
講義ノート

複雑系のダイナミクス*
－ フラクタル構造を中心として －

北大 工 中山 恒義

1994.5.16 - 5.20

(1994 年 9 月 6 日受理)

目 次

1	フラクタルとは	3
1.1	フラクタル構造：複雑系の科学としての意義	3
1.2	フラクタル次元： D_f	4
1.3	ランダム・フラクタルの D_f の求め方	6
2	フラクタル構造の例	9
2.1	溶液中の高分子鎖	9
2.2	マルチフラクタル	11
3	ブラウン運動とフラクタル	17
3.1	ランダム・フラクタルとブラウン運動	17
3.2	Biased Random Walk	18
3.3	関数方程式とスケーリング	18
4	ネットワーク上のダイナミクスと拡散問題	21
4.1	マスター方程式	21
4.2	運動方程式	22
4.3	RC 回路網	22
4.4	スピン波	23
4.5	超伝導ネットワーク	24

*講義ノート作成者：お茶の水大 理 本山 美穂， 鴨門 ゆかり， 末吉 由香， 森 澄子

5	パーコレーションの理論	26
5.1	実空間の繰り込み	26
5.1.1	p_c の求め方	27
5.1.2	指数 ν の求め方	28
5.1.3	指数 β について	29
5.2	Percolation network のフラクタル次元 D_f	29
5.3	臨界指数とスケーリングの関係式	30
5.4	Nodes-links-blobs モデル	32
6	フラクタル格子上的拡散	34
6.1	異常拡散	34
6.2	スペクトル次元 $\tilde{d}$	36
6.3	局在 (localization)	38
7	フラクタル格子の固有値分布	40
7.1	Green 関数の方法	40
7.1.1	拡散方程式の Green 関数	40
7.1.2	波動方程式の Green 関数	41
7.1.3	拡散方程式と DOS (Density of states)	41
7.1.4	$G_{diff}(k, \epsilon^2)$ と DOS の関係	42
7.1.5	Percolation network の DOS	43
7.2	有限サイズ・スケーリングの方法	43
7.2.1	DOS	44
7.2.2	長さスケール $\Lambda(\omega)$ と単一長さによるスケーリング	45
7.3	厳密に解ける例	46
8	おわりに	48

第 1 章

フラクタルとは

フラクタルとは比較的新しい概念で、1975 年に Mandelbrot によって初めて使われた言葉である。特に最近では、フラクタル構造上のダイナミクスが注目を集めている。その成果の適用範囲は極めて広く、物性物理学に限っただけでも磁性体、高分子、流体、電子物性など極めて広い分野が関係する。

この講義では複雑系としてフラクタル構造を考え、このような系におけるダイナミクスについて説明する。ダイナミクスに関する話をゆっくりしたいところであるが、フラクタルを全く知らないという学生諸君を想定して基本的なところから話を始める。まず最初にフラクタルの静的な特徴について話をし、次にダイナミクスを記述する上で必要となるスケーリング理論の説明をする。又、ダイナミクスとして拡散問題や励起状態等が考えられるが、それらの間には密接な関係があり、拡散問題の理解がひいてはその他の問題の理解につながることを示す。その上でダイナミクスに関する話しをする。

1.1 フラクタル構造：複雑系の科学としての意義

自然界におけるフラクタルの例として、海岸線、河川の分岐、木の枝分かれ、雲の形、星の空間分布、乱流、破壊のパターン、結晶成長などがあげられる。ちょっと変わったところでは、眼底の網膜神経、都市のバス路線、メトロの網目等がある。これらの例は、ミクロ（原子サイズ）からマクロ（星雲）まで幅広いオーダーにわたっている。では、フラクタルと言われるものの共通点とは何であろうか。それは、「スケール変換に対して自己相似 (self similar) である」ということである。1982 年に Mandelbrot はフラクタルを次のように定義している。

“A fractal is a shape made of parts similar to the whole in some way.”

このような新しい概念である「フラクタルに関する研究の」物理学における意義は、一つには、これが要素還元論 (reductionism) が無効な世界（すなわち複雑系の物理）であることを積極的に表明していることであろう。

もう古典となってしまった部厚い量子電磁気学の教科書の著者として有名な S. S. Schweber は最近次のように主張している。

「基本構成要素とそれらの間の相互作用が既知な複雑な系の研究に要素還元論的アプローチが凌駕されつつある。」[Physics Today 46, No. 11, p. 34 (1993)]

また、L. P. Kadanoff は次のように云っている。

「But I paint too extreme a picture. Physics is concerned with understanding complexity, particularly in those parts of the science aimed at more applied examples. Here I intend “applied” not to refer to commercial usefulness, but rather to mean focused upon the particular types of the systems that really arise in the physical world [On complexity, Physics Today 42, No. 3, p. 7 (1987)]」

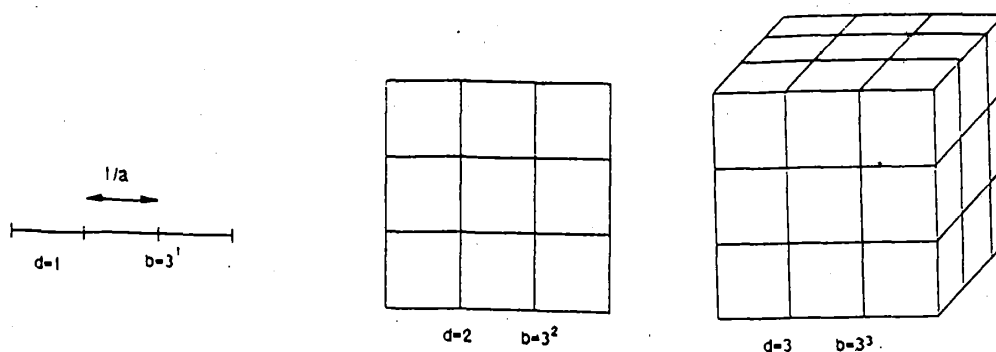


図 1.1: ユークリッド次元

1.2 フラクタル次元: D_f

ここではフラクタルと言われる構造あるいは系を特徴づける指数、フラクタル次元について述べる。

例えば単位長さを $1/a$ にスケール変換し、 b 個の相似形ができたとする。どんな a に対しても $b = a^d$ が成立するなら、指数 d をユークリッド次元という。図 1.1 は 1 次元-3 次元について、 $a = 3$ の場合を示したものである。ここで、 d を非整数まで拡張し、任意の a について $b = a^{D_f}$ をみたす D_f をフラクタル次元と定義する。

$$\text{フラクタル次元 } D_f = \frac{\ln b}{\ln a} \quad (1.1)$$

例として、コッホ曲線について考えよう (図 1.2)。コッホ曲線は、全体を $1/3$ にすると相似形が 4 個できる。このときのフラクタル次元は

$$D_f = \ln 4 / \ln 3 \simeq 1.2618$$

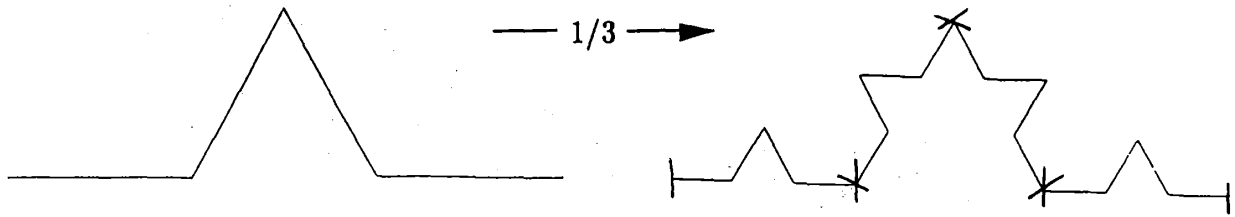


図 1.2: コッホ曲線

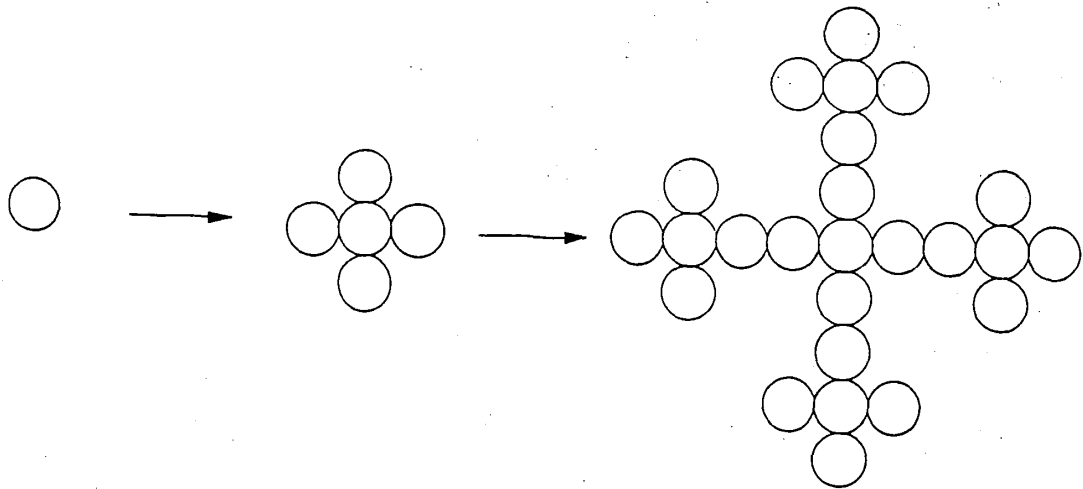


図 1.3: aggregation $D_f = \frac{\ln 5}{\ln 3} \sim 1.4649$

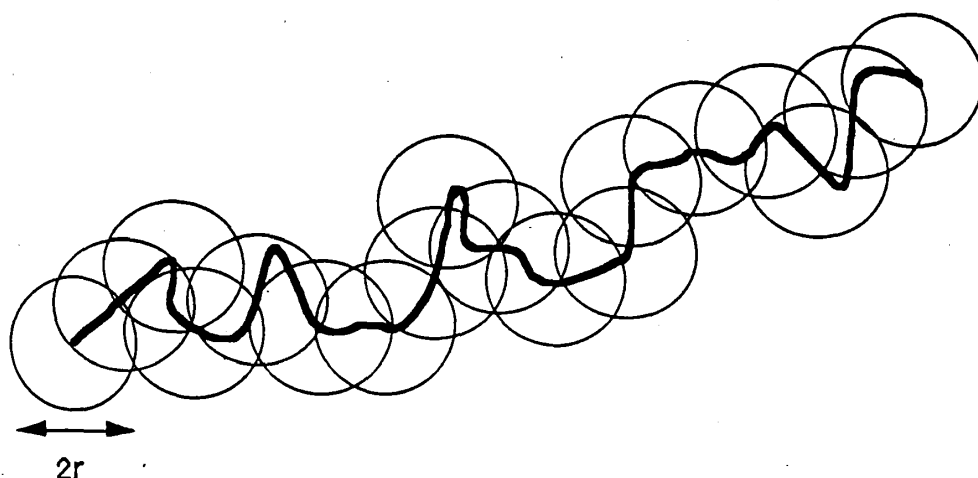


図 1.4: 海岸線の近似

である。凝集体 (aggregation) についても同様にして D_f を求めることができる (図 1.3)。これらの例は決定論的フラクタル (deterministic or nonrandom fractal) といわれるものだが、自然界で一般的にみられるのは random fractal である。両者の違いは、例えばコッホ曲線が縮尺を $1/3$ にすると元の曲線と全く同じ曲線が見られるように人工的につくられたものであるのに対し、自然界における海岸線...等は縮尺を変えたときに全く同じ形になるのではなく、統計平均的な意味あいでは同じ形になっているところにある。

1.3 ランダム・フラクタルの D_f の求め方

ランダムフラクタルの D_f を求める方法はいくつかあるが、ここでは

- (1) 粗視化の方法
- (2) 測度と長さのスケールから求める方法
- (3) 相関関数より求める方法

について簡単に説明する。

(1) 粗視化の方法

海岸線のような複雑な曲線の長さを、長さ r の線分の集合に近似する。曲線の一端を始点とし、半径 r の円がいくつ並ぶかを考えればよい。半径 r のときの円の個数を $N(r)$ とすると、

$$N(r) \propto r^{-D_f} \quad (1.2)$$

を満たす D_f がこの曲線のフラクタル次元となる (図 1.4)。

(2) 測度と長さのスケール関係より求める方法

ユークリッド空間 (次元を d とする) では、測度として長さ L ($d=1$)、面積 S ($d=2$)、体積 V ($d=3$) について

$$L \propto S^{1/2} \propto V^{1/3} \quad (1.3)$$

が成り立つ。つまり一般に測度 X について

$$L \propto X^{1/d}$$

となる。これを拡張し、測度として長さでスケールされるある物理量 $X(L)$ (例えば質量分布など) を考えたとき、

$$L \propto X(L)^{1/D_f} \quad (1.4)$$

なる次元 D_f をフラクタル次元とする。

例えば、ある質量分布に対し、測度として半径 r 内の質量 $M(r)$ を考える。 $M(r)$ は質量中心からの距離 r に依存し、 $M(r) \propto r^{D_f}$ が成り立つとする。このとき密度 $\rho(r)$ は、

$$\rho(r) = M(r)/r^d \propto r^{D_f-d} \quad (1.5)$$

となる。フラクタルでない通常の場合は $M(r) \propto r^d$ であるから、密度は

$$\rho(r) = M(r)/r^d = \text{const.}$$

となり、一定値になる。このことは $\rho \equiv 1/a^d = \text{const.}$ なる系を特徴づける長さスケール a が存在することを意味している (例えば粒子の平均間隔)。ところがフラクタルの場合には、(1.5) より $\rho(r)$ は r に依存し、 $r \rightarrow \infty$ では $\rho(r) \rightarrow 0$ となる (なぜなら一般に $D_f < d$)。つまり、特徴的長さスケール (characteristic length scale) が存在しないことを示している。(1.5) を用いて、シェルピンスキーガスケットの D_f を求めてみる。図 1.5 より

$$\rho(1) = 1, \quad \rho(2) = 3/4, \quad \rho(4) = (3/4)^2$$

であることがわかる。

$$\rho(l) = M(l)/l^2 \propto l^{D_f-2}$$

より、 $D_f = \ln 3 / \ln 2 \simeq 1.594 < 2$ となる。

(3) 相関関数より求める方法

相関関数

$$S(\vec{r}) = \langle \rho(\vec{x} + \vec{r}) \rho(\vec{x}) \rangle$$

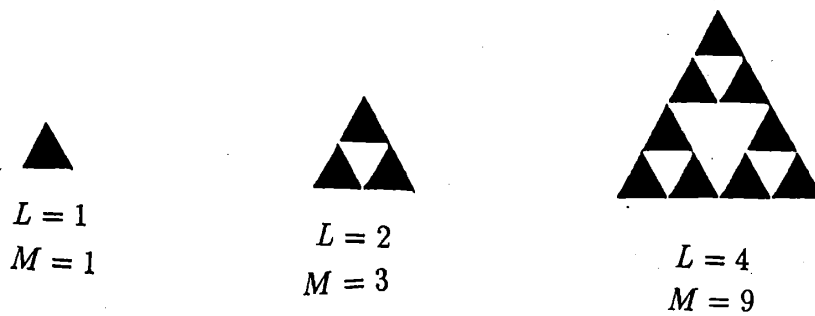


図 1.5: シェルピンスキー・ガスケット*

において、通常の場合には特徴的な長さ r_0 が存在し、 $S(r) \propto e^{-|r|/r_0}$ と表されるから、当然 $S(\lambda r) \neq \lambda^\alpha S(r)$ である。ところがフラクタルの場合は、(1.5) から

$$S(r) = \langle \rho(r)\rho(0) \rangle \propto r^{D_f-d} \quad (\rho(0) \neq 0) \quad (1.6)$$

で表され、 $S(r) \propto r^{-\alpha}$ ($\alpha = d - D_f$) というべきの型になるので特徴的な長さスケールは存在しない。つまり、 r を λr でおきかえれば $S(\lambda r) = \lambda^{-\alpha} S(r)$ である。また、 $S(r)$ をフーリエ変換した散乱強度 $I(q)$ も、

$$I(q) = A \int \langle \rho(r)\rho(0) \rangle \frac{\sin(qr)}{qr} r^{d-1} dr \quad (1.7)$$

$$= A q^{-D_f} \int (qr)^{D_f-1} \frac{\sin(qr)}{qr} d(qr) \quad (1.8)$$

$$\propto q^{-D_f} \quad (1.9)$$

のように $\int \dots$ が有限な値をとるのでべきの型となる。従って実験から得られた散乱強度のべき依存性から指数 D_f を求めることができる。

以上、大まかなフラクタルの定義とフラクタルの最も特徴的な量であるフラクタル次元について説明した。次の章では、主なフラクタル構造についていくつかの例をみることにする。

*Sierpinski(1882-1969) は 20 世紀初頭に活躍したポーランドの著名な数学者であるが、図 1. 5 のガスケットの創始者ではない。ローマのコルビーノ研究所の A. Petri 博士につれていってもらった 12 世紀に Aventio の丘の上に建てられた教会 Sant'Alessio の床には見事なガスケットのモザイクがある。

第 2 章

フラクタル構造の例

2.1 溶液中の高分子鎖

高分子鎖に関する理論は、フラクタルという概念が現れるよりずっと以前から存在するが、その中で慣性半径といわれるものがフラクタルと密接な関係にあることを以下に示す。重合度 N の (N 個のモノマーからなる) 高分子鎖は溶液中で Flory の定理に従う [1]。

Flory の定理： 慣性半径 R_G は重合度 N に依存しスケール則に従う。すなわち $[\langle R_G^2 \rangle]^{1/2} \propto N^\nu$ と表すことができる ($\nu = 3/5$)。

この定理を格子上のランダムウォーク (以下 R.W. と略記する) のモデルを用いて証明する (図 2.1)。 $R_N(\vec{r})$ は r 点に N 歩のランダムウォークで到着する異なる軌跡の数とする。単純なランダムウォークのとき、位置ベクトル $\vec{r}$ は、 n 番目の一步を表す $\vec{a}_n$ の和で決まる。即ち、

$$\vec{r} = \sum_{n=1}^N \vec{a}_n \quad (2.1)$$

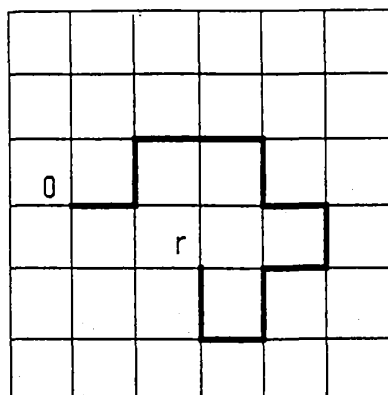


図 2.1: 格子上のランダム・ウォークのモデル

である。従って、高分子鎖の末端間距離の2乗平均は

$$\langle r^2 \rangle = \langle \vec{r} \cdot \vec{r} \rangle \quad (2.2)$$

$$= \sum_{n,m} \langle \vec{a}_n \cdot \vec{a}_m \rangle \quad (2.3)$$

$$= \sum_{n=1}^N a^2 + \sum_{n \neq m} a^2 \langle \cos \theta_n \rangle \quad (2.4)$$

$$= Na^2 \equiv \langle R_G^2 \rangle \quad (2.5)$$

となる（ここで $|a_n| = a$ とした）。従ってこのモデルでは $\langle R_G^2 \rangle^{1/2} \propto N^{1/2}$ で $\nu = 1/2$ となる。

ところで終点が $\vec{r}$ にある確率 $P(\vec{r})$ は、

$$P(\vec{r}) = \frac{R_N(\vec{r})}{\sum_{\vec{r}} R_N(\vec{r})} \quad (2.6)$$

であり、 z を格子点の配位数とすると、分母は $\sum_{\vec{r}} R_N(\vec{r}) = z^N$ である。 N を時間とみなすと $P(\vec{r})$ は拡散方程式に従う。従って1次元では、

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x^2/2\sigma} \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle x^2 \rangle}} e^{-x^2/2\langle x^2 \rangle} \quad (2.8)$$

となる。ここで

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 P(x, t) = \sigma$$

を使った。3次元では、 $P(\vec{r}, t) = P(x, t)P(y, t)P(z, t)$ 及び $\langle x^2 \rangle = \langle r^2 \rangle / 3$ より

$$P(\vec{r}, t) = \left(\frac{3}{2\pi \langle r^2 \rangle} \right)^{3/2} e^{\frac{-3r^2}{2\langle r^2 \rangle}} \quad (2.9)$$

$$\propto \frac{1}{N^{3/2}} e^{\frac{-3r^2}{2Na^2}} \quad (2.10)$$

である。ただし $\langle r^2 \rangle = Na^2$ とした。

以上のことから長さ Na の鎖の一端が $\vec{r}$ 点にあるときのエントロピー S は、

$$S = \ln P(\vec{r}) = \text{const.} - \frac{3}{2} \ln N - \frac{3r^2}{2Na^2} \quad (2.11)$$

$$= S_0 - \frac{3r^2}{2 \langle R_G^2 \rangle} \quad (2.12)$$

のように表される。従ってこのときの系の自由エネルギー F_{ideal} は、

$$F_{ideal} = E - TS = F_0 + \frac{3Tr^2}{2 \langle R_G^2 \rangle} \quad (2.13)$$

である。

ここで鎖の斥力を考慮してみよう。つまり、今まで考えてきた単純な R.W. によって記述できる鎖を ideal chain というが、これは同じ点を複数のモノマーが占めることを許していた。しかし実際には1つの格子点は1つのモノマーしか占有できないからモノマー間には斥力が働くと考えられる。このことを考慮すると、非理想気体の virial 定理と同様に考えられ、系の自由エネルギー F は次のように書き換えられる。

$$F = F_{ideal} + F_{rep} \quad (2.14)$$

$$= \frac{3Tr^2}{2Na^2} + \frac{TN^2v(T)}{r^d} \quad (2.15)$$

ただし virial 係数 $v(T)$ は、

$$v(T) = \frac{1}{2} \int d\vec{r} (1 - e^{-U_{12}/T}) \quad (2.16)$$

である。ここで U_{12} は斥力のポテンシャルのようなもので、 $U_{12} \rightarrow 0$ ならば $v(T) \rightarrow 0$ となり、このときは ideal chain になる。 $T \rightarrow$ 高温で $v(T)$ を U_{12}/T で展開すると $F_{rep} \propto U_{12}$ となる。さて、 F の極値 $\partial F / \partial r = 0$ が安定な r を与えるから (2.15) より、

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{3Tr}{Na^2} - \frac{dT N^2 v(T)}{r^{d+1}} = 0 \quad (2.17)$$

安定な r を R_G と考えればこれより $N \propto R_G^{\frac{d+2}{3}} = R_G^{1/\nu}$ を得る。 $d=3$ の場合、 $\nu = 3/5$ となる。

以上の考察で $N \rightarrow$ 質量 M 、 $R_G \rightarrow$ 長さスケール L と考えれば、

$$M(L) \propto L^{\frac{d+2}{3}} = L^{D_f} \quad (2.18)$$

つまり、高分子鎖のフラクタル次元は $D_f = 1/\nu$ である。

高分子鎖の形態を R.W. という立場から見てきた。R.W. はブラウン運動を表すモデルであるので、ブラウン運動とフラクタルが密接に関係していることがわかる。これについては第3章で詳しく述べる。

2.2 マルチフラクタル

これまでフラクタル次元 D_f について説明してきたが、考える対象によって系を特徴づける指数がこの D_f だけでは不十分な場合がある。これらは例えば乱流、カオスに

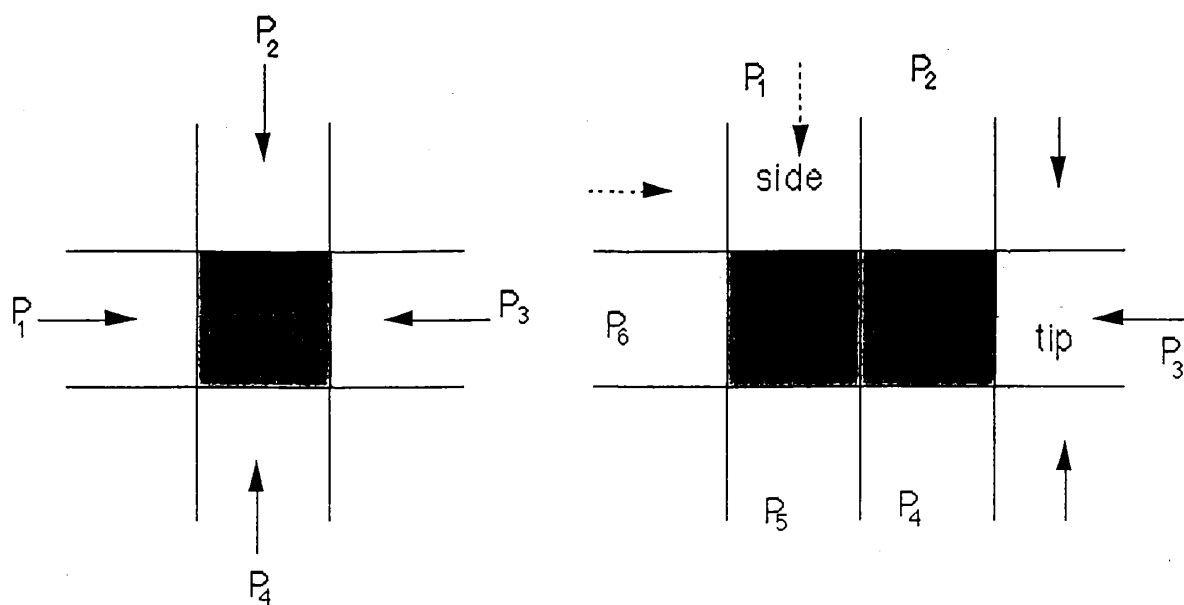


図 2.2: DLA (a); $n=1$ step (b); $n=2$ step

おけるストレンジ・アトラクター、フラクタル成長、バクテリア・コロニー、星雲の分布や増殖プロセスなどである。これらの対象にマルチフラクタルという新しい概念を用いて、解析を一般化する必要性が最近強く認識されるようになってきた。

マルチフラクタル性を有する系の基本的性質を一言で言えば、「それぞれの領域で、スケーリング特性が異なっている」ということである。従って局所的な自己相似性をいかに一般化するかというのが、マルチフラクタルの基本的な考え方である。

マルチフラクタルの例として Diffusion limited aggregation (DLA: 拡散に支配された凝集) について考えてみよう。図 2.2 のように、原点に種となる粒子をおいておき、 $n=1$ step で無限遠から R.W. する粒子を放つ。種粒子に隣接する格子に来たら凝集体になったものとみなす。このとき種粒子に隣接する 4 つの格子に来る確率はどれも等しく $P_i = 1/4$ である。ここで、 i は凝集体に隣接する格子 (growth site) の番号を表している。 $n=2$ step で次の粒子を無限遠から R.W. させる。このときは、tip と side (図 2.2 を参照) では粒子が付着する確率が異なる。つまり、とんがった tip (図 2.2 中の P_3 と P_6) は 3 方から入れるのに対し、side (図 2.2 中の P_1, P_2, P_4, P_5) は 2 方からしか入れない。従って、 $P_{tip} : P_{side} = 2 : 3$ である。又、 $\sum_{i=1}^6 P_i = 1$ より、 $P_{tip} = 0.14, P_{side} = 0.22$ となる。 P_i に分布ができるということは、付着しやすいところにはどんどん粒子が付着し、付着しにくいところにはなかなか着かない。つまり、rich gets richer という状況が生じる。このように $t \equiv n$ step で $\{P_i\}$ (ただし $i = 1, \dots, N_n$ で N_n は n step での growth site の数である) のように分布があるような系を解析するために、1974 年 Mandelbrot は Multifractal という概念を導入した (図 2.3) [2]。

以上の話を一般化して扱うために、一辺の長さ L の箱を考える。この箱を長さ l

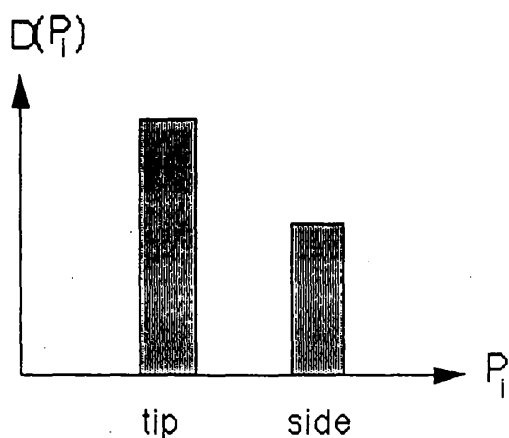


図 2.3: P_i の分布

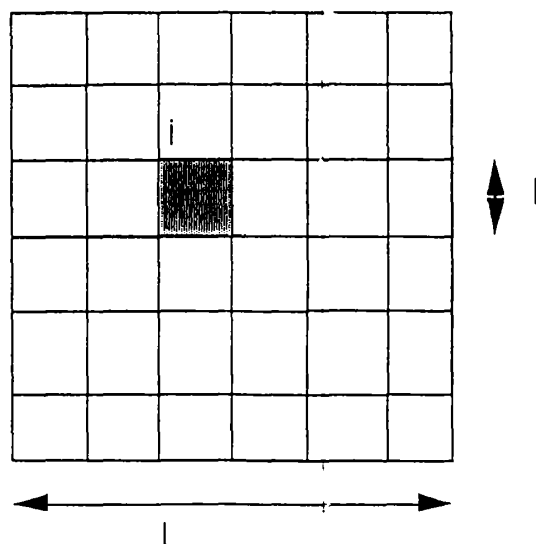


図 2.4: box counting

の箱で分割したとき、ある物理量 $\psi(\vec{r})$ についての i 番目の箱での確率測度を、

$$P_i(\epsilon) = \frac{\int_{l_i} \psi(\vec{r}) d\vec{r}}{\int_L \psi(\vec{r}) d\vec{r}} \quad (2.19)$$

と定義する (図 2.4)。ただし $\epsilon = l/L$ 、そして l_i は i 番目の箱を表わす。また $\sum_i P_i = 1$ である。ここで、 $P_i(\epsilon)$ は $\epsilon \rightarrow 0$ に対して

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_i(\epsilon) \sim \epsilon^\alpha \quad (2.20)$$

でスケールされとする。指数 α は Lipschitz-Hölder 指数と呼ばれ i に依存し、場所 i によって大きく変化する。このことは、「 α の分布がフラクタル次元 $f(\alpha)$ によって記述できる」ことを示唆している。マルチフラクタルの由来は α が分布をもつことからきている。従って考えている系は次の 2 つの値によって特徴づけられる。

$$\{\alpha : f(\alpha)\} \quad (2.21)$$

ここで分配関数 $\chi(q, \epsilon)$ を次のように定義する。

$$\chi(q, \epsilon) \equiv \sum_i [P_i(\epsilon)]^q \approx \epsilon^{\tau(q)} \quad (2.22)$$

この分配関数を導入すれば、 q 次のモーメントを通してサイズの違う粗視化に対する特性をすべて計算できる。右辺の $\tau(q)$ は小さな ϵ に対する $\chi(q, \epsilon)$ の性質を定義する

のに導入された。 $f(\alpha)$ は、 α の分布を記述するフラクタル次元であるので、箱の数は $\epsilon^{-f(\alpha)}$ のようにスケールされる (比例する)。従って $\alpha' \sim \alpha' + d\alpha'$ にある箱の数は

$$dn(\alpha', \epsilon) = \rho(\alpha') \epsilon^{-f(\alpha')} d\alpha' \quad (2.23)$$

となる。ここで $\rho(\alpha)$ は正則関数である。

(2.20) より $[P_i(\epsilon)]^q \sim \epsilon^{\alpha q}$ を用いると、(2.22) は

$$\chi(q, \epsilon) = \int d\alpha' \rho(\alpha') \epsilon^{-f(\alpha') + q\alpha'} \quad (2.24)$$

となる。 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限では指数 $-f(\alpha') + q\alpha'$ が α' に関して最小のときに積分にきいてくる。このことはある値 q に対して主にきいてくる一組の指数 $\alpha(q)$ と $f[\alpha(q)] = f(q)$ が存在することを意味している。極小条件

$$\left. \frac{d}{d\alpha'} [f(\alpha') - q\alpha'] \right|_{\alpha'=\alpha(q)} = 0 \quad (2.25a)$$

また

$$\left. \frac{d^2}{d\alpha'^2} [q\alpha' - f(\alpha')] \right|_{\alpha'=\alpha(q)} > 0 \quad (2.25b)$$

より

$$q = \frac{df}{d\alpha} \quad (2.26a)$$

$$f''(\alpha(q)) < 0 \quad (2.26b)$$

を得る。従って、Legendre 変換を行ない

$$\tau(q) \equiv \alpha(q)q - f(\alpha) \quad (2.27)$$

とすると

$$\frac{d\tau(q)}{dq} = \alpha + \frac{d\alpha}{dq}q - \frac{df}{dq} = \alpha(q) \quad (2.28)$$

が得られる。さて、今までの話では α が場所に依存するようなものを Multifractal としてきた。従って (2.28) より、 $\tau(q)$ が q に関して線形である (つまり $\alpha = \text{const.}$) ような場合には Multifractal ではない。このようなものを Unifractal という。逆に $\tau(q)$ の q 依存性を調べ、その関係が非線形ならば、Multifractal であるといえる。

同じ問題を、一般化次元 $D(q)$ を導入して扱うことも可能である。すなわち

$$D(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{q-1} \frac{\ln \chi(q, \epsilon)}{\ln \epsilon} \right] \quad (2.29)$$

$q=1$ のときは

$$D(1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i P_i(\epsilon) \ln P_i(\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (2.30)$$

を用いる。また $D(0)$ は測度のサポートのフラクタル次元。従って (2.29) より

$$D(q) = \frac{1}{q-1} [q\alpha(q) - f(\alpha(q))] = \frac{\tau(q)}{q-1} \quad (2.31)$$

結論として α のスペクトル分布と $f(\alpha)$ が分かれば、 $D(q)$ を求めることができる。逆に $D(q)$ が分かれば

$$\alpha(q) = \frac{d[(q-1)D(q)]}{dq} \quad (2.32)$$

より $\alpha(q)$ が求まり、この $\alpha(q)$ より (2.31) を用いて $f(\alpha)$ が求まる。従って (2.26)、(2.31)、(2.32) がマルチフラクタル解析で基本となる式である。

決定論的な Multifractal の簡単な例として、次の場合を考えてみよう (図 2.5)。例えば $n = 1$ step において長さが 1 である物質の密度が一定の線分があったとしよう。 $n = 2$ step で、線分の左半分の物質の量を P_1 倍 (例えば $1/5$) し、右側半分は P_2 倍 (例えば $4/5$) する (全体の物質の量は変わらない)。さらに、 $n = 3$ step で、前の step で P_1 倍した線分の左半分を P_1 倍 (従って最初の P_1^2 倍) し右側を P_2 倍

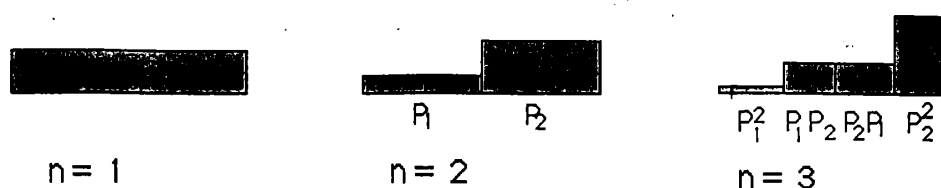


図 2.5: Cantor set

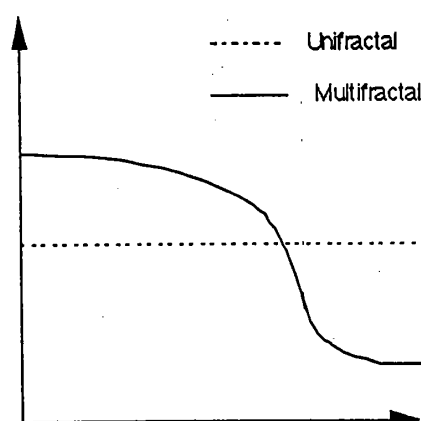


図 2.6: Multifractal と Unifractal

(最初の $P_1 P_2$ 倍) する。右半分についても同様にする。この繰り返しはすべての段階で同じなので、最初のものだけを考えれば十分である。このときの分配関数は、

$$\begin{aligned}\chi(q, \epsilon = 1/2) &= \sum_i [P_i(\epsilon)]^q \\ &= P_1^q + P_2^q \\ &\equiv \left(\frac{1}{2}\right)^{\tau(q)}\end{aligned}\tag{2.33}$$

であるから、 $\tau(q)$ はあらわに

$$\tau(q) = \frac{\ln(P_1^q + P_2^q)}{-\ln 2}\tag{2.34}$$

となる。(2.31) より図 2.6 が描ける。Multifractal であることは明らかである。[マルチフラクタル解析に対してもっと勉強してみたい学生諸君は T. C. Halsey et al., Phys. Rev. A33, 1141 (1986) を参照のこと]

以下、H.E.Stanley の言葉を、第 1 章、第 2 章 のまとめとして述べておく。

A fractal object is the most efficient way to obtain a great deal of intercell “connectivity” with a minimum of “cell volume”. The question is which fractal did evolution select and why? [Fractals and Disordered Systems, edited by A. Bunde and S. Havlin, Springer, Berlin, 1991]

例えばフラクタルとして木の枝分かれを考えると、その形は太陽の光エネルギーを最も効率よく取り入れられるようになっているというのである。どうしてそのフラクタルの形が選ばれたのかということが問題なのである。これに関しては、self-organized criticality (SOC) とフラクタルとの関わりに言及した P. Bak と M. Paczuski の次の解説が参考になるであろう (Why nature is complex? : Physics World, December 1993)。

第 3 章

ブラウン運動とフラクタル

§2.1 において、高分子鎖を格子上のランダムウォークで表し、それがフラクタル構造になることを示した。ここではもう少しランダム・ウォーク (R.W.) とフラクタルの関係について議論を深めてみよう。

3.1 ランダム・フラクタルとブラウン運動

ある配置 c での物理量の値を A_c 、その配置をとる確率を p_c とすると、一般に、ある系での物理量 A の平均値 $\langle A \rangle$ は次のように定義される。

$$\langle A \rangle = \sum_c A_c p_c \quad (3.1)$$

さてここで、1次元 ($d = 1$) 上でランダムウォークするアリを考えてみよう。時刻 $t = 0$ (秒) でアリが位置 $x = 0$ にいるとする。1秒ごとにコインを投げ、表がでたら右へ1歩、裏がでたら左へ1歩進むことになっている。上の定義で物理量 A_c を座標 x_c と考えれば、

$$\begin{aligned} t = 1: \quad \langle x \rangle_{t=1} &= (-1) \times \frac{1}{2} + (1) \times \frac{1}{2} = 0 \\ \langle x^2 \rangle_{t=1} &= (-1)^2 \times \frac{1}{2} + (1)^2 \times \frac{1}{2} = 1 \\ t = 2: \quad \langle x \rangle_{t=2} &= 0 \\ \langle x^2 \rangle_{t=2} &= 2 \\ t = t: \quad \langle x^2 \rangle_{t=t} &= t \\ \langle x^4 \rangle_{t=t} &= 3t^2 - 2t = t^2 \left(3 - \frac{2}{t} \right) \end{aligned}$$

$t \rightarrow \infty$ で、 $\langle x^4 \rangle_{t=t} = 3t^2$ と表される。一般に、

$$L_{2k} \equiv [\langle x^{2k} \rangle]^{\frac{1}{2k}} \propto t^{1/2} \quad (3.2)$$

これは1次元 ($d=1$) に限らず、2次元や3次元 ($d=2, d=3$) でも成り立つ (x, y, z はそれぞれ独立なため)。

今、アリが1歩進むごとに「そこに米粒を1つ置いていくと考えれば」 t を質量 $M(L)$ とみなせ、 $M(L) \propto L^2$ となる。ランダムウォークがつくる軌跡のフラクタル次元は、アリが動きまわる空間の次元 d によらず $D_f = 2$ となる。第2章で高分子鎖を単純なランダムウォークと考えたとき $\langle R_G \rangle \propto N^{1/2}$ で $\nu = 1/2$ (つまり $D_f = 1/\nu$) であったことを思い出してみよう。ランダムウォークのモデルをもう少し現実に近いものにするために排除体積効果を入れたときには、 $D_f = 5/3$ であった。

3.2 Biased Random Walk

次にアリの動きにたいして、バイアスがかかることを考えてみよう。このとき指数 D_f はどう変わるだろうか。バイアスを $\varepsilon (> 0)$ で表し、

$$\text{コインの表がでる確率} \quad p = \frac{1+\varepsilon}{2}$$

$$\text{裏がでる確率} \quad q = \frac{1-\varepsilon}{2}$$

とする。ここで $p - q = \varepsilon$ となっている。このとき、座標 x の平均は

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_{t=1} &= \sum_c x_c p_c = p - q = \varepsilon \\ \langle x \rangle_{t=t} &= t\varepsilon \\ \langle x^2 \rangle_{t=t} &= \varepsilon^2 t^2 + (1 - \varepsilon^2)t \sim \varepsilon^2 t^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる。一般に、

$$L_k = [\langle x^k \rangle]^{1/k} \propto t$$

つまり、 $L(t) \sim t^1$ であるからフラクタル次元は $D_f = 1$ となる。ここで (3.3) を書き換えて $(\varepsilon^2 t + 1)t - \varepsilon^2 t$ として $\varepsilon^2 t \ll 1$ なら $\langle x^2 \rangle \propto t$ なることに注意。すなわちある時間 $t_c \approx 1/\varepsilon^2$ で D_f の値が変わる。このことを t_c で「クロスオーバー」という。同じ指数の組に属する系を、「同じ universality class に属する」というが、単純な R.W. とバイアスがかかった $t_c \gg 1/\varepsilon^2$ での R.W. は異なる universality class に属している。以下何回も「universality class」という言葉が出てくるのでここでその意味づけをしておいた。

3.3 関数方程式とスケーリング

今までフラクタルを特徴づける指数としてフラクタル次元についてみてきたが、前にも述べたようにフラクタルはスケール不変という特徴をもっていた。スケール不変性とは一体どのような物理的意味あいを含んでいるのであろうか。

まず、1変数の場合を考えてみよう。§3.1 でランダムウォークを考えたとき時間 t と距離 L の間に次のような関係があった。

$$t(L) \sim L^2 \quad (3.4)$$

ここで次のような関数方程式を考える。

$$t(\sqrt{\lambda}L) \sim \lambda t(L) \quad (3.5)$$

関数方程式とは、関数 $t(L)$ の形に制限を与えるようなものである（例えばベキでなければならないというように）。(3.4) が (3.5) を満たすことは次のように証明できる。

Proof:

$\lambda = 1/L^2$ として、(3.5) に代入すると、

$$t(1) \sim \frac{1}{L^2} t(L) \quad (3.6)$$

である。 $t(1) = \text{const.}$ であるから、

$$t(L) \propto L^2 \quad (3.7)$$

となり、(3.4) が導かれる（証明終）。

すなわち (3.5) の関数方程式に従うということは、考えている対象がスケール変換に対して不変性を有していることを意味している。

次に2変数の場合についてみてみよう。関数 $f(u, v)$ が、

$$f(\lambda^a u, \lambda^b v) = \lambda f(u, v) \quad (3.8)$$

のような関数方程式に従うとしよう。この式がどのような意味を持っているか考えてみる。 $\lambda = v^{-\frac{1}{b}}$ とおいたとき、

$$f(u/v^{\frac{a}{b}}, 1) = v^{-\frac{1}{b}} f(u, v) \quad (3.9)$$

$$\therefore f(u, v) = v^{\frac{1}{b}} F(u/v^{\frac{a}{b}}) \quad (3.10)$$

となる。ただし、 $F(u/v^{a/b}) = f(u/v^{a/b}, 1)$ とおいた。

この関数方程式に従う例として、次の拡散方程式の解が考えられる。

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

この方程式の解は、

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (3.12)$$

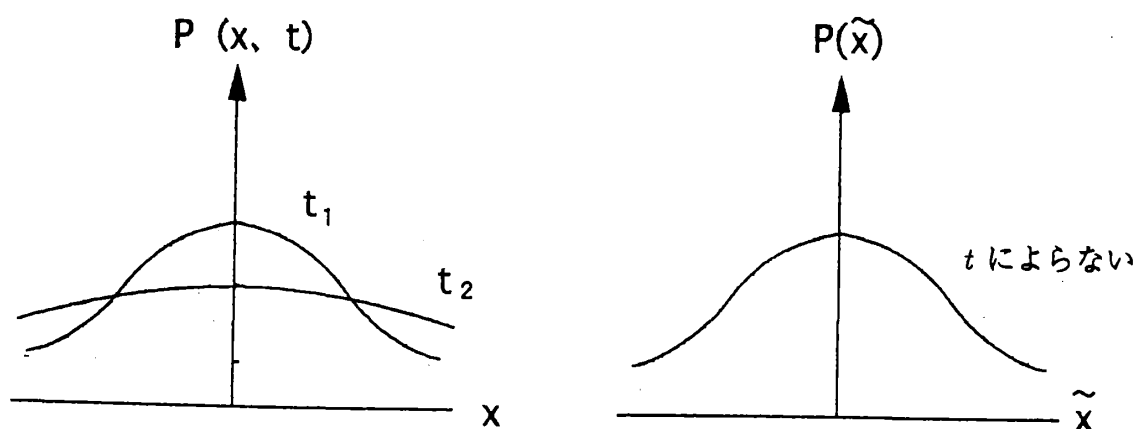


図 3.1: $P(x, t)$ をスケール変換することにより右図のように1つのパラメータ $\tilde{x}$ で書ける

であるが、これは、 $x = 0$ から出発したアリが、時刻 t で位置 x に見いだされる確率を表す。(3.8) で、 $a = -1, b = -2$ とすると、

$$P(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2}t) = \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} = \lambda P(x, t) \quad (3.13)$$

となる。ここで、 $t = \lambda^2$ とおくと、

$$P(x/\sqrt{t}, 1) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} e^{-\frac{\tilde{x}^2}{4D}} \quad (3.14)$$

が得られる。ただし、 $\tilde{x}^2 = x^2/t$ とおいている。これらをまとめて、

$$P(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} e^{-\frac{\tilde{x}^2}{4D}} \quad (3.15)$$

と、スケール関数で書くことができる。この式は、 $P(x, t)$ が1つのパラメータで書けるということを示しており、拡散方程式の解は、適当なスケール変換に対して不変な形をしているといえる。このことは、考えている系や現象を記述する方程式がスケール不変性を秘めているからにはほかならない*。

まとめ： n 変数の関数が $n-1$ 変数の関数に変換できるというのが、フラクタルやスケール不変性を有する系の特徴であるといえる。

* $D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial P(x, t)}{\partial t}$ において、 t を λt にすることは、 x を $x\sqrt{\lambda}$ にすることと等価であることにも注意しよう。つまり $D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial (x^2 \lambda)} = \frac{\partial P(x, t)}{\partial (t \lambda)}$ である。

第 4 章

ネットワーク上のダイナミクスと拡散問題

この章では、ネットワーク上での様々な問題が、拡散問題と密接な関係にあることを示す。ネットワークのダイナミクスの例としては、多数の質点がバネで相互につながれているネットワークを考えれば振動問題となるし、抵抗とコンデンサーによる回路網を考えればそこに流れる電流の問題となる。ここでは、このような具体的ないくつかの問題について考え、それらの間の共通する点を明確にする。

4.1 マスター方程式

ネットワーク上の拡散は、次のマスター方程式によって記述できる。

$$\frac{dP_i}{dt} = \sum_{j \neq i} W_{ij}(P_j - P_i) \quad (4.1)$$

P_i は時刻 t における粒子の i サイトでの存在確率であり、 W_{ij} は j から i への遷移確率を表す。和 j は隣接するサイトについてとる。また $W_{ij} = W_{ji}$ とする。(4.1) は、

$$\frac{dP_i}{dt} = W_{i,i-1}(P_{i-1} - P_i) + W_{i,i+1}(P_{i+1} - P_i) \quad (4.2)$$

$$= W(P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}) \quad (4.3)$$

$$= \sum_j W_{ij}P_j \quad (4.4)$$

と書くことができる。ここで、 $W_{ij} \equiv W = \text{const.}$ とした。最後の等式は、 $\sum_j W_{ij} = 0$ の条件（すべての P_j が一定である場合を考えよ）をつけて、

$$\sum W_{ij} = W_{i,i-1} + W_{i,i} + W_{i,i+1} = 0 \quad (4.5)$$

より、

$$W_{i,i} = -(W_{i,i-1} + W_{i,i+1}) = -2W \quad (4.6)$$

とおくことにより得られた。

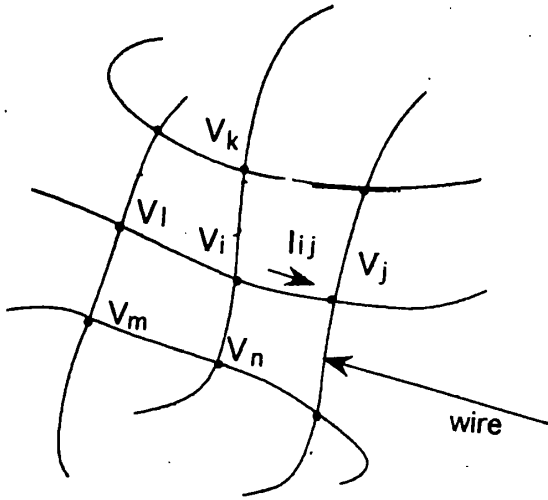


図 4.1: P_i をサイトでの電圧 V_i とみなせば、(4.1) の右辺の $W_{ij}(P_j - P_i)$ はサイト ij 間の電流 I_{ij} となる

4.2 運動方程式

さて、各サイトに質量 m の原子が存在し、隣同士の原子が線形バネ（バネ定数 K_{ij} ）で連結されている弾性ネットワークを考える。 i サイトの原子の変位 u_i に関する運動方程式は、

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \sum_j K_{ij} u_j \quad (4.7)$$

と書くことができる。ここでも先と同じように考えることができ、 $\sum_j K_{ij} = 0$ より ((4.7) ですべての変位を一定とせよ)、 $K_{ii} = -2K$ ($K_{ij} = K = \text{const.}$ とした) とすれば、

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = K(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \quad (4.8)$$

となる。(4.4) と、(4.7) の方程式の違いは時間微分の階数だけであり、固有値問題としてはまったく等価なものである。

4.3 RC 回路網

(4.1) のマスター方程式において、 P_i をサイト i での電圧 V_i とみなすと、これは RC 回路網を記述する (図 4.1)。サイト i における電流 I_i は、 $q_i = CV_i$ より

$$I_i = \frac{dq_i}{dt} = C \frac{dV_i}{dt} \quad (4.9)$$

と表すことができ、これは次の式を満たす。

$$C \frac{dV_i}{dt} = \sum_j \sigma_{ij} V_j \quad (4.10)$$

$$= \sum_{j \neq i} \sigma_{ij} (V_j - V_i) \quad (4.11)$$

ここで、 q は電気量、 C はコンデンサーの電気容量、また σ_{ij} は、 ij 間のコンダクタンスである (ij 間の抵抗を R_{ij} とすれば $\sigma_{ij} = \frac{1}{R_{ij}}$ である)。この場合、(4.10) から (4.11) へは、 i サイトでの電流の保存、すなわちキルヒホッフの法則 ((4.10) で $V_j = \text{const.}$ とせよ)

$$\sum_j \sigma_{ij} = 0 \quad (4.12)$$

を用いた。

4.4 スピン波

更に、(4.1) の方程式の W_{ij} を交換相互作用 J_{ij} とみなせば、ハイゼンベルグ強磁性体のスピン波をあらわす。スピン角運動量を S で表すとハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \sum \frac{1}{2} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (4.13)$$

であり、 $J_{ij} < 0$ のときは *ferro*、 $J_{ij} > 0$ のときは *anti-ferro* を表す。 $S_i^\pm = S_i^x \pm iS_i^y$ とすると、

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \left[\frac{1}{2} (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) + S_i^z S_j^z \right] \quad (4.14)$$

となる。従って、

$$i\hbar \frac{\partial S_i^+}{\partial t} = [S_i^+, \mathcal{H}] \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \{ [S_i^+, S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+] + [S_i^+, S_i^z S_j^z] \} \quad (4.16)$$

ここで、 $[S_i^+, S_j^-] = 2\delta_{ij} S_i^z$, $[S_i^z, S_j^\pm] = \pm \delta_{ij} S_i^\pm$ を使うと、

$$i\hbar \frac{\partial S_i^+}{\partial t} = \sum_{ij} J_{ij} (S_i^z S_j^+ - S_i^+ S_i^z) \quad (4.17)$$

となる。

ferro の場合は、 $\langle S_i^z \rangle = S$ と近似すると、

$$i\hbar \frac{\partial S_i^+}{\partial t} = \sum_j J_{ij} S (S_j^+ - S_i^+) \quad (4.18)$$

$$= J (S_{i-1}^+ - 2S_i^+ + S_{i+1}^+) \quad (4.19)$$

が得られる。ここでも、 $J_{ij} S = J = \text{const.}$ とした。

anti-ferro の場合は、 $\langle S_i^z \rangle = \sigma_m S$ ただし $\sigma_m = -1$ or 1 (下向き、あるいは上向きスピンを表す) であるから、

$$i\hbar \frac{\partial S_i^+}{\partial t} = \sigma_i \sum_j J_{ij} (S_j^+ + S_i^+) \quad (4.20)$$

となる。*anti-ferro* の場合はこれまでみてきた方程式と () 内の符号が異なる方程式である。つまり「universality class」が違うことが示唆される。

anti-ferro の場合を除けば、これまで述べてきた方程式の違いは時間微分の階数だけで

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\omega \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2 \quad (4.22)$$

と置き換えると、いずれも同じ Universality class に属する問題を解くことになる。従って、以下の章でフラクタル構造におけるダイナミクスと考える場合にも、上に述べた問題の1つが解明されれば他の問題へも即座に適用可能となる。

4.5 超伝導ネットワーク

微細加工技術の最近の進歩によりメゾスコピック・サイズの系を自由に設計・作成できるようになった。その一つに超伝導ネットワークがある。超伝導がネットワークにどうかかわるか大変興味ある問題である。以下この基本方程式について述べる [3]。

超伝導体のオーダー・パラメーター $\Delta(\vec{r})$ は対ポテンシャルとして、あるいは局所的なエネルギー・ギャップとしての意味を持つ。 $T \rightarrow T_c$ では $\Delta(\vec{r}) \rightarrow 0$ であるので超伝導体の自由エネルギー密度 F を $\Delta(\vec{r})$ で次のように展開できる。

$$F = F_n + a|\Delta(\vec{r})|^2 + \frac{b}{2}|\Delta(\vec{r})|^4 + c \left| \left(-i\hbar \text{grad} + \frac{2e\vec{A}}{\hbar c} \right) \Delta(\vec{r}) \right|^2 \quad (4.23)$$

最後の項の微分により、近傍との相関が入っていることに注意。

$T \rightarrow T_c$ あるいは $H \rightarrow H_{c2}$ では係数 b の項は無視できる。 $\mathcal{F} = \int F d\vec{r}$, $\delta\mathcal{F} = 0$ より

$$-\frac{\Delta(\vec{r})}{\xi_s^2} + \left(i\frac{\partial}{\partial s} - \kappa \right)^2 \Delta(\vec{r}) = 0 \quad (4.24)$$

ここで $\kappa = 2e\hat{u} \cdot \vec{A}/(\hbar c)$ 、また $s = \hat{u} \cdot \vec{r}$ とした。 $\hat{u}$ は細線にそった単位ベクトルである (図 4.1 で $V_i \rightarrow \Delta_i$ とせよ)。 ξ_s^2 は相関長で $\xi_s^2 \propto |a| \propto |T - T_c|$ である。細線での解を $\Delta(s) = \Delta(\kappa = 0)e^{-i\kappa s}$ と仮定して (4.24) 式に代入すると

$$-\frac{\Delta(\kappa = 0)}{\xi_s^2} + \frac{\partial^2 \Delta(\kappa = 0)}{\partial s^2} = 0 \quad (4.25)$$

従って

$$\Delta(s) \propto e^{-i\kappa s} (\alpha e^{is/\xi_s} + \beta e^{-is/\xi_s}) \quad (4.26)$$

これに ij 間の細線に対する境界条件 $\Delta_{ij}(i) = \Delta_i$ 、 $\Delta_{ij}(j) = \Delta_j$ を用いると、 α と β が決まり

$$\Delta_{ij}(s) = \left\{ \Delta_i \frac{\sin[(l_{ij} - s)/\xi_s]}{\sin \theta_{ij}} + \Delta_j e^{i\gamma_{ij}} \frac{\sin(s/\xi_s)}{\sin \theta_{ij}} \right\} e^{-i\kappa_{ij}s} \quad (4.27)$$

となる。ここで l_{ij} は ij 間の wire の長さ、 $\theta_{ij} \equiv l_{ij}/\xi_s$ 、そして $\gamma_{ij} = \int_i^j \kappa_{ij} ds = \kappa_{ij} l_{ij}$ と定義した。

節点 i での電流の保存則 (Kirchhoff の条件) は

$$\sum_j \left(i \frac{\partial}{\partial s_{ij}} - \kappa_{ij} \right) \Delta_{ij}(s) \Big|_i = 0 \quad (4.28)$$

となる。これに (4.27) を代入すると

$$-\Delta_i \sum_j (\cot \theta_{ij})/\xi_s + [\Delta_i e^{i\gamma_{ij}}/(\xi_s \sin \theta_{ij})] = 0 \quad (4.29)$$

i 点では $s_{ii} = 0$ また $\cos(s/\xi_s)|_i = 1$ であることを用い、係数を見やすいようにおきかえると

$$m_i \Delta_i / \xi_s^2 + \sum_j d_{ij} (\eta_{ij} \Delta_j - \Delta_i) = 0 \quad (4.30)$$

ここで

$$d_{ij} = 1/(\xi_s \sin \theta_{ij}) \approx 1/l_{ij} \quad (\theta_{ij} \ll 1)$$

$$\eta_{ij} = e^{i\gamma_{ij}}$$

$$1/m_i = \xi_s \sum_j \tan(\theta_{ij}/2) \approx \sum_j (l_{ij}/2)$$

とした。

(4.30) 式は超伝導ネットワークの基本方程式である。これまで述べてきた方程式との対応を示すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta_i &\rightarrow \text{変位} \\ d_{ij} &\rightarrow \text{結合定数} \\ m_i &\rightarrow \text{質量} \\ 1/\xi_s^2 &\rightarrow \text{固有値} \end{aligned}$$

また η_{ij} はゼロ磁場で 1 になることに注意。このような場合、基本方程式 (4.30) はこれまで議論してきた方程式と同じ型に属する。

第 5 章

パーコレーションの理論

5.1 実空間の繰り込み

第3章では、R.W. による軌跡がフラクタルになっていることについて見てきた。この章では、フラクタル構造をとるもう1つの代表的な例としてパーコレーション ネットワーク（以下 P.N. と略記する）について考えてみよう。

例えば2次元三角格子上においてある確率 p でボンドまたはサイトをおくと、つながったクラスターが出来る（ p は占有密度になっている）。このつながったクラスターをパーコレーション・クラスター（Percolation cluster）と呼ぶ。 p が小さいときには、有限のクラスターがいくつか出来るだけであるが、 p がある値 p_c になると、格子の下から上までつながったクラスターが出現する。系の大きさを無限大の極限で考えると、無限大のサイズのクラスターが出来ることになる。このような p_c を臨界点と呼ぶ。これは、熱力学における2次相転移で、臨界温度 T_c で系の特徴的な長さである相関長 ξ が発散することに相当する。この相関長は、転移点付近で

$$\xi = \Xi |T - T_c|^{-\nu} \quad (5.1)$$

というべき乗則に従うことが知られている。Percolation の場合、 ξ はクラスターの平均サイズとみなすことができ、臨界点 p_c 付近で、

$$\xi = \Xi |p - p_c|^{-\nu} \quad (5.2)$$

のようにべき乗的に発散する（高温 T は小さな p に対応することに注意）。ここで ν は相関長の臨界指数である。 $p \rightarrow p_c$ では ξ は無限大となり、長さのスケールがなくなる。つまりフラクタルであることを示唆している（スケール不変）。このようなパーコレーションに実空間の繰り込みを適用して、臨界点 p_c や指数 ν を求めてみよう。以下サイト・パーコレーションについて議論する。

長さ1の格子を繰り込んで、長さbの格子にすると、次のことがいえる。

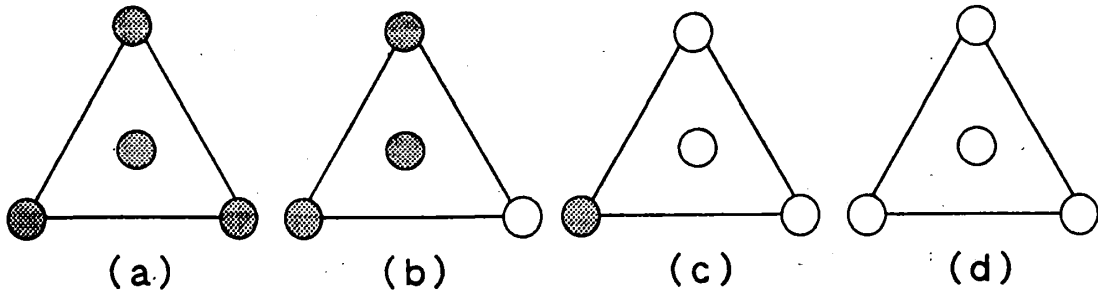


図 5.1: 占有サイトを灰色で、空のサイトを白で示してある。(a)(b) 正三角形の3つの頂点のうち2つ以上が占有されているものは占有サイトとみなす。(c)(d) 頂点が1つだけ占有されているもの、または全く占有されていないものは空のサイトとみなす。

- (1) 最初の格子（長さ 1）で、占有サイト密度が p_c なら、繰り込まれた格子（長さ b ）でも、占有密度は $p' = p_c$ である。
- (2) ξ は、上の規則が成立する範囲を決める。従って元の格子でも、新しい格子でも ξ は等しい。

5.1.1 p_c の求め方

例として、 $p = p_c$ での三角格子上のパーコレーション・クラスターを考える。この三角格子の隣接する3つのサイトを新しく1つのサイトとみなし、格子の縮尺を $b = \sqrt{3}$ だけ変える。ここで3つの格子点からなる旧サイトにおいて、格子点の過半数が占有されているなら、この新サイトは占有されているとみなす。これにより、2つまたは3つの占有サイトからなるクラスターが、繰り込みによって1個の占有サイトになる（図 5.1）。このような粗視化の結果、新しい占有サイト密度 p' を持つ新たな格子が得られる（図 5.2）。このようにすると、情報は失われ、一般には占有サイト密度 p' は元の占有サイト密度 p とは異なるが、上の (1) より臨界点 p_c では $p_c = p'_c$ が成り立つ。元の格子では、各サイトは確率 p で独立に占有されるので、占有サイトが3個のブロックを見いだす確率は p^3 である。2個のサイトが占有される確率は $3p^2(1-p)$ である。これより、新しい密度 p' は、次式で与えられる。

$$p' = p^3 + 3p^2(1-p) \quad (5.3)$$

また、 $p = p_c$ で $p' = p_c$ なので、

$$p_c = p_c^3 + 3p_c^2(1-p_c) \quad (5.4)$$

となり、 $p_c = 1/2$ が求められる。 p_c の値は格子の型によるが、以下に述べる臨界指数は格子の型によらないことに注意。

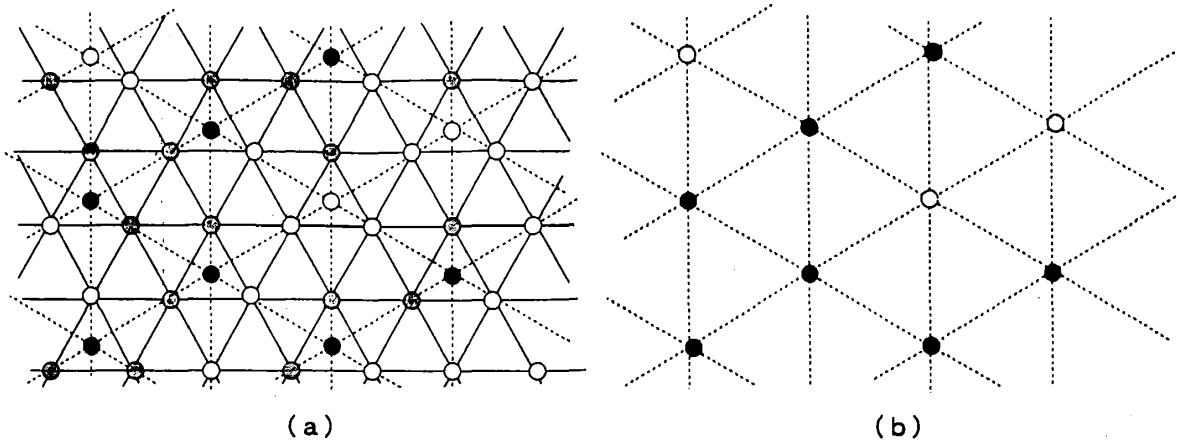


図 5.2: (a) 三角格子上の P_c でのクラスター。占有サイトは灰色で、空のサイトは白で示してある。三角格子の真ん中の黒丸は粗視化したときのサイト。(b) 粗視化された浸透格子

5.1.2 指数 ν の求め方

次に、指数 ν を求めてみよう。密度 p の三角格子が因子 $b = \sqrt{3}$ だけ粗視化されると、新しい格子は密度 p' を持つ。このとき元の相関距離 ξ と新しい相関距離 ξ' の臨界的な性質は ν を正とすると、

$$\xi = \Xi |p - p_c|^{-\nu} \quad (5.5)$$

$$\xi' = b \Xi |p' - p_c|^{-\nu} \quad (5.6)$$

と書けるはずである。ここで、両式の自然対数をとると、

$$\ln \xi = \ln \Xi - \nu \ln |p - p_c| \quad (5.7)$$

$$\ln \xi' = \ln \Xi - \nu \ln |p' - p_c| + \ln b \quad (5.8)$$

となる。 $p = p_c$ では $\xi = \xi'$ より、

$$\nu \ln \frac{|p' - p_c|}{|p - p_c|} = \ln b \quad (5.9)$$

従って、

$$\nu = \frac{\ln b}{\ln \frac{|p' - p_c|}{|p - p_c|}} \quad (5.10)$$

と書ける。さらに、(5.3) 式より $p' = p^3 + 3p^2(1 - p)$ なので p と p' の p_c への近づき方は違い、 p' を p_c のまわりで展開すると、

$$p' = p_c + \left. \frac{dp'(p)}{dp} \right|_{p=p_c} (p - p_c) + \cdots \quad (5.11)$$

となる。また、 $p = p_c = 1/2$ で、

$$\frac{dp'(p)}{dp} = 3p^2 + 6p(1-p) - 3p^2 \quad (5.12)$$

なので、 $dp'(p)/dp = 3/2$ となり、(5.11) に代入すれば

$$|p' - p_c| = \frac{3}{2}|p - p_c| \quad (5.13)$$

従って ν は (5.10) より

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\ln \sqrt{3}}{\ln 3 - \ln 2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1.1}{1.1 - 0.59} = 1.355 \end{aligned} \quad (5.14)$$

によって与えられる。これは den Nijs [J. Phys. A12, p. 1857 (1979)] によって得られた2次元での正確な値 $\nu = 4/3 = 1.333\dots$ にきわめて近い。

5.1.3 指数 β について

$p > p_c$ では、1つの無限大クラスターが存在する。このとき、 $P_\infty(p)$ を次のように定義する。

$P_\infty(p)$: あるサイトが ∞ -クラスターに属する確率 (熱力学におけるオーダーパラメーターと考えてもよい)。

$p < p_c$ では $P_\infty(p) = 0$ である。計算機シミュレーションや理論的研究により、 p_c 近傍では浸透確率 $P_\infty(p)$ はベキ乗則

$$P_\infty(p) \sim (p - p_c)^\beta \quad (p > p_c, p \rightarrow p_c) \quad (5.15)$$

に従って0に近づくことが示されている。指数 β は2次元の浸透過程で $\beta = 5/36 \simeq 0.1389$ 、3次元の場合 $\beta \simeq 0.4$ である。

§5.3 に述べるが、“static” な構造に関する指数 ν 、 β (order parameter)、 α (比熱)、 γ (感受率) のうち2つが決まれば、他はスケーリングの関係式で求めることができる。

5.2 Percolation network のフラクタル次元 D_f

P.N. のフラクタル次元は指数 ν および β とどういう関係にあるのであろうか。

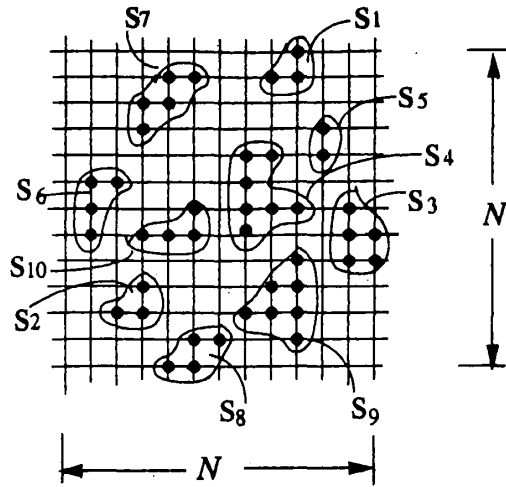


図 5.3: $s_1 = s_2$, $n_s(p) = 2/N^2$, N^2 は全サイト数

サイズ L のクラスターに含まれるサイト数を $M(L)$ とすると $p > p_c$ の場合、 $M(L) \sim L^d P_\infty(p)$ となる。他方、 $p < p_c$ では $P_\infty(p) = 0$ であるから $L \rightarrow \infty$ の極限で $M(L)/L^d \rightarrow 0$ であると予想される。ここで $p > p_c$ のとき $P_\infty(p) \sim (p - p_c)^\beta$ なので

$$M(L) \propto L^d \{(p - p_c)^{-\nu}\}^{-\beta/\nu} \quad (5.16)$$

と書ける。また $\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}$ より

$$M(L) \propto L^d \xi^{-\beta/\nu} \quad (5.17)$$

となることがわかる。 $p \approx p_c$ では $\xi \gg L$ だから、この系の長さのスケールは L だけになるので $\xi \rightarrow L$ と置き換えられ

$$M(L) \propto L^{d - \frac{\beta}{\nu}} = L^{D_f} \quad (5.18)$$

となる。よって

$$D_f = d - \frac{\beta}{\nu} \quad (5.19)$$

が得られる。このことは $p \approx p_c$ での ∞ -クラスターをサイズ L で切り取ってしまうと、その中はフラクタル次元 $D_f = d - \beta/\nu$ のフラクタルになっていることを意味している。2次元では $D_f = 2 - (5/36) \cdot (3/4) \simeq 1.89$ で、3次元では $D_f = 2.55$ である。格子の型に D_f はよらないことに注意。

5.3 臨界指数とスケーリングの関係式

§ 3.3 で、スケール不変性を秘めている系では、物理量がスケール関数に従うことをみてきた。以下パーコレーション・クラスターに対する臨界指数をスケーリング理論によって求めてみる。ここで、 $n_s(p)$ を s サイトからなるクラスターのサイト当たりの数であると定義する (図 5.3)。Scaling の考え方の基本は、系を特徴づけるある量が $p = p_c$ で発散するという点を積極的に利用することにある。ここで、無限クラ

スター粒子数を $s_{\infty}(p) \propto |p - p_c|^{-1/\eta}$ とし、 $n_s(p)$ が次のように表せるとする。 $p \rightarrow p_c$ で無限クラスターの粒子数が発散すると仮定したので、 $n_s(p)$ はベキの型をとるとしたことに注意。

$$n_s(p) = s^{-\tau} F\left(\frac{s}{s_{\infty}(p)}\right) \quad (5.20)$$

また (5.20) に $s_{\infty}(p) \propto |p - p_c|^{-1/\eta}$ を代入すると、

$$n_s(p) = s^{-\tau} \tilde{F}[(p - p_c)s^{\eta}] \quad (5.21)$$

となる。ここで、 $F(x) \equiv \tilde{F}(x^{\eta})$ である。

あるサイトが「無限に大きなクラスター」に属する確率は $p > p_c$ に対して $P_{\infty}(p)$ であり、 $p < p_c$ では $P_{\infty}(p) = 0$ である。どのサイトも確率 p で占有されており、また有限クラスターの一部に属する確率は、 $\sum_s n_s(p)s$ である。有限クラスターに属していない占有サイトは必ず無限クラスターに属するから、

$$P_{\infty}(p) + \sum_s n_s(p)s = p \quad (5.22)$$

が得られる。 $p > p_c$ で $p \rightarrow p_c$ とすると

$$P_{\infty}(p) = - \int ds s^{1-\tau} \tilde{F}[(p - p_c)s^{\eta}] + p \quad (5.23)$$

と表せる。また、 $P_{\infty}(p_c) = 0$ より $\sum_s n_s(p_c)s = p_c$ なので

$$P_{\infty}(p) = - \int ds s^{1-\tau} \{ \tilde{F}[(p - p_c)s^{\eta}] - \tilde{F}(0) \} + p - p_c \quad (5.24)$$

また $x = (p - p_c)s^{\eta}$ とすると、

$$\begin{aligned} P_{\infty}(p) &= - \int dx x^{\frac{2-\tau-\eta}{\eta}} \eta^{-1} (p - p_c)^{\frac{\tau-2}{\eta}} \{ \tilde{F}(x) - \tilde{F}(0) \} + (p - p_c) \\ &= P_0(p - p_c)^{\frac{\tau-2}{\eta}} + (p - p_c) \\ &\propto (p - p_c)^{\beta} \end{aligned} \quad (5.25)$$

が得られる。ただし、ここで $P_0 = - \int dx x^{\frac{2-\tau-\eta}{\eta}} \eta^{-1} \{ \tilde{F}(x) - \tilde{F}(0) \}$ とおいた。以上のことより $\beta = (\tau - 2)/\eta$ ($\beta < 1$) である。最後の項は $p \rightarrow p_c$ で1項目より速くゼロに収束することに注意。

同様に、有限クラスターの全数 $M(p) (\propto (p - p_c)^{2-\alpha})$ に対する指数 α を求める。

$$\begin{aligned} M(p) &= \sum_s n_s(p) \\ &= \int ds s^{-\tau} \tilde{F}[(p - p_c)s^{\eta}] \\ &\propto |p - p_c|^{2-\alpha} \end{aligned} \quad (5.26)$$

となるので

$$\alpha = \frac{1-\tau}{\eta} + 2 \quad (5.27)$$

である。

次に有限クラスターの平均質量（サイト数） $s(p)$ に対する指数 γ を求める。占有されている格子点を選んだとき、それが属するクラスターの大きさが s である確率を $w_s(p)$ とすると

$$w_s(p) = \frac{n_s(p) s}{\sum_s n_s(p) s} \quad (5.28)$$

と表せるので $s(p)$ は

$$\begin{aligned} s(p) &= \sum_s w_s(p) s \\ &= \frac{\sum_s n_s(p) s^2}{\sum_s n_s(p) s} \end{aligned} \quad (5.29)$$

とおける。 $p \approx p_c$ とすると、 $\sum_s n_s(p) s = p_c$ なので、

$$\begin{aligned} s(p) &= \frac{\sum_s n_s(p) s^2}{p_c} \\ &\propto |p - p_c|^{-\gamma} \end{aligned} \quad (5.30)$$

ここで $\gamma = (3-\tau)/\eta$ である。これらのことより指数の間の次のようなスケーリング関係が得られる。

$$\alpha = 2 - d\nu = 2 - 2\beta - \gamma \quad (5.31)$$

$$\eta = \frac{1}{\beta + \gamma} \quad (5.32)$$

$$\tau = 2 + \frac{\beta}{\beta + \gamma} \quad (5.33)$$

$$d\nu = 2\beta + \gamma \quad (5.34)$$

独立な指数は2個であることがわかる。以上は、静的 (static) な物理量に関する指数である。ダイナミクスに関する指数は

$$\sigma(p) = \sigma_0(p - p_c)^\mu \quad (5.35)$$

である (図 5.4)。これについては、第6章で詳しく述べる。

5.4 Nodes-links-blobs モデル

パーコレーション・ネットワークは乱れが強い系に対する基本的なモデルであり、統計平均の意味でウラクタル構造をとっている。ある確率 p でボンドをおいたものは、ボンド・パーコレーション (bond percolation) と呼ばれ、サイトをおいたものはサイト・パーコレーションと呼ばれる。

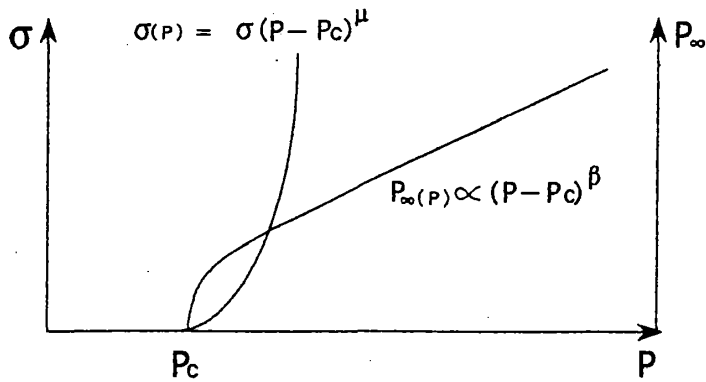


図 5.4: 伝導率 σ のグラフ

この P.N. を、弾性的な network だと思ってその両端を引っ張ることを考えたり、金属でできているとして電流を流すことを考えてみると、図 5.5 のような Nodes-Links-Blobs モデルは、物理に対する見通しをよくする。例えば、臨界濃度 p_c にあるネットを、端と端を持って引っ張ることを考えよう。一本の鎖で結ばれているボンドは大きな変形をし、ボンドが密につながっているところは小さな変形しかしない。この大きな変形を担う鎖状部分を構成しているボンドの一本を切断すると、このネットはふたつのネットに分解してしまう。この鎖状部分を「リンク (link)」と呼び、密にボンドがつながっている部分を「ブロッブ (blob)」と呼ぶ。

$p > p_c$ のときには、リンクの中の本のボンドを切断しても、ネットがふたつに分解することはない。しかし相関長 ξ の半径内では、リンクは変形に対して主要な部分を担う。平均サイズ ξ のクラスター同士を結び付けているサイトが、「ノード (node)」である。リンクやブロッブには、「袋小路 (dead end)」と呼ばれる変形や伝導に寄与しない部分が付随している。

「振動問題と電気伝導の問題は同じ型の方程式に属することを第 4 章で強調した。ネットを引っ張ってボンドがのびることと、電気が流れてボンドがあつくなることの等価性や、ブロッブを剛体として近似したり、超伝導体のように考えることがイメージとして浮かび上がってくることを学生諸君に期待する」

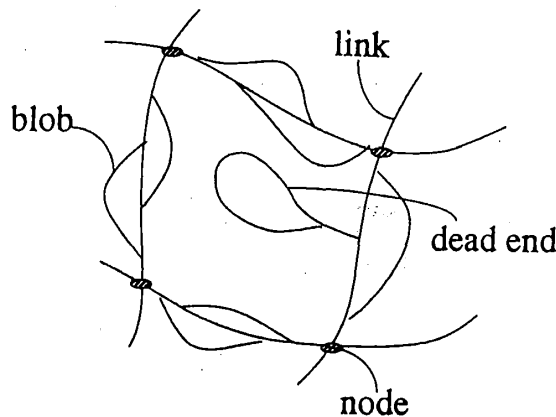


図 5.5: 浸透網の骨格の幾何学的特徴をうまく取り入れた Nodes-Links-Blobs (NLB) モデルの概念図

第 6 章

フラクタル格子上の拡散

これまでの話でフラクタル構造におけるダイナミクスを記述するためのお膳立てが揃った。まずダイナミクスの研究が発展するきっかけとなった de Gennes の問題提起の話からはじめよう。

6.1 異常拡散

1976 年に、de Gennes によって P.N. 上の拡散について次のような問題が提起された [4]。いわゆる“蟻の問題”である。それは、

“An ant parachutes down onto a site on the percolation network, and executes random walk. What is the mean square distance the ant traverses as a function of time?”

というものであった。つまり、P.N. 上で蟻が t 秒間に出発点からどれだけ遠ざかることができるかというものである。この間に対する解答は、7 年の歳月の後 1983 年に Gefen ら [5] によって与えられた。格子点の占有確率を p 、 ∞ -クラスターの出現する臨界確率を p_c としたとき、 $p > p_c$ 及び $p < p_c$ での平均到達距離 $\langle r^2(t) \rangle^{1/2}$ をまず導き、スケーリング仮説によって $p \sim p_c$ での指数を決定するという方法で解いたものであった。

(1) $p > p_c$ の P.N. 上の拡散を考える

蟻がパラシュートで降りた点を原点とすると、十分時間がたてば ($t \gg 1$ では)、平均到達距離 $\langle r^2(t) \rangle^{1/2}$ は

$$\langle r^2(t) \rangle \gg \xi^2 \quad (6.1)$$

となるであろう。これは、 $p > p_c$ では占有されている格子数が多いため、時間が十分たてば相関長 ξ に比べて十分長い距離まで移動できることを意味している。従って、このときは通常の拡散が起これると考えられるから、

$$\langle r^2(t) \rangle = 2Dt \propto (p - p_c)^{\mu - \beta} t \quad (6.2)$$

で表される。ここで、 D は拡散定数である。

Proof: 拡散定数 D が (6.2) のように表されることの証明

$p > p_c$ の P.N. が金属ワイヤーのボンドで出来ていると考え、そこに電流を流すことを考える。このとき、conductivity(電気伝導度) σ は $\sigma \propto Dn$ で表される。 D は拡散定数、 n は carrier 濃度である。carrier 濃度はあるボンドが ∞ -クラスターに属する確率に比例する。なぜなら有限クラスターの格子は電流を流さないから conductivity には寄与しない。前章より $\sigma \propto (p - p_c)^\mu$, $n \propto P_\infty(p) \propto (p - p_c)^\beta$ であるから、

$$D \propto \frac{\sigma}{n} \propto (p - p_c)^{\mu - \beta} \quad (6.3)$$

が得られる*。

- (2) $p < p_c$ では、 ξ は有限クラスターの平均サイズを表すから、時間が十分たてば ($t \gg 1$)

$$\langle r^2(t) \rangle \approx \xi^2 \propto |p - p_c|^{-2\nu} \quad (6.4)$$

となる。ここで前章より相関長 $\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$ であることを使った。つまり、 $p < p_c$ では時間が十分たてば拡散は有限クラスターの全域に及び、そのクラスターの外には拡散できないことを意味する。

- (3) スケーリング関数の導入

次に、(1)、(2) を $p \sim p_c$ で結び付けるため、以下のダイナミック・スケーリングの仮説をおく。

$$\langle r^2(t) \rangle^{1/2} = t^x F[(p - p_c)t^y] \quad (6.5)$$

- (4) $p > p_c$ で (6.2) が (6.5) になるためには

$$F(z) \propto z^{(\mu - \beta)/2} \quad (6.6)$$

である必要がある。このとき (6.5) は

$$\langle r^2(t) \rangle^{1/2} = t^x t^{y(\mu - \beta)/2} (p - p_c)^{(\mu - \beta)/2} \quad (6.7)$$

となる。一方、(6.2) は

$$\langle r^2(t) \rangle^{1/2} = (p - p_c)^{(\mu - \beta)/2} t^{1/2} \quad (6.8)$$

であるから、

$$x + \frac{y(\mu - \beta)}{2} = \frac{1}{2} \quad (6.9)$$

という関係があることがわかる。

*ここで、 $\mu > \beta$ となることに注意しよう。この意味するところは、dead end は P_∞ には寄与するが σ には寄与しない（つまり、電流は流れない）ということである。

(5) $p < p_c$ では、 $\langle r^2(t) \rangle \propto t^0 = \text{const.}$ であるから、

$$F(z) \propto z^{-x/y} \quad (6.10)$$

とする必要がある。(6.4)、(6.5) より、

$$\langle r^2(t) \rangle^{1/2} = t^x (p - p_c)^{-x/y} t^{-x} \quad (6.11)$$

$$= (p - p_c)^{-\nu} \quad (6.12)$$

である。従って、

$$\frac{x}{y} = \nu \quad (6.13)$$

が得られる。(6.9)、(6.13) より、指数 x, y は以下のように求められる。

$$x = \frac{\nu}{2\nu + \mu - \beta}, \quad y = \frac{1}{2\nu + \mu - \beta} \quad (6.14)$$

(6) $p = p_c$ では以上より、

$$\langle r^2(t) \rangle^{1/2} = t^x F[0] \propto t^{\frac{\nu}{2\nu + \mu - \beta}}. \quad (6.15)$$

従って、時刻 0 で P.N. 上にパラシュートで降り立った蟻が時刻 t に到達できる距離の 2 乗平均は

$$\langle r^2(t) \rangle \propto t^{\frac{2}{2(\mu - \beta)/\nu}} \propto t^{\frac{2}{2 + \theta}} \quad (6.16)$$

となる。ここで

$$\theta = \frac{\mu - \beta}{\nu} \quad (6.17)$$

とした。 θ は 静的臨界指数 β, ν と 動的臨界指数 μ で表される。 $\theta > 0$ であるため $p \sim p_c$ での拡散は通常の拡散 ($\langle r^2(t) \rangle \propto t$) よりも遅くなることがわかる。これは、P.N. には袋小路があることによるものと直感的にも理解できる。Gefen ら [5] はこれを anomalous diffusion (異常拡散) と呼んだ。Gefen らは指数 θ を求めたわけではないことに注意。特に動的臨界指数 μ については、解析的にはおろか計算機で求めることも難しかった。

6.2 スペクトル次元 $\tilde{d}$

次にフラクタル構造のダイナミクスに関する重要な指数であるスペクトル次元について説明する。ここで次の量を導入する。

$V(t)$: フラクタル構造上の拡散において、時刻 t で拡散可能な体積

$P(\vec{r}, t) : (|\vec{r}|, t)$ における粒子の存在確率

$P(0, t) \equiv P_0(t)$ という量を考える。これは時刻 t で原点に粒子が存在する確率であり、一般に $V(t)$ に逆比例していると考えられる。P.N. 上及び高分子鎖上の拡散において $P_0(t)$ を t の関数として表してみる。

(1) P.N.

例えば、時刻 $t = 0$ で原点 $\vec{r} = 0$ にアリが置かれ、R.W. すると考える。この時、時刻 t で拡散可能な体積 $V(t)$ は、 $\langle r^2(t) \rangle^{1/2}$ をこれまで同様平均到達距離であるとする

$$V(t) \approx \langle r^2(t) \rangle^{D_f/2} \quad (6.18)$$

と表される。(6.18) は、ユークリッド空間 (次元を d とする) における通常の拡散では、拡散可能な体積が $\langle r^2(t) \rangle^{d/2}$ となることから推測できる。この時、 $P_0(t)$ は時刻 t で原点にアリが戻っている確率である。つまり、 P_0 が大きいということはアリがあまり遠くまで行けない (拡散しにくい) ことを表し、逆に P_0 が小さいということは拡散しやすいことを意味する。従って $P_0(t)$ は (6.16)、(6.18) を使うと、

$$P_0(t) \propto \frac{1}{V(t)} \propto \frac{1}{\langle r^2(t) \rangle^{D_f/2}} \propto t^{-\frac{D_f}{2+\theta}} \equiv t^{-\frac{\tilde{d}}{2}} \quad (6.19)$$

のように表される。ここで、

$$\tilde{d} = \frac{2D_f}{2+\theta} \quad (6.20)$$

で定義される $\tilde{d}$ をスペクトル次元という。なぜスペクトル次元というかについては第7章で明らかになるであろう。

(2) 高分子鎖上の拡散

高分子鎖の場合時刻 t での拡散可能な体積は、第2章の (2.18) で求めたように慣性半径を $R_G(t)$ とすると

$$V(t) \approx \langle R_G(t)^2 \rangle^{D_f/2} \quad (6.21)$$

である。また、 $\langle R_G(t)^2 \rangle^{1/2} \propto N(t)^\nu$ であった。ここでの問題では $N(t)$ は「実際の」拡散により得られた拡散長であることに注意。1次元鎖上の拡散は $N^2(t) \propto t$ であるので、 $P_0(t)$ を t で表すと

$$P_0(t) \sim t^{-\frac{\nu D_f}{2}} = t^{-\tilde{d}/2} \quad (6.22)$$

となり、(2.18) より $\nu = 1/D_f$ であったから、 $\tilde{d} = 1$ であることがわかる。このことは、鎖がどのような形をしていても結局1次元上での拡散にほかならず、通常の拡散をすることを意味している。

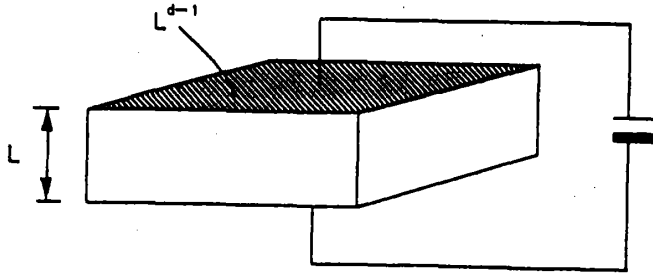


図 6.1: コンダクタンス

6.3 局在 (localization)

前節では、拡散のしやすさの指標となる $P_0(t)$ がスペクトル次元 $\tilde{d}$ で表されることを知ったが、ここでは、スペクトル次元が $\tilde{d} < 2$ であれば、粒子は拡散せず、局在する事を示す [6]。

電子は P.N. 上では局在する。

Proof 1: 有限サイズ・スケーリング

一辺が L の P. N. を考える (図 6.1)。この左右の面に単位電圧をかけたとき流れる電流をコンダクタンスという。コンダクタンス $g(L)$ は 2 つの面の間の距離 (L) に反比例し、面の広さ (L^{d-1}) に比例するから $g(L) = \sigma L^{d-2}$ とかくことができる。(5.35) より $\sigma \propto (p - p_c)^\mu$ 、また、(5.2) より相関長は $\xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$ だから、

$$g(L) \propto (p - p_c)^\mu L^{d-2} = \xi^{-\mu/\nu} L^{d-2} \quad (6.23)$$

である。ここで、 $L < \xi$ であれば、この系を特徴的な長さは L となるため $\xi \rightarrow L$ とおきかえることができる。従って (6.23) は

$$g(L) \propto L^{-\mu/\nu + d - 2} = L^{D_f(\tilde{d}-2)/\tilde{d}} \quad (6.24)$$

となる。ただし、(6.20) および (5.19) より

$$\tilde{d} = \frac{2D_f}{2 + (\mu - \beta)/\nu} \quad (6.25)$$

$$D_f = d - \frac{\beta}{\nu} \quad (6.26)$$

を使った。(6.24) で、 $\tilde{d} < 2$ ならば、 $L \rightarrow \infty$ (箱の大きさを無限大にする) にすると $g(L)|_{L \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ となり、電流は流れない、つまり電子が局在していることを意味する。

Proof 2: R.W. の観点からの証明

S_N : N -step で訪れることのできる異なったサイト数
(同じサイトを何回訪れても一回しかカウントしない)

$\Sigma_N : \langle r^2(t) \rangle^{1/2}$ の半径内のサイト数。従って $\Sigma_N = \langle r^2(t) \rangle^{D_f/2} \propto t^{\tilde{d}/2} \propto N^{\tilde{d}/2}$
(時間 t はステップ N でおきかえられる。)

以上を用いて、 $g(L)$ を記述することを考える。まず、伝導率 (conductivity) σ は

$$\sigma = e^2 D n \approx e^2 D \frac{1}{L^d \Delta E} \quad (6.27)$$

と表すことができる。ここで e は電子の電荷、 D は拡散定数、 n は電荷密度である。また、 ΔE は、次式で表される。

$$\Delta E = \frac{T}{S_N} \quad (6.28)$$

ここで、 T はバンド巾であり、 S_N 個に縮退が解けていることを示している。すなわち S_N 個の状態間を電子が R.W. しているとする。また、拡散定数 D は $D \propto L^2/t$ であるから、結局 σ は

$$\sigma \propto e^2 \frac{L^2}{t} \frac{1}{L^d} \frac{S_N}{T} \propto \frac{S_N L^{2-d}}{T t} \quad (6.29)$$

となる。ここで T は遷移確率とも考えられ、単位時間にある状態から別の状態に遷移する確率を与える。従って分母 $T t \rightarrow N(t)$ 、つまりステップ数とみることができる。これを用いて

$$g(L) = \sigma L^{d-2} \propto \frac{S_N}{N(t)} \quad (6.30)$$

を得る。電子が局在しているかどうかを判定するには

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N(t)} \quad (6.31)$$

が、0 となるかどうかを調べればよい。つまり、これが局在の判定式である。

次に、 $S_N \approx N^{\tilde{d}/2}$ になることを示す。そのために、 S_N の上限を考えてみる。 S_N は N -step で訪れることのできるサイト数であったから $S_N \leq N$ である。また、平均到達距離 $\langle r^2(t) \rangle^{1/2}$ の半径内のサイト数は $\Sigma_N \approx N^{\tilde{d}/2}$ であったから、 S_N の上限は以下の2つに場合分けされる。

$$(1) \tilde{d}/2 < 1 \text{ のとき } S_N \leq N^{\tilde{d}/2}$$

$$(2) \tilde{d}/2 > 1 \text{ のとき } S_N \leq N$$

従って (1) の場合、つまり $\tilde{d} < 2$ の場合には先の判定式は $S_N \approx N^{\tilde{d}/2}$ とすると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} = \lim_{t \rightarrow \infty} N^{\tilde{d}/2-1} \rightarrow 0$$

となる。したがって、 $\tilde{d} < 2$ の場合には、局在することがわかる。例えば、P.N. の場合、空間次元 d によらず $\tilde{d} \approx 4/3$ であることが知られているので、電子は必ず局在する。

第 7 章

フラクタル格子の固有値分布

ここでは Green 関数の方法及び有限サイズ・スケーリングの方法によってエネルギー状態密度を求めてみる。 $\tilde{d}$ が何故スペクトル次元と呼ばれるかが分かるであろう。

7.1 Green 関数の方法

7.1.1 拡散方程式の Green 関数

まず拡散方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (7.1)$$

時間に関して Laplace 変換をすると

$$\int_0^\infty \frac{\partial P}{\partial t} e^{-\epsilon t} dt - \int_0^\infty \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} e^{-\epsilon t} dt = 0. \quad (7.2)$$

第一項を部分積分して

$$[P(x, t)e^{-\epsilon t}]_0^\infty + \epsilon \int_0^\infty P(x, t)e^{-\epsilon t} dt - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty P(x, t)e^{-\epsilon t} dt = 0 \quad (7.3)$$

ここで

$$\tilde{P}(x, \epsilon) = \int_0^\infty P(x, t)e^{-\epsilon t} dt \quad (7.4)$$

とすると

$$\epsilon \tilde{P}(x, \epsilon) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{P}(x, \epsilon) = P(x, 0) \quad (7.5)$$

となる。次に初期条件を

$$P(x, 0) = \delta(x, 0) \quad (7.6)$$

で与え Fourier 変換する。

$$\delta(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (7.7)$$

$$\tilde{P}(x, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}(k, \varepsilon) e^{ikx} dk \quad (7.8)$$

以上より

$$\tilde{P}(k, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon + k^2} \equiv G_{dif}(k, \varepsilon) \quad (7.9)$$

が得られる。

7.1.2 波動方程式の Green 関数

波動方程式の場合には次のように書ける。

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (7.10)$$

これを Laplace 変換し先と同様に計算すると

$$G_{wave} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + k^2} \neq G_{dif}(k, \varepsilon^2)^* \quad (7.11)$$

が得られる。

7.1.3 拡散方程式と DOS(Density of states)

(7.8) で得られた $\tilde{P}$ を用いると、この系の DOS $D(\varepsilon)$ は次式で表すことが出来る。

$$D(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \tilde{P}(x=0, -\varepsilon + i0^+) \quad (7.12)$$

Proof:

(7.9) で $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon + i0^+$ とすると

$$G_{dif}(k, -\varepsilon + i0^+) = \frac{1}{-\varepsilon + k^2 + i0^+} \quad (7.13)$$

$$= \frac{1}{-\varepsilon + k^2} - i\pi\delta(\varepsilon - k^2) \quad (7.14)$$

従って、DOS は

$$D(\varepsilon) \equiv \sum_k \delta(\varepsilon - k^2) \quad (7.15)$$

* G_{dif} で $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^2$ とおいたものとは違うことに注意

$$= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_k G_{dif}(k, -\varepsilon + i0^+) \quad (7.16)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_k \tilde{P}(k, -\varepsilon + i0^+) \quad (7.17)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{P}(x, -\varepsilon + i0^+) e^{-ikx} \quad (7.18)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{2\pi} \int dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{P}(x, -\varepsilon + i0^+) e^{-ikx} \quad (7.19)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \tilde{P}(x=0, -\varepsilon + i0^+) \quad (7.20)$$

となる (証明終)。

更に D.O.S. と、時刻 t で原点にいる確率 $P(0, t)$ とは次のような関係がある。

$$P(x=0, t) = \int_0^{\infty} D(\varepsilon) e^{-\varepsilon t} d\varepsilon \quad (7.21)$$

Proof:

$P(x=0, t)$ を Laplace の逆変換すると

$$P(x=0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{P}(x=0, \varepsilon) e^{\varepsilon t} d\varepsilon \quad (7.22)$$

となる。ここで (7.8) と (7.9) より

$$P(0, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int dk \frac{1}{\varepsilon + k^2} \quad (7.23)$$

であるから (7.22) に代入して次式を得る。

$$P(x=0, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\varepsilon \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon + k^2} \quad (7.24)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-k^2 t} \quad (7.25)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dk \int d\varepsilon \delta(\varepsilon - k^2) e^{-\varepsilon t} \quad (7.26)$$

$$= \int_0^{\infty} d\varepsilon D(\varepsilon) e^{-\varepsilon t} \quad (7.27)$$

(証明終)

7.1.4 $G_{dif}(k, \varepsilon^2)$ と DOS の関係

$G_{dif}(k, \varepsilon^2)$ と $D(\varepsilon)$ の関係を調べることにより $D(\varepsilon)$ と $D(\varepsilon^2)$ の関係を導く。公式 (7.12) より

$$D(\varepsilon^2) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_{dif}(-\varepsilon^2 + i0^+, x=0) \quad (7.28)$$

であるから、これを計算すると

$$\begin{aligned}
 D(\varepsilon^2) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikx}}{-\varepsilon^2 + k^2 + i0^+} \\
 &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_k \frac{1}{k^2 - \varepsilon^2 + i0^+} \\
 &= \sum_k \delta(k^2 - \varepsilon^2) = \sum \delta(k - \varepsilon)(k + \varepsilon) \\
 &= \frac{1}{2\varepsilon} \sum \delta(k - \varepsilon) \\
 &= \frac{1}{2\varepsilon} D(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{7.29}$$

が得られる。

7.1.5 Percolation network の DOS

この節では、以上の関係式を用いて具体的に P.N. 上での振動問題の DOS を考えてみる。(6.19) 式より

$$P(x=0, t) \propto t^{-\frac{\tilde{d}}{2}} \tag{7.30}$$

であることがわかっている。従って、公式 (7.21) に代入すると

$$P(0, t) = \int_0^{\infty} D(\varepsilon) e^{-\varepsilon t} d\varepsilon = t^{-\frac{\tilde{d}}{2}} \tag{7.31}$$

である。これを逆変換することにより $D(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\frac{\tilde{d}}{2}-1}$ であることがわかる。この逆変換の収束条件は $\tilde{d} < 2$ であることに注意。 $\varepsilon \rightarrow \omega^2$ で置き換えると $D(\omega^2) \propto \omega^{\tilde{d}-2}$ となり、(7.29) を用いると

$$\begin{aligned}
 D(\omega) &= 2\varepsilon D(\omega) \\
 &= 2\omega \cdot \omega^{\tilde{d}-2} \propto \omega^{\tilde{d}-1}
 \end{aligned} \tag{7.32}$$

が得られる。このように $\tilde{d}$ はスペクトル分布を決定する指数であるため、スペクトル次元と呼ばれる。あるいはこのような励起状態をフラクトンと呼び、 $\tilde{d}$ をフラクトン次元とも言う [7]。

7.2 有限サイズ・スケーリングの方法

フラクタル構造に励起される振動モードの状態密度 (DOS) や分散関係等の特性を有限サイズ・スケーリングの方法によって求めてみよう。これを通して有限サイズ・スケーリングの有効性を理解してもらうことがここでの目的である。

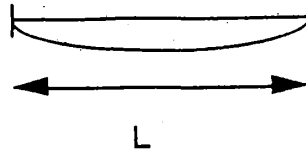


図 7.1: サイズ L の系での最低振動数

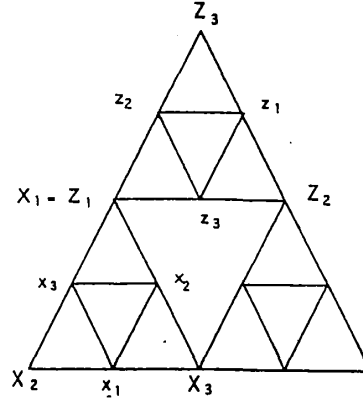


図 7.2: Sierpinski Gasket

7.2.1 DOS

まずスケール不変な系の最も単純な例として「等方連続な弾性体」を考える。ある振動数 ω における 1 粒子当たりの状態密度は、 $\omega \sim \omega + \Delta\omega$ の間にある単位体積当たりのモード数のことだから、サイズ L の系に対しては

$$D(\omega) \propto \frac{1}{\Delta\omega L^d} \quad (7.33)$$

と書くことが出来る。今、 ω をサイズ L からくる最低振動数 (図 7.1) とすると、分散関係 $\omega = vk$ より

$$\omega = \Delta\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} \propto \frac{1}{L} \quad (7.34)$$

である。従ってこれを (7.33) に代入すれば

$$D(\omega) = D(\Delta\omega) \propto (\Delta\omega)^{d-1} \quad (7.35)$$

が得られる。この関係は系の特徴により「どのような長さスケール L でも成立する」ので $\Delta\omega$ を任意の ω で置き換えてもよい。このことは連続体がスケール不変な性質を有していることを意味している。ここで $d=3$ について $\int_0^\infty D(\omega) d\omega = 1$ という規格化条件を用いると $D(\omega) = \omega^2 / (2\pi^2 v^3)$ という Debye の DOS を簡単に導くことができる。すなわち Debye の状態密度が有限サイズ・スケーリングの考え方で簡単に (多分最も簡単に) 求められたわけである。

次にフラクタル構造をとる例として、P.N. の場合を考える。(7.33) で $d \rightarrow D_f$ と置き換えることにより状態密度は

$$D(\omega) \propto \frac{1}{\Delta\omega L^{D_f}} \quad (7.36)$$

となる。ここで分散関係を $\Delta\omega \propto L^{-a}$ と仮定し、(7.36) から L を消去すると

$$D(\omega) \propto (\Delta\omega)^{\frac{D_f}{a}-1} \quad (7.37)$$

が得られる。(6.16) より P.N. 上での拡散については、 $\langle r^2(t) \rangle \sim t^{\frac{2}{2+\theta}}$ という長さと言時間との関係があることがわかっている。振動問題の場合、これを波数と振動数の関係とみれば $t \rightarrow (\Delta\omega)^{-2}$ として

$$L^2 \sim (\Delta\omega)^{\frac{-4}{2+\theta}} \quad (7.38)$$

を得る。従って

$$\Delta\omega \propto L^{-\frac{2+\theta}{2}} \quad (7.39)$$

という分散関係が得られる。すなわち分散関係の指数 a は

$$a = \frac{2+\theta}{2} \quad (7.40)$$

となる。従って (7.37) は

$$D(\omega) \propto (\Delta\omega)^{\frac{2D_f}{2+\theta}-1} \propto (\Delta\omega)^{\tilde{d}-1} \quad (7.41)$$

となる。(7.41) は系のフラクタル性から任意の $\Delta\omega$ について成り立つ。従って先と同様 $\Delta\omega \rightarrow \omega$ で置き換えて最終的に

$$D(\omega) \propto \omega^{\tilde{d}-1} \quad (7.42)$$

を得る。これは Green 関数の方法で求めた結果 (7.32) と当然ながら一致している。

7.2.2 長さスケール $\Lambda(\omega)$ と単一長さによるスケーリング

これまでの議論からわかるように L は波長に対応し ω の関数であるため、改めてこの量を $\Lambda(\omega)$ とすると分散関係は

$$\omega \propto \Lambda(\omega)^{-\frac{2+\theta}{2}} \propto \Lambda(\omega)^{-D_f/\tilde{d}} \quad (7.43)$$

である。従って $-D_f/\tilde{d}$ は分散曲線を定める指数であり、又、 $\Lambda(\omega)$ はフラクタルに関する唯一の長さスケールである。このようにスペクトル次元 $\tilde{d}$ はフラクタル構造のダイナミクスを記述するための最も基本的な指数であるといえる。

乱れない均質系では、波動を特徴づける長さスケールは波長 λ そのものである。ところが浸透網やフラクタル系では、乱れはフラクタル次元 D_f を通してすでにとりこまれており、波動を特徴づける長さスケールは、分散関係を表す (7.43) の $\Lambda(\omega)$ だけである。このユニークな性質は、“フラクトンの特徴づける長さスケールは $\Lambda(\omega)$ だけである” といい表わせる (single-length-scaling postulate: SLSP)。この立場にたてば、フラクトンが関係する物理量は $\Lambda(\omega)$ を用いてすべてスケールされることになる。すなわち物理量 $f(q, \omega)$ は次のようなスケーリング形にまとめることができる。

$$f(q, \omega) = q^{-\nu} F(q\Lambda(\omega))$$

SLSP は波長、散乱長、局在長が一つの長さスケール $\Lambda(\omega)$ に集約されてしまうことを意味している。すなわち局在長が波長のオーダーになり、フラクトンは「強い局在状態」にある。

ところで、“正”の電荷をもつ不純物ポテンシャルを導入することによって電子の強い局在状態を容易に作ることが出来る。しかし格子振動や光波あるいはスピン波に対して、“正”のポテンシャルに対応するものがないことに注意してほしい。フラクタルはまさに「すべての」周波数の波動を「強く局在させる」典型的構造なのである。

7.3 厳密に解ける例

これまでスペクトル次元 $\tilde{d}$ についてスケーリング理論の立場から論じてきた。P.N. の場合その具体的な値は解析的には求められず、大規模シミュレーションにたよらざるを得ない。これについては総合報告 [8] を参照のこと。この章ではそれが厳密に解ける例について説明する。

図 7.2 の Sierpinski Gasket を考える。図の $x_1, x_2, \dots, X_1, \dots$ 等には質点があり、それらが互いにバネ定数 K のバネで結ばれていると考える。このような系に振動を与えたとき、各質点の平衡位置からの変位を $x_1, \dots$ 等とする。このとき x_1 に関する運動方程式は、

$$m\ddot{x}_1 = K \sum_{\delta} (x_{\delta} - x_1) \quad (7.44)$$

である。ただし、 δ は x_1 に関する最近接点を表すものとする。 $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ とし、固有値問題におきかえると、

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} x_1 = \sum_{\delta} (x_1 - x_{\delta})$$

となる。以下、 ω^2/ω_0^2 を λ とおきかえる。具体的に x_1 についての方程式を書くと

$$\lambda x_1 = 4x_1 - x_2 - x_3 - X_2 - X_3 \quad (7.45)$$

であるから、

$$(\lambda - 4)x_1 + x_2 + x_3 = -X_2 - X_3 \quad (7.46)$$

と書き直せる。同様にして、 x_2, x_3 に関する方程式は、

$$x_1 + (\lambda - 4)x_2 + x_3 = -X_3 - X_1 \quad (7.47)$$

$$x_1 + x_2 + (\lambda - 4)x_3 = -X_1 - X_2 \quad (7.48)$$

である。以上、(7.46)-(7.48) より

$$x_2 + x_3 = -\frac{2(\lambda - 4)X_1 + (\lambda - 6)(X_2 + X_3)}{(\lambda - 2)(\lambda - 5)} \quad (7.49)$$

を得る。更に、 $X_1 \equiv Z_1$ であることに注意して $z_1 - z_3$ について同様の方程式を書き下すことにより、

$$z_2 + z_3 = -\frac{2(\lambda - 4)Z_1 + (\lambda - 6)(Z_2 + Z_3)}{(\lambda - 2)(\lambda - 5)} \quad (7.50)$$

が得られる。一方、 X_1 に関する運動方程式は、

$$\lambda X_1 = 4X_1 - (x_2 + x_3 + z_2 + z_3) \quad (7.51)$$

である。(7.49)、(7.50) を (7.51) に代入すると、

$$-(\lambda - 4)(\lambda - 1)X_1 = -(X_2 + X_3 + Z_2 + Z_3) \quad (7.52)$$

となる。つまり、 X_1 に関する運動方程式がすべて大文字の X と Z で表示できた。これは Sierpinski Gasket をスケールを 2 倍にしてみたときの質点 X_1 の運動方程式になっている。ここで新たな固有値 λ' を

$$\lambda' - 4 = -(\lambda - 4)(\lambda - 1) \quad (7.53)$$

と考えると (7.52) 式は (7.46) 式に対応する。 λ' をくりこまれた固有値という。(7.53) 式より $\lambda' = \lambda(5 - \lambda)$ という関係があることがわかる。ここで、5 は空間次元と関係し、一般に d 次元では、

$$\lambda' = \lambda(d + 3 - \lambda) \quad (7.54)$$

と表される。 λ を ω に書き換えると

$$\frac{\omega'^2}{\omega_0^2} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(d + 3 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \quad (7.55)$$

低振動数 $\omega^2/\omega_0^2 \ll 1$ の場合には、

$$\omega'^2 = \omega^2(d + 3) \quad (7.56)$$

つまり、 $\omega' > \omega$ になることがわかる。分散関係 $\Delta\omega(L) \propto L^{-a}$ を仮定し、 a を求めてみよう。

$$\Delta\omega(L/b) \propto b^a \Delta\omega(L) \quad (7.57)$$

である。低振動数では、 $\Delta\omega \sim \omega$ と考えてよいから $\omega(L/b) = \omega'$ とすれば

$$\omega'^2 \propto b^{2a} \omega^2 \quad (7.58)$$

という関係が得られる。これを (7.56) と比較すれば

$$b^{2a} = d + 3$$

となる。従って、

$$a = \frac{\ln(d+3)}{2\ln b}$$

のように分散関係を表す指数 a が求められた。

$a \equiv D_f/\tilde{d}$ であったから、これより $\tilde{d}$ を求めることもできる。Sierpinski Gasket の場合、第一章より $D_f = \ln(d+1)/\ln b$ であるから

$$\tilde{d} = 2 \frac{\ln(d+1)}{\ln(d+3)} < 2 \quad (7.59)$$

と厳密に求められる。

$\tilde{d} < 2$ であるので、Sierpinski gasket のような「規則的」構造でも次元 d によらずすべての励起が局在することに注意。

第 8 章

おわりに

フラクタル構造のダイナミクスの問題点を分かりやすく説明してきた。5 日間の特別講義の時間内では、残念ながらパーコレーション反強磁性体のダイナミクスの問題にふれることができなかった（講義ノートは作っておいたのですが）。以下にその要点だけを記しておく。第 4 章で示したように、多くの物理系を拡散問題と同じユニバーサリティー・クラスに属する問題として解くことができた。しかし反強磁性の場合だけは、(4.19) と (4.20) を比較すれば分かるように方程式が異なっている。すなわち反強磁性フラクソンは拡散問題とは全く違うユニバーサリティー・クラスに属することになる。この問題に対して最近大きな発展があった。これについては、我々の総合報告 [8] を参考にいただきたい。

謝辞

本稿は 1994 年 5 月、お茶の水大学理学研究科物理学専攻の、主に修士課程と博士課程の学生を対象に行った特別講義のノートである。暑い夏の到来を予感させるのに十分な気温の中で、最後まで講義につきあっていただいた学生諸君に心より感謝したい。特に、本講義ノートを $\text{\TeX}$ でまとめていただいた太田研究室の本山さん、鴨門さん、末吉さん、森さんには、貴重な研究や勉強の時間を失わせたのではないかと心苦しい思いである。今後の活躍を期待して謝辞としたい。

True end is not in the reaching of the limit, but in a completion
which is limitless : R. Tagore (1928).

参考文献

- [1] P. G. de Gennes, “*Scaling Concepts in Polymer Physics*”, (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1979) Sec. 1.3.
- [2] B. B. Mandelbrot, *J.Fluid Mech.*, **62**, 331 (1974).
- [3] S. Alexander, *Phys.Rev.*, **B27**, 1541 (1983).
- [4] P. G. de Gennes. *La Recherche*, **7**, 919 (1976).
- [5] Y.Gefen, A.Aharony and S.Alexander, *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 77 (1983).
- [6] R.Rammal and G. Toulouse, *J. Phys. (Paris) Lett.*, **44**, L13 (1983).
- [7] S.Alexander and R.Orbach, *J.Phys. (Paris) Lett.*, **43**, L625 (1982).
- [8] T.Nakayama, K.Yakubo and R.L.Orbach, *Rev. Mod. Phys.*, **66**, 381 (1994).