氏　　　名　芦野隆一（あしの りゅういち）

学位の種類　理学博士

学位記番号　論理博第1138号

学位授与の日付　平成3年3月23日

学位授与の要件　学位規則第5条第2項該当

学位論文題目　On Nagumo's H^s-stability in singular perturbations

（特異摂動における南雲 H^s-安定性について）

論文調査委員　（主査）教授 松浦重武　教授 柏原正樹　教授 河合隆裕

論文内容の要旨

申請者の主論文は，M. Nagumo, Proc. Japan Acad. 35 (1959), 449—454 の結果の再考察と，それを申請者の立場からの解析によって，申請者による特異摂動の理論の問題をさらに深く研究することにある。

m，m′ は自然数として，m＞m′ とする。そうして，階数がそれぞれ m，m′ となる定係数の偏微分作用素の全表象を

$$P_1(\xi)=\sum_{k=0}^{m}p_{1,m-k}(\xi')\xi_1^k,\quad p_{1,0}=\text{定数}\neq 0$$

$$P_2(\xi)=\sum_{k=0}^{m}p_{2,m'-k}(\xi')\xi_2^k,\quad p_{2,0}=\text{定数}\neq 0$$

とする。これらは n 実変数 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の空間 $\mathbf{R}^n$ で考えるが，$\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ はその双対変数であり，$x'=(x_2, \cdots, x_n)$，$\xi'=(\xi_2, \cdots, \xi_n)$ と略記する。

このとき，$\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ を $D=(D_1, \cdots, D_n)$ でおきかえて得られる偏微分作用素を $P_1(D)$，$P_2(D)$ と書く，ただし $D_j=i^{-1}\partial/\partial x_j$ $(i=\sqrt{-1})$ とする。

そこで ε を正の小さなパラメーターとして，

$$L(\varepsilon, D)=\varepsilon P_1(D)+P_2(D)$$

とおき，$x_1=0$ における初期値問題の特異摂動

$$\text{(CP)}\quad \begin{cases} L(\varepsilon, D)u(\varepsilon, x)=f(\varepsilon, x) \text{ in } \mathbf{R}^n \\ D_1^j u(\varepsilon, 0, x')=g_j(\varepsilon, x'),\ j=1, \cdots, m \end{cases}$$

を考察する。$\varepsilon=0$ とした場合の問題は

$$\text{(RCP)}\quad \begin{cases} L(0, D)u(0, x)=f(0, x) \text{ in } \mathbf{R}^n \\ D^j u(0, 0, x')=g_j(0, x'),\ j=1, \cdots, m' \end{cases}$$

の形をとる。

簡単のため初期データは H^∞ に属するものとし，問題 (CP) および (RCP) は $C([0, T]; H^s)$ でどちらも一意可解であると仮定する。

このとき M. Nagumo による H^s-安定性は：$\varepsilon\downarrow 0$ のとき $C^m([0, T]; H^s)$ の元 $u(0, x)$ について (CP)

の安定性を

$$f(\varepsilon,\ x) \to f(0,\ x) \text{ in } C([0,\ T]\,;\ H^s)$$

$$g_j(\varepsilon,\ x) \to g_j(0,\ x') \text{ in } H^s,\ j=1,\ \cdots,\ m'$$

$$g_j(\varepsilon,\ x) \to D_1^{j-1}u(0,\ 0,\ x') \text{ in } H^s,\ j=m'+1,\ \cdots,\ m$$

となる (CP) の $C^m([0,\ T]\,;\ H^s)$ に属する任意の解 $u(\varepsilon,\ x)$ はつねに

$$u(\varepsilon,\ x) \to u(0,\ x) \text{ in } C([0,\ T]\,;\ H^s)$$

となることを意味するものとして定義している。

とくに，この安定性の定義において

$$g_j(0,\ x')=0 \quad j=1,\ \cdots,\ m'$$

とすると一意可解性から $u(0,\ x)=0$ となり，必然的に

$$g_j(\varepsilon,\ x') \to 0 \quad j=m'+1,\ \cdots,\ m$$

を要請することになるが，これは不自然であると申請者はいう。実際，ある種の特異摂動においては，$g_j(\varepsilon,\ x') \not\to 0,\ j=m'+1,\ \cdots,\ m$ であっても

$$u(\varepsilon,\ x) \to u(0,\ x) \text{ in } C([0,\ T]\,;\ H^s)$$

が成立するからである。

そこで，申請者は，次の安定性を導入した

申請者の定義：初期値問題 (CP) が (RCP) の $C^m([0,\ T]\,;\ H^{\max(s,s')})$ に属する解 $u(0,\ x)$ に関して $(s,\ s'+0)$ 安定であるとは，ある正数 r とある正数 M が存在して，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき

$$f(\varepsilon,\ x) \to f(0,\ x) \text{ in } C([0,\ T]\,;\ H^{\max(s,s')})$$

$$g_j(\varepsilon,\ x') \to g_j(0,\ x) \text{ in } H^s,\ j=1,\ \cdots,\ m'$$

$$|\,g_j(\varepsilon,\ x')\,|_{s'+r} \leqq M,\ j=m'+1,\ \cdots,\ m$$

をみたす (CP) の $C^m([0,\ T],\ H^{\max(s,s')})$ に属する任意の解 $u(\varepsilon,\ x)$ は，つねに

$$u(\varepsilon,\ x) \to u(0,\ x) \text{ in } C([0,\ T],\ H^{\max(s,s')})$$

を満たすときにいう。

申請者は，この安定性を用いて $(s,\ s+0)$ 安定性は，Nagumo による H^s-安定性の条件より真に弱いことを示している。

さらに申請者は $(s,\ s'+0)$ 安定性のための必要十分条件を，ξ' をパラメーターとする常微分方程式の基本解系 $Y_j(\varepsilon,\ x_1,\ \xi')$，すなわち

$$\begin{cases} L(\varepsilon,\ D_1,\ \xi')Y_j(\varepsilon,\ x_1,\ \xi')=0 \\ D_1^{k-1}Y_j(\varepsilon,\ x_1,\ \xi')=\delta_{j,k}\ \text{（クロネッカーのデルタ）} \end{cases}$$

を用いて，一つの定理に定式化している。

<u>定理</u>　初期値問題 (CP) が (RCP) の $C^m([0,\ T]\,;\ H^{\max(s,s')})$ に属する解 $u(0,\ x)$ に関して $(s,\ s'+0)$ 安定であるための必要十分条件は，ある正数 ε_0 と C_0 が存在して

$$\int_0^T \varepsilon^{-1}\,|\,Y_m(\varepsilon,\ x_1,\ \xi')<\xi'>^{s-s'}\,|\,dx_1 \leqq C_0,\quad 0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$$

$$|Y_j(\varepsilon,\ x_1,\ \xi')<\xi'>^{s-s'}| \leqslant C_0,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,\ j=1,\ \cdots,\ m'$$

かつ，任意の正数 r に対して，正数 ε_n と C_n が存在して

$$|Y_j(\varepsilon,\ x_1,\ \xi')<\xi>^{s-s'-r}| \leqslant C_n,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,\ j=m'+1,\ \cdots,\ m$$

となることである。

ただし $<\xi'>=(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}$ と略記した。

申請者は，さらに，(s, s'+0) 安定であるための十分条件を，例として，強双曲型方程式の場合にあたえている。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

申請者の論文は，偏微分方程式の初期値問題における特異摂動の問題を取扱っているが，従来の研究達のように特定の方程式の問題を取扱うのではなくて，定数係数に限ってはいるが，特異摂動の問題を一般的に理論的に解明する立場から，研究を行っている。参考諸論文も同じ立場である。

このような立場からの研究は，申請者以前には数は少ない。その一人が申請者の主論文の表題に現れる南雲道夫氏である。氏はわが国における偏微分方程式研究の先駆者の一人であるが，特異摂動の問題を一般的に取扱った論文を書いている。

申請者は南雲の論文の結果を詳細に分析して，H^s-安定性の定義が不自然なものであることに気付き，その改良を目指して新しい研究を行ない，その改良に成功して，(s, s'+0) 安定性の概念に到達し，その必要十分条件を得た。

実際，申請者の考察した方程式

$$(\mathrm{CP})\ \begin{cases} L(\varepsilon,\ D)u(\varepsilon,\ x)=f(\varepsilon,\ x)\ \text{in}\ \mathbf{R}^n \\ D_1^{j-1}u(\varepsilon,\ 0,\ x')=g_j(\varepsilon,\ x'),\ j=1,\ \cdots,\ m,\ x_1=0 \end{cases}$$

において

$$L(\varepsilon,\ D)=\varepsilon P_1(D)+P_2(D)$$

の形にあたえ，P_1 は m 階，P_2 は m′ 階の偏微分作用素として，m>m′ とする。

ここで $\varepsilon\to 0$ としたときの極限を考えるのであるが，$\varepsilon=0$ とすれば $L(0,\ D)=P_2(D)$ であり，極限では

$$(\mathrm{RCP})\ \begin{cases} L(0,\ D)u(0,\ x)=f(0,\ x) \\ D_1^ju(0,\ 0,\ x')=g_j(0,\ x'),\ j=1,\ \cdots,\ m',\ x_1=0 \end{cases}$$

となり，初期条件は m′ 個に減っている。

したがって，m−m′ 個の初期条件

$$D_1^ju(\varepsilon,\ 0,\ x')=g_j(\varepsilon,\ x')\quad j=m'+1,\ \cdots,\ m$$

の収束性を要求するのは不自然である。

この点を申請者は解明して，新しい安定性の条件を得たのである。

方法は，部分的フーリエ変換と，相異なる種々のソボレフ空間 H^s の評価式を用いて，基本解の挙動を統制することにあるが，このとき見かけ上に現われる多変数の有理型関数が，実は整関数になることに留

意し，その評価を行列式のラプラス展開を用いて，局所的な評価をたくみに組合せることによって実行している。

この論文と結果と手法は，参考論文とあわせて，この方面の解析に寄与するところが大きい。

申請者の学識の広さを考えて，理学博士の学位を与えるに十分の資格あるものと判断した。