意義なご指摘を賜りました。深く感謝申し上げます。

最後に、本論文の研究成果を上げ、このような論文にまとめる能力を持つまでに育ててくれた両親に感謝します。

平成 21 年 4 月

小 林 正 実