

氏 名	小 倉 幸 雄 おぐ ら ゆき お
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	論 理 博 第 471 号
学位授与の日付	昭 和 49 年 7 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学位論文題目	Asymptotic Behavior of Multitype Galton-Watson processes (多タイプ, ゴルトン-ワトソン過程の漸近的性質)

(主 査)
論文調査委員 教授 渡 辺 信 三 教授 山 口 昌 哉 教授 吉 澤 尚 明

論 文 内 容 の 要 旨

申請者の研究は、確率過程のうちで特に分枝過程と呼ばれるものに関してである。分枝過程とは発生や消滅によってランダムに増減する粒子の集団の数学モデルであり、そのもっとも簡単な場合が Francis Galton によって提起され H. W. Watson と共に研究された。これは分枝過程のうちでは一番単純なものであるが、その故に分子過程の数学的構造をもっとも明確に表現するものとして以後 Galton-Watson 過程の名のもとにさかんに研究されてきた。今日の分枝過程の理論では、より現実の物理的粒子の集団や生物集団等に少しでも合致するよう種々複雑なモデルが考察されているが、Galton-Watson 過程は単純かつ基本的なモデルとして、分枝過程の理論の根幹をなし一般理論の模範としての位置をしめている。Galton-Watson 過程は、粒子の種 (type) が一種のもの (single type) と、多種 (multi-type) からなる場合とがある。一種の場合が易しく、又基本的であるのでくわしく研究されてきた。その際の興味の中心は粒子数 (size) の時間的経過にともなう変動の漸近性質である。典型的な結果は1940年前後に得られた Kolmogorov, Yaglom, Hawkins, & Ulam 等によるもので、これは以後の分枝過程論における模範的定理となった。その後の一種 Galton-Watson 過程の研究はこれらの定理における仮定の制限をゆるめること、乃至その制限の意味を明確にする方向に進み、1968年前後における Kesten, Seneta 等の決定的な結果によりこの方向の理論はほぼ完成したと云える。

一方、多種の場合にも同様の問題が研究されており、Jirina, Sevast'yanov, Mullikin といった人達によって一種の場合と平行した諸結果が得られ、最近では Joffe & Spitzer による重要な結果もある。しかし一種の場合がほぼ完成されているのに対し、多種の場合では多くの点で不完全な結果しか得られていない。特に、これらの結果は平均行列といわれる分枝過程の平均的大きさを表わす行列が positively regular という仮定のもとで得られたものであった。この仮定がないと異なった現象があらわれることは、Chistyakov が簡単な場合に注意した。

申請者の主論文における主要な結果は、この仮定をはずしたときにおこる現象を完全に解明したときに

ある。このために平均行列を既約部分に分解し、それに応じて種のグループ分けを行う。そしてこのグループの間にある半順序を導入しそれを用いて帰納的に粒子数の漸近的性質をしらべていく。その際、この種の各グループにその rank と呼ばれる量が対応し重要な役割をはたす。このような方法による解明の結果、positively regular の仮定をはずしたときは、従来の結果と異なる挙動があらわれ、しかもその挙動のあり方が完全にしらべつくされた。その他、申請者は従来の理論で通常であったモーメントの存在の仮定も、主として Joffe-Spitzer の結果を援用することにより、可能なかぎり弱い条件のもとにこれらの結果を得ている。

尚、数学的にいうと、これらの研究は和が1の正の係数をもった巾級数で定義される多変数関数の合成のくりかえしの漸近的挙動をしらべることである。これに関して Karlin-McGregor は分枝過程から自然に導入されるある無限次元行列のスペクトル分解（固有値問題）の理論を展開することにより興味ある方向をうちだしている。申請者の参考論文は、類似の理論を連続な状態空間をもつ分枝過程でおこなったものであるが、ここで得られた結果は本論文と深い関連がある。

論文審査の結果の要旨

一種の Galton-Watson 過程の漸近的性質に関してはほぼ理論が完成した感があるが、多種の場合はいくつかの点で未完成であった。従来の理論では平均行列が positively regular という仮定のもとに一種の場合と平行した諸結果が得られていた。この仮定をはずすと異なった現象があらわれることはソ連の Chistyakov 等によって注意されていたが、その事情の完全な解明は残された問題であった。又 Chistyakov 等の与えた例はすべて連続時間の Galton-Watson 過程の場合であり、それは離散時間の特別な場合と考えられるが、離散時間一般で考察するときはより大きな困難が伴う。

申請者が主論文で得た主要な結果は、この平均行列が退化する場合における現象を一般の離散時間の多種 Galton-Watson 過程に対し、ほぼ完全に解明したことである。そのために申請者は、平均行列を既約部分に分解しそれを通じて種をいくつかのグループに分類する。そしてこの種のグループの間にある半順序を導入し、それに関する帰納法によって一般の場合の漸近法則を得ることに成功している。従来の結果である平均行列が positively regular の場合は、おおまかにいって、平均行列の Perron-Frobenius 根 ρ ($\rho \leq 1$) が1より小のとき、 n 世代の確率母関数は不動点に ρ^n のオーダーで近づくが、 $\rho = 1$ のときは $\frac{1}{n}$ のオーダーで近づく。ところが申請者の結果によると、平均行列が positively regular でないときには、 $\rho^n \cdot n^\alpha$ ($\alpha > 0$) のオーダーで近づくことがおこる。この α は上の種の各グループに対し一意的に定まり、上にのべた半順序を用いて帰納的に求めることができる。又臨界的な場合、すなわち $\rho = 1$ のときには n^α ($0 < \alpha < 1$) のオーダーで近づくことがおこる。そしてこの結果を得るに際してのモーメントに関する仮定も、Joffe-Spitzer の結果の援用により、可能なかぎり弱い条件になっている。申請者がこのような結果の予想を得たのは、申請者が Karlin-McGregor によって導入された Galton-Watson 過程のスペクトル表現定理（Galton-Watson 過程に自然に付随する無限次元行列の固有値問題）を追求している時であり、事実申請者の結果はこの理論と密接な関連がある。申請者のこの方向に関するオリジナルな仕事は参考論文その他にまとめられ公表されている。

このように、申請者の主論文における仕事は、分枝過程の研究に重要な貢献をなしたものである。又主論文、参考論文にみられるこの方面の学識は秀でており、事実申請者は現在我国において、この分野でもっとも活発な活動を続けている研究者の一人である。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。