量子系ランジュバン方程式と量子系確率リウヴィユ方程式

筑波大学　物理学系　　有 光 敏 彦

1　まえがき

統計力学の基本的アプローチは、おおきく4つに分けられる。それらは、ボルツマン方程式、マスター方程式、ランジュバン方程式、確率リウヴィユ方程式による扱いである。

ボルツマン方程式によるアプローチでは、一粒子分布関数（古典統計力学では、μ－位相空間での）を扱い、不可逆性を導入するのに「分子混沌の仮設」あるいはそれと同等のものを仮定する。マスター方程式によるアプローチでは、注目している系のアンサンブルの要素系の分布を記述する密度演算子を扱う。古典統計力学の言葉を借りれば、Γ－位相空間内の点の分布を考えるのである。各点は、注目している系のアンサンブルの要素系の運動状態を表している。不可逆性は、Γ－空間の粗視化により導入される。ランジュバン方程式によるアプローチでは、物理量の経路を取り扱う。この経路は、予め定められた確率過程の下に、確率微分方程式により定まる。確率リウヴィユ方程式によるアプローチでは、Γ－空間内のひとつの代表点の経路分布を扱う [1]-[3]。経路の分布は、乱雑力の時系列での分布の反映である。

Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics（ＮＥＴＦＤ）の体系は、密度演算子に対する「時間非畳み込み形式」（ＴＣＬ）の射影演算子減衰理論の議論 [4, 5] を基に、いわば「対応原理」と呼べるものにより、はじめてその建設が始まった [6, 7]。まもなく、ＮＥＴＦＤの体系が、7つの基本原理に基づいて成り立っていることが発見された [8]。さらに、繰り込まれた相互作用表示での時間推進演算子（ティルディアン・ハミルトニアン）に対する最も一般的な表式が、一粒子分布関数とセットで求められた [9, 10]。従って、ＮＥＴＦＤの体系は、ボルツマン方程式によるアプローチやマスター方程式によるアプローチと深く関連していることがわかる。これらのアプローチの枠内で、散逸する量子場に対するカノニカル法による定式化が行われ、その構造が従来の場の量子論の構造と非常に似ていることが示された [11, 12]。また、

ＮＥＴＦＤに於ける母汎関数が求められ[13]、さらにＮＥＴＦＤとClosed Time-Path法[14]-[16]との関連が示された[17]。

ＴＣＬ形式の射影演算子減衰理論[4, 5]を応用して、非線形過渡的光学現象の問題を扱っている中で[18]-[29]、開放系を記述するマスター方程式（拡張されたリウヴィユ方程式）を簡便に表記するためには、２種類の演算子を導入する必要のあることがわかったのが、そもそものＮＥＴＦＤ建設のきっかけであった。ＮＥＴＦＤによる過渡的光学過程への応用もすでに幾つかなされ、その有効性が明らかにされている[30]-[35]。

この講演では、ＮＥＴＦＤの体系が、量子ランジュバン方程式や量子確率リウヴィユ方程式によるアプローチをも含めることが出来ることを示す[36, 37]。この拡張により、ＮＥＴＦＤの体系をより深く理解することができ、非平衡統計力学のより広い視野にたって、この体系をさらに拡張、充実することができる。体系の心を簡明に説明できるように、ここでは減衰調和振動子モデルを用いる。

第２節で、量子系ランジュバン方程式を導入する。第３節では、量子系確率リウヴィユ方程式を導入する。第４節は、まとめにあてる。付録Ａで、ボルツマン方程式やマスター方程式に基づいたＮＥＴＦＤの体系を、簡潔にまとめて紹介する。付録Ｂでは、この講演で用いた減衰調和振動子の不可逆性を調べる。

2　量子系ランジュバン方程式

減衰調和振動子に対する量子系ランジュバン方程式は、

$$d_t a(t)^\mu = -(i\omega + \kappa) a(t)^\mu + f(t)^\mu, \tag{1}$$

で与えられる[36, 37]。ただし、$d_t = d/dt$ である。また、ガウシアン乱雑力演算子 $f(t)^{\mu=1} = f(t), f(t)^{\mu=2} = \tilde{f}^\dagger(t)$ 、$\bar{f}(t)^{\mu=1} = f^\dagger(t), \bar{f}(t)^{\mu=2} = -\tilde{f}(t)$ は、

$$< f(t)^\mu > = 0, \tag{2}$$

$$< \bar{f}(t)^\mu f(t')^\nu > = 2\kappa \bar{n}^{\mu\nu} \delta(t - t'), \tag{3}$$

で定義される。ここに、ランダム平均：$< \cdots >$や、行列

$$\bar{n}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \bar{n} & -\bar{n} \\ 1 + \bar{n} & -(1 + \bar{n}) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

を導入した。ただし、

$$\bar{n} = 1/\left(\exp(\beta_R \omega) - 1\right), \tag{5}$$

であり、β_R は、環境の温度 T_Rの逆数である（$\beta_R = 1/T_R$)。乱雑力演算子の相関 (3) は、「第 2 種揺動散逸の定理」を表す。

ティルド共役は、

$$(A_1 A_2)^{\sim} = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2, \tag{6}$$

$$(c_1 A_1 + c_2 A_2)^{\sim} = c_1^* \tilde{A}_1 + c_2^* \tilde{A}_2, \tag{7}$$

$$(\tilde{A})^{\sim} = A, \tag{8}$$

$$(A^\dagger)^{\sim} = \tilde{A}^\dagger, \tag{9}$$

で定義される。ただし、A_i は任意の演算子を表し、c_i は任意の c －数を表す。

量子系ランジュバン方程式 (1) で記述される系の時間発展は、「フォッカー・プランク方程式」

$$\partial_t \mid 0(t) > = -i\hat{H} \mid 0(t) >, \tag{10}$$

で記述される時間発展と同等である。ただし、$\partial_t = \partial/\partial t$ である。ティルディアン・ハミルトニアン $\hat{H}$ は、

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \omega\left(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}\right) \\
&\quad -i\kappa\left[(1+2\bar{n})\left(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger \tilde{a}\right) - 2(1+\bar{n})\, a\tilde{a} - 2\bar{n} a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right] - 2\kappa\bar{n} \\
&= (\omega - i\kappa)\,\bar{a}^\mu a^\mu - i2\kappa \bar{a}^\mu \bar{n}^{\mu\nu} a^\nu + \omega + i\kappa,
\end{aligned} \tag{11}$$

で与えられる。ただし、シュレディンガー表示での熱的 2 重項表記：$a^{\mu=1} = a$, $a^{\mu=2} = \tilde{a}^\dagger$、$\bar{a}^{\mu=1} = a^\dagger$, $\bar{a}^{\mu=2} = -\tilde{a}$ を導入して用いた（付録 A を参照のこと)。

ハミルトニアン (11) の表式は、射影演算子法に基づく減衰理論から、「対応原理」により初めて導かれたものである [6, 7]。ＮＥＴＦＤの体系の建設は、すべてそこから始まったのである。

ところで、ＮＥＴＦＤでのハイゼンベルグ運動方程式が、次のように与えられていることは、注目に値する [6]-[8]。

$$\begin{aligned}
d_t a(t)^\mu &= i\left[\hat{H},\ a(t)^\mu\right] \\
&= -(i\omega + \kappa) a(t)^\mu - 2\kappa \bar{n}^{\mu\nu} a(t)^\nu.
\end{aligned} \tag{12}$$

ＮＥＴＦＤに基づいた散逸を記述する場の量子論は、このハイゼンベルグ運動方程式 (12) を基礎に建設され、調べられた [11, 12]。

この節で導入された量子的ランジュバン方程式は、量子的伊藤方程式 [38, 39] の研究に有力な方法論を提供するであろう。もう一度強調しておくが、ＮＥＴＦＤでは量子系でのフォッカー・プランク方程式と、ランジュバン方程式とが存在する。これは、現在、数学者が進めている量子的伊藤方程式の建設 [38, 39] と、大きく違う点である。そこでは、フォッカー・プランク方程式は、考えに入れられていない。

3　量子系確率リウヴィユ方程式

量子系確率リウヴィユ方程式は、ＮＥＴＦＤの形式で、

$$\partial_t \mid 0_f(t) > = -i\hat{H}_f(t) \mid 0_f(t) >, \tag{13}$$

と与えられる [36, 37]。ただし、

$$\begin{aligned} i\hat{H}_f(t) &= -1/2 \left[\bar{a}^\mu (1+\tau_1)^{\mu\nu} d_t a^\nu + \text{t.c.}\right] \\ &= -1/2 \left[\gamma^{\natural} d_t (a + \tilde{a}^\dagger) + \text{t.c.}\right], \end{aligned} \tag{14}$$

である。ここに、$\tau_1^{11} = \tau_1^{22} = 0,\ \tau_1^{12} = \tau_1^{21} = 1$ であり、また、t.c. はティルド共役の意味である。ところで、$< 1 \mid \gamma^{\natural} = 0$, (50), であるので、$< 1 \mid \hat{H}_f(t) = 0$ が満たされることがわかる。これは、確率の保存 $d_t < 1 \mid 0_f(t) > = 0$ を表している。シュレディンガー表示での演算子 $d_t a^\mu$ は、

$$d_t a^\mu = -(i\omega + \kappa)\, a^\mu + f(t)^\mu, \tag{15}$$

で定義される。乱雑力 $f(t)^\mu$ は、(2) や (3) で与えられている。なお、乱雑力（微視的な情報）を含んでいるので、ティルディアン演算子 $\hat{H}_f(t)$ は、エルミート演算子でもある。

さて、(15) を (14) に代入して、ＴＣＬ形式の射影演算子法 [4, 5] を用いて、量子系確率リウヴィユ方程式 (13) の乱雑平均をとる。そうすると、(13) は、フォッカー・プランク方程式 (10) になる。ただし、

$$\mid 0(t) > = \mid < 0_f(t) >>, \tag{16}$$

であり、ティルディアン演算子 $\hat{H}$ は、$\hat{H}_f(t)$ を用いて、

$$-i\hat{H} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \hat{K}(t_1), \tag{17}$$

で表される。ここに、

$$\hat{K}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{K}_n(t), \tag{18}$$

$$\hat{K}_n(t)=(-i)^n\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ \cdots\int_0^{t_{n-2}}dt_{n-1}<\hat{H}_f(t)\hat{H}_f(t_1)\cdots\hat{H}_f(t_{n-1})>_{o.c.}, \tag{19}$$

を定義して用いた。シンボル $<\cdots>_{o.c.}$ は、「順序付きキュミュラント」[4] の意味で、

$$<\hat{H}_f(t)>_{o.c.}=<\hat{H}_f(t)>, \tag{20}$$

$$<\hat{H}_f(t)\hat{H}_f(t_1)>_{o.c.}=<\hat{H}_f(t)\hat{H}_f(t_1)>-<\hat{H}_f(t)><\hat{H}_f(t_1)>, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
&<\hat{H}_f(t)\hat{H}_f(t_1)\hat{H}_f(t_2)>_{o.c.}\\
&=\ <\hat{H}_f(t)\hat{H}_f(t_1)\hat{H}_f(t_2)>-<\hat{H}_f(t)\hat{H}_f(t_1)><\hat{H}_f(t_2)>\\
&\quad -<\hat{H}_f(t)\hat{H}_f(t_2)><\hat{H}_f(t_1)>-<\hat{H}_f(t)><\hat{H}_f(t_1)\hat{H}_f(t_2)>\\
&\quad +<\hat{H}_f(t)><\hat{H}_f(t_1)><\hat{H}_f(t_2)>\\
&\quad +<\hat{H}_f(t)><\hat{H}_f(t_2)><\hat{H}_f(t_1)>,
\end{aligned} \tag{22}$$

のように、系統的な規則で与えられる。

この節で導入された確率的リウヴィユ方程式によるアプローチは、乱雑力演算子を含んだ場の量子論建設に対して、まったく新しい観点を与えるであろう。このアプローチによりＮＥＴＦＤの応用範囲は、飛躍的に拡大した。というのも、「平衡状態から遠く離れた非平衡状態」の問題では、系を特定するのに、ハミルトニアンやラグランジアンを与えるよりは、確率的運動方程式（ランジュバン方程式）を与えることの方がはるかに多いからである。

4　まとめ

ＮＥＴＦＤの体系が、ボルツマン方程式やマスター方程式によるアプローチばかりでなく、ランジュバン方程式や確率的リウヴィユ方程式によるアプローチをも含み得る広い体系であることを示した。量子系ランジュバン方程式と量子系リウヴィユ方程式によるアプローチを、ＮＥＴＦＤの体系に取り込むことに成功したので、その応用範囲は飛躍的に広がった。なぜなら、「平衡

状態から遠く離れた非平衡状態」の問題は、確率微分方程式の形で与えられることが多いからである。たとえば、ランジュバン方程式、確率的ＴＤＧＬ方程式、など。

この新しい２つのアプローチにより、「確率的場の量子論」建設の足がかりが得られた。その際、確率的運動方程式を書き下すために、粗視変数のセットを特定しなければならない。粗視変数は、巨視的な時空変数に依存する。粗視変数のセットの選び方は、散逸する場の量子論における表現空間の設定に於て本質的な役割を果たすであろう。巨視的な時空変数でラベルされた個々の表現空間は、粗視変数に対する運動方程式のセットで連結される [40] 。この考えは、従来の場の量子論にはないまったく新しいものであり、「動的対称性の破れ」と関連してたいへん興味深いものである [40, 41] 。「平衡状態から遠く離れた非平衡系」の問題では、この「動的対称性の破れ」が常に関わるのである（スピン緩和、レーザーへの応用問題として、[31, 32] を参照のこと）。

A　ボルツマン方程式やマスター方程式に基づいたＮＥＴＦＤの体系

相互作用表示における最も一般的な繰り込まれたティルディアン・ハミルトニアン $\hat{H}_t$ の表式は、

$$\begin{aligned}\hat{H}_t &= \omega(t)\left(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}\right) \\ &\quad -i\kappa\left[\left[1+2n(t)\right]\left(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}\right) - 2\left[1+n(t)\right]a\tilde{a} - 2n(t)a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right] \\ &\quad -id_t n(t)\bar{a}^\mu \tau^{\mu\nu} a^\nu \\ &= \left[\omega(t) - i\kappa(t)\right]\bar{a}^\mu a^\mu - i\left[\partial_t + 2\kappa(t)\right]\bar{a}^\mu n(t)^{\mu\nu} a^\nu + \omega(t) + i\kappa(t), \end{aligned} \tag{23}$$

で与えられる [9, 10] 。ただし、$d_t n(t)$ は

$$d_t n(t) = -2\kappa(t)n(t) + i\Sigma^<(t), \tag{24}$$

を満たす。ここに、熱的２重項表記：$a^{\mu=1} = a$, $a^{\mu=2} = \tilde{a}^\dagger$、$\bar{a}^{\mu=1} = a^\dagger$, $\bar{a}^{\mu=2} = -\tilde{a}$、行列 $\tau^{\mu\nu}$: $\tau^{11} = \tau^{21} = 1$, $\tau^{12} = \tau^{22} = -1$ と

$$\begin{aligned} n(t)^{\mu\nu} &= < 1 \mid \bar{a}(t)^\nu a(t)^\mu \mid 0 > \\ &= \begin{pmatrix} n(t) & -n(t) \\ 1+n(t) & -[1+n(t)] \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{25}$$

を導入した。1 体分布関数 $n(t)$ は、

$$n(t) = < 1 \mid a^{\dagger\!\!\dagger}(t) a(t) \mid 0 >, \tag{26}$$

で定義される。

演算子 a, $\tilde{a}^{\dagger}$, etc. は、カノニカル交換関係：

$$\left[a_{\mathbf{k}},\ a^{\dagger}_{\mathbf{k}'}\right] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \qquad \left[\tilde{a}_{\mathbf{k}},\ \tilde{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}\right] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \tag{27}$$

を満たす。「ティルダ付き」と「ティルダ無し」演算子は、互いに可換である。本講演では、演算子 a, $\tilde{a}^{\dagger}$, etc. の、運動量やその他の自由度を区別するための添え字、$\mathbf{k}$ 、を簡単のため省略するが、散逸する量子場を常に扱っていることを念頭においていただきたい。

さて、(23) と (24) の表式は、次の基本要請から導き出された [9, 10]：

a) 熱的真空のティルダ不変性；

$$\mid 0 >^{\sim} = \mid 0 >, \qquad < 1 \mid^{\sim} = < 1 \mid. \tag{28}$$

b) 相互作用表示の定義；

$$a(t) = \hat{S}^{-1}(t) a \hat{S}(t), \qquad \tilde{a}^{\dagger\!\!\dagger}(t) = \hat{S}^{-1}(t) \tilde{a}^{\dagger} \hat{S}(t), \tag{29}$$

ただし、

$$d_t \hat{S}(t) = -i \hat{H}_t \hat{S}(t), \qquad (i \hat{H}_t)^{\sim} = i \hat{H}_t, \tag{30}$$

である。時間推進演算子 $\hat{H}_t$ は、ティルディアン・ハミルトニアンと名付けられた。これは、必ずしもエルミート演算子ではない。

$$< 1 \mid \hat{H}_t = 0, \tag{31}$$

を満たし、確率の保存 $d_t < 1 \mid 0(t) > = 0$ を保証する。相互作用表示での熱的 2 重項表記を $a(t)^{\mu=1} = a(t)$, $a(t)^{\mu=2} = \tilde{a}^{\dagger\!\!\dagger}(t)$ 、$\bar{a}(t)^{\mu=1} = a^{\dagger\!\!\dagger}(t)$, $\bar{a}(t)^{\mu=2} = -\tilde{a}(t)$ で定義する。

c) 熱状態条件；

$$a(t) \mid 0 > = f(t) \tilde{a}^{\dagger\!\!\dagger}(t) \mid 0 >, \qquad < 1 \mid a^{\dagger\!\!\dagger}(t) = < 1 \mid \tilde{a}(t), \tag{32}$$

ただし、$f(t) = n(t)/(1 + n(t))$ である。

生成消滅演算子 $\gamma(t)^{\mu=1} = \gamma(t)$, $\gamma(t)^{\mu=2} = \tilde{\gamma}^{♀}(t)$ 、および $\bar{\gamma}(t)^{\mu=1} = \gamma^{♀}(t)$, $\bar{\gamma}(t)^{\mu=2} = -\tilde{\gamma}(t)$ は、

$$\gamma(t)^{\mu} = B(t)^{\mu\nu} a(t)^{\nu}, \qquad \bar{\gamma}(t)^{\mu} = \bar{a}(t)^{\nu} B^{-1}(t)^{\nu\mu}, \tag{33}$$

により導入される。ただし、「時間に依存するボゴリュボフ変換」*:

$$B(t)^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+n(t) & -n(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

を定義して用いた。生成消滅演算子は、

$$\gamma(t) \mid 0 > = 0, \qquad < 1 \mid \tilde{\gamma}^{\dagger}(t) = 0, \tag{35}$$

なる性質を持つ。

2 点関数 $G(t,t')^{\mu\nu}$ は、

$$\begin{aligned} G(t,t')^{\mu\nu} &= -i < 1 \mid T\left[a(t)^{\mu}\bar{a}(t')^{\nu}\right] \mid 0 > \\ &= \left[B^{-1}(t)\mathcal{G}(t,t')B(t')\right]^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{36}$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t,t')^{\mu\nu} &= -i < 1 \mid T\left[\gamma(t)^{\mu}\bar{\gamma}(t')^{\nu}\right] \mid 0 > \\ &= \begin{pmatrix} G^R(t,t') & 0 \\ 0 & G^A(t,t') \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{37}$$

である。ここに、

$$G^R(t,t') = -i\theta(t-t')\exp\int_{t'}^{t} ds\left[-i\omega(s)-\kappa(s)\right], \tag{38}$$

$$G^A(t,t') = i\theta(t'-t)\exp\int_{t'}^{t} ds\left[-i\omega(s)+\kappa(s)\right], \tag{39}$$

を定義して用いた。

ボルツマン方程式を書き下すことで、モデルを特定することができる。本講演では、減衰調和振動子のモデルを用いる。それは、ボルツマン方程式

$$d_t n(t) = -2\kappa\left[n(t)-\bar{n}\right], \tag{40}$$

で特定される。ただし、$\bar{n}$は、(5) で定義される。ボルツマン方程式 (40) を非摂動ティルディアン・ハミルトニアンの一般表式 (23) に代入すると、(11) を得る [6, 7, 8] 。

---

*時間に依存するボゴリュボフ変換の規格化の定義 [6, 7, 8] を、やや変更した。この変更により、$\mathcal{G}(t,t')^{\mu\nu}$ の表式がより簡単になる。また、本講演で導入された確率リウヴィユ方程式の一般表式において、この変更は本質的である。

このモデルのマスター方程式（シュレディンガー方程式）は、(10) で与えられ、その解は、

$$|\,0(t) > = \exp\left[[n(t) - n(0)]\,\gamma^{♀}\tilde{\gamma}^{♀}\right]|\,0 >, \tag{41}$$

となる。ケット熱真空 $|\,0> = |\,0(0)>$ は、

$$a\,|\,0> = f\tilde{a}^{\dagger}\,|\,0>, \tag{42}$$

で定義される。ただし、$f = n(0)/(1+n(0))$ である。１９８７年に見いだされた [41] 興味深い表式 (41) は、場の量子論における「自発的対称性の破れ」との類推で、「自発的散逸の発現」という概念の可能性を思い付かせた [9, 10, 42, 43, 44] 。この概念の研究は、今後の課題の１つである。

ハミルトニアン (11) は、

$$\hat{H} = \omega\left(d^{\dagger}d - \tilde{d}^{\dagger}\tilde{d}\right) + 2\kappa\bar{n} \tag{43}$$

$$= \omega\left(\gamma^{♀}\gamma_t - \tilde{\gamma}^{♀}\tilde{\gamma}_t\right) - i\kappa\left(\gamma^{♀}\gamma_t + \tilde{\gamma}^{♀}\tilde{\gamma}_t + 2\left[n(t) - \bar{n}\right]\gamma^{♀}\tilde{\gamma}^{♀}\right), \tag{44}$$

と表すこともできる。ただし、$d^{\mu=1} = d,\ d^{\mu=2} = \tilde{d}^{\dagger}$、$\bar{d}^{\mu=1} = d^{\dagger},\ \bar{d}^{\mu=2} = -\tilde{d}$は、

$$d^{\mu} = Q^{-1\mu\nu}a^{\nu}, \qquad \bar{d}^{\mu} = \bar{a}^{\nu}Q^{\nu\mu}, \tag{45}$$

で定義される。ここに、

$$Q^{\mu\nu} = \sqrt{1+\bar{n}}\begin{pmatrix} 1 & \bar{n}/(1+\bar{n}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{46}$$

を定義して用いた。生成消滅演算子 $\gamma^{\mu=1} = \gamma_t,\ \gamma^{\mu=2} = \tilde{\gamma}^{♀}$、$\bar{\gamma}^{\mu=1} = \gamma^{♀},\ \bar{\gamma}^{\mu=2} = -\tilde{\gamma}_t$ は、関係式

$$\gamma(t)^{\mu} = \hat{S}^{-1}(t)\gamma^{\mu}\hat{S}(t), \qquad \bar{\gamma}(t)^{\mu} = \hat{S}^{-1}(t)\bar{\gamma}^{\mu}\hat{S}(t), \tag{47}$$

を通して定義される。対角表現 $\hat{H}$, (43), により、ただちに

$$\begin{aligned} d(t) &= \hat{S}^{-1}(t)d\hat{S}(t) = d\ e^{-\kappa t}, \\ \tilde{d}^{\dagger\dagger}(t) &= \hat{S}^{-1}(t)\tilde{d}^{\dagger}\hat{S}(t) = \tilde{d}^{\dagger}\ e^{\kappa t}, \end{aligned} \tag{48}$$

を得る。一方、ノーマル積表現 $\hat{H}$, (44), によりただちに

$$< 1 \mid \hat{H} = 0, \tag{49}$$

の成立がわかる。なぜなら、生成消滅演算子は、

$$\gamma_t \mid 0 > = 0, \qquad < 1 \mid \tilde{\gamma}^{\text{♀}} = 0, \tag{50}$$

を満たすからである。

$\hat{H}$ を対角的にする演算子と、ノーマル積を定義する演算子が違うことは、従来の場の量子論では見られないＮＥＴＦＤ特有のものである。これは、非平衡現象を扱っていることの現れである。

B　不可逆性

ここで、いま考えている系の、不可逆性を調べてみよう。系のエントロピーは、

$$S(t) = -\left\{n(t)\ln n(t) - [1+n(t)]\ln[1+n(t)]\right\}, \tag{51}$$

で定義される。一方、系の熱の出入りは、

$$d'Q = \omega dn, \tag{52}$$

で与えられる。熱力学によると、

$$dS = dS_e + dS_i, \qquad dS_e = d'Q/T_R, \tag{53}$$

$$dS_i \;\; \geq \;\; 0, \tag{54}$$

である。(54) は、「熱力学の第２法則」を表す。(51) と (52) を、それぞれ (53) 中の dS と dS_e として用いると、「エントロピー生成率」の満たす関係式 [45]

$$\begin{aligned}\frac{dS_i}{dt} &= \frac{dS}{dt} - \frac{dS_e}{dt} \\ &= 2\kappa\left[n(t) - \bar{n}\right]\ln\frac{n(t)[1+\bar{n}]}{\bar{n}[1+n(t)]} && (55) \\ &\geq \;\; 0, && (56)\end{aligned}$$

を得る。表式 (55) が不等式 (56) を満たすことは、すぐに確かめられる。等号は、熱平衡状態 $n(t) = \bar{n}$ か、準静的過程 $\kappa \to 0$ のときのみ実現する。

References

[1] R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **9** (1954) 935.

[2] P. W. Anderson, J. Phys. Soc. Japan **9** (1954) 316.

[3] R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics II* (Springer, Berlin 1985).

[4] F. Shibata and T. Arimitsu, J. Phys. Soc. Japan **49** (1980) 891, and references therein.

[5] T. Arimitsu, J. Phys. Soc. Japan **51** (1982) 1720.

[6] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 429.

[7] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 32.

[8] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 53.

[9] T. Arimitsu, M. Guida and H. Umezawa, Europhys. Lett. **3** (1987) 277.

[10] T. Arimitsu, M. Guida and H. Umezawa, Physica **A148** (1988) 1.

[11] T. Arimitsu and H. Umezawa, J. Phys. Soc. Japan **55** (1986) 1475.

[12] T. Arimitsu, H. Umezawa and Y. Yamanaka, J. Math. Phys. **28** (1987) 2741.

[13] T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, Physica **A135** (1986) 487.

[14] J. Schwinger, J. Math. Phys. **2** (1961) 407.

[15] L. V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **20** (1965) 1018.

[16] K. Chou, Z. Su, B. Hao and L. Yu, Phys. Rep. **118** (1985) 1.

[17] T. Arimitsu, Physica **A148** (1988) 427.

[18] T. Arimitsu, Y. Takahashi and F. Shibata, Physica **A 100** (1980) 507.

[19] T. Arimitsu, Physica **A 104** (1980) 126.

[20] T. Arimitsu and F. Shibata, J. Phys. Soc. Japan **51** (1982) 2075.

[21] F. Shibata, T. Arimitsu and Y. Hamano, J. Phys. Soc. Japan **51** (1982) 2075.

[22] T. Arimitsu and T. Tominaga, J. Phys. Soc. Japan **51** (1982) 3100.

[23] T. Tominaga and T. Arimitsu, J. Phys. Soc. Japan **53** (1984) 93.

[24] T. Arimitsu and M. Ban, J. Phys. Soc. Japan **53** (1984) 74.

[25] T. Arimitsu and M. Ban, J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 76.

[26] T. Arimitsu, M. Ban and F. Shibata, Physica **A 123** (1984) 131.

[27] M. Ban and T. Arimitsu, J. Phys. Soc. Japan **53** (1984) 939.

[28] M. Ban and T. Arimitsu, Physica **A 129** (1985) 455.

[29] M. Ban and T. Arimitsu, J. Phys. Soc. Japan **55** (1986) 1759.

[30] M. Ban and T. Arimitsu, Physica **A 146** (1987) 89.

[31] T. Tominaga, M. Ban, T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, Physica **A 149** (1988) 26.

[32] T. Tominaga, T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, Physica **A 150** (1988) 97.

[33] T. Arimitsu and T. Iwasaki, *An Analytical Treatment of a Localized Electron-Phonon System within NETFD — Intensity Distribution* (1990) preprint, University of Tsukuba.

[34] T. Arimitsu and T. Iwasaki, *Transient Resonant Light Scattering for a Localized Electron-Phonon System I — Basic Formulation in terms of NETFD* (1990) preprint, University of Tsukuba.

[35] T. Arimitsu and T. Iwasaki, *Transient Resonant Light Scattering for a Localized Electron-Phonon System II — Time-Resolved Spectrum* (1990) preprint, University of Tsukuba.

[36] T. Arimitsu, *Quantum Langevin Equations and Quantum Stochastic Liouville Equations* (1990) preprint, University of Tsukuba.

[37] T. Arimitsu, in *Thermal Field Theories*, eds, H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto (North-Holland 1990) in press.

[38] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Commun. Math. Phys. **83** (1984) 301.

[39] K. R. Parthasarathy, Rev. Math. Phys. **1** (1989) 89.

[40] T. Arimitsu, Physica **A158** (1989) 317.

[41] T. Arimitsu, Y. Sudo and H. Umezawa, Physica **A146** (1987) 433.

[42] T. Arimitsu and H. Umezawa, in: *Advances on Phase Transitions and Disordered Phenomena*, eds. G. Busiello, L. De Cesare, F. Mancini and M. Marinaro (World Scientific, Singapore 1987) pp. 483-504.

[43] H. Umezawa and T. Arimitsu, in: *Foundation of Quantum Mechanics — In the Light of New Technology*, eds. M. Namiki, Y. Ohnuki, Y. Murayama and S. Nomura (Physical Society of Japan, Tokyo 1987) pp. 79-90.

[44] T. Arimitsu, H. Umezawa, Y. Yamanaka and P. Papastamatiou, Physica **A148** (1988) 27.

[45] T. Arimitsu, Mathematical Sciences [*Sūri Kagaku*], June (1990) 22, in Japanese.