【 97 】

氏　　　名	阿　部　孝　順（あ　べ　こう　じゆん）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	論理博第667号
学位授与の日付	昭和54年11月24日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	On the homotopy types of the groups of equivariant diffeomorphisms （同変微分同相群のホモトピー型について）
論文調査委員	（主査）教授 島田信夫　教授 中野茂男　教授 松浦重武

論　文　内　容　の　要　旨

C^∞-多様体Mからそれ自身への微分同相写像全体 $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ は写像の合成により群をつくり，さらに C^∞-位相によって位相群となる。この位相群の大域的研究は，多様体の分類理論や葉層構造の問題などと密接に結びついて，微分位相幾何学における重要な課題となっている。然し，この群は或る意味で無限次元 Lie 群とも考えられる非常に大きなものであるので，そのホモトピー型を捉えることが有意義であり，かつ実際的な目標となる。

申請者はこの問題に関連して，コンパクト Lie 群Gが連結閉多様体Mに作用している場合を考察し，Mの同変微分同相群 $\mathrm{Diff}_G^\infty(M)_0$（恒等写像の連結成分）のホモトピー型を求めることを目ざした。そのため，特に，軌道空間 M/G が閉区間 〔0, 1〕 に同相となる場合に限定することにより，具体的にホモトピー型を決定し得たものである。

この場合，多様体Mは 〔0, 1〕 の点 t をパラメターとする軌道族 $\{\overline{M}_t\}$ に分解されるが，それらは，主軌道型 $G/H\approx\overline{M}_t(0<t<1)$，$G/K_0\approx\overline{M}_0$ および $G/K_1\approx\overline{M}_1$ のたかだか三つの軌道型に分類される。ここでGの部分群H，K_0，K_1 については，$H\subset K_i$，$K_i/H\approx S^{n_i}$（n_i 次元球面，$i=0, 1$）という関係がある。

申請者は，$\overline{M}_i$ の G-不変チューブ状近傍 $M_i(i=0, 1)$ が G/K_i 上の胞体バンドルであり，Mは，M_0 と M_1 とを，その境界上の G-微分同相 $\eta:M_0\approx M_1$ によって貼合せたもの：$M\approx M_0\cup_\eta M_1$ と考える。また $M_i\approx G/H$ から，この貼合せ写像 η を N(H)/H の元と見なす，ここで N(H) はHの正規化群である。この状況のもとで申請者は次の結果を得た。

主定理，$\mathrm{Diff}_G^\infty(M)_0$ は path 空間 $\Omega(N(H)/H;N(K_0)\frown N(H)/H,\eta(N(K_1)\frown N(H)/H)\eta^{-1})_0$ と同じホモトピー型をもつ。

この結果から，位相群 $\mathrm{Diff}^\infty_G(M)_0$ が，1) 可算 CW-複体のホモトピー型をもつこと，2) $K_0=K_1=G$ の場合は，$(N(H)/H)_0$ と同じホモトピー型をもつこと，3) N(H)/H が有限群のときは，一点に可縮となること等の系が得られる。

証明の粗筋は，自然な連続準同型 P : $\mathrm{Diff}^{\infty}{}_{G}(M)_0 \to \mathrm{Diff}^{\infty}[0, 1]_0$ を調べ，次いでMのレベル保存同変微分同相写像の詳細な検討によって，連続準同型 L : Ker $P \to C^{\infty}([0, 1], N(H)/H)$ を導びき，それを介して定理におけるホモトピー同値性を証明したものであり，変換群論，表現論における諸結果を駆使した綿密な論証に依るものである。

参考論文は，多様体の同変微分同相群は，軌道型がただ一つの場合，離散群として完全（perfect）であることを証明したもので，Mather–Thurston の結果の系統に繋がるものである。参考論文 2 は，球面 S^n にコンパクト Lie 群Gが線型に作用している場合，Gの表現空間への同変埋め込みのイソトピー問題を論じたものである。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

C^{∞}–多様体Mの微分（自己）同相群 $\mathrm{Diff}^{\infty}(M)$ は C^{∞}–位相により位相群となる。この群は，多様体のベクトル野の作る Lie 環に対応する無限次元の Lie 群とも見なされて，多様体の分類，力学系，葉層構造，Gelfand–Fuks コホモロジーなどの諸問題と密接に結びつき，多様体の大域的研究における基本的な概念である。この位相群のホモロジー群やホモトピー群はこれらの諸問題の定式化に重要な表現手段として用いられ，従って，そのホモトピー型の研究が重要となる。

一般的に，$\mathrm{Diff}^{\infty}(M)_0$（恒等写像の連結成分）は可算 CW–複体のホモトピー型をもつことが知られている（R. Palais)。また多様体Mの次元が低い（$\dim M \leq 2$）場合には，S. Smale, J. Eells 等により，具体的にそのホモトピー型が決定されている，然し $\dim M \geq 3$ の場合は一般に非常に困難な問題である。

申請者はこの問題に関連して，主論文においてはコンパクト Lie 群Gが連結閉多様体Mに微分可能に作用している場合を考察し，特にその軌道空間 M/G が閉区間 [0, 1] に同相となるものに対して，G–作用を保つMの微分同相写像の作る同変微分同相群 $\mathrm{Diff}^{\infty}{}_{G}(M)_0$ のホモトピー型を求めた。

この場合，一方では写像を同変なものに制限することにより，また他方では軌道空間 M/G の位相型をなるべく簡単なものに選ぶことによって，問題解決のために多くの利点がもたらされた。

その結果申請者は，極めて簡明な形の主定理 "$M/G \approx [0, 1]$（同相）の場合，$\mathrm{Diff}^{\infty}{}_{G}(M)_0$ は，変換GのMへの作用の軌道型から定まる或る path 空間（論文内容の要旨参照）と同じホモトピー型をもつ" を得た。

この軌道空間 M/G に対する条件は甚だ強い制限に思われるが，実際はこの条件下においても，対 (M, G) に就いて無限に多くのタイプがあり得ることが知られている（Bredon)。

主定理の証明は，コンパクト Lie 群の線型表現で，単位球面へ推移的かつ効果的に作用する場合の，群と等方群に関する Hsiang 兄弟の分類結果をはじめとする変換群論における諸結果を駆使した綿密な論証によっている。

この主定理から，軌道型の指定に応じて，それぞれの場合に，興味ある具体的結果を引出すことができる（論文内容の要旨参照)。

以上の結果は，或る特別な条件のもととは言え，同変微分同相群のホモトピー型について明確な解決を与えたもので，群作用をもつ多様体の範疇で等質空間の次に位するものを取扱い，新らしい視点と手掛り

を供するものとして高く評価できる。実際申請者は，この論文に引続き，上記主定理を$M/G \approx D^n$（n次元円板）の場合に拡張することを企て成功している。この方向でさらに研究発展が期待される。

参考論文二篇は何れも同変微分位相幾何学における興味ある研究である。主論文と併せて申請者の高い学識と研究能力を示すものであり，この方面に寄与するところが多い。

よって，本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。