「巨視的量子現象と散逸」

東北大・理・物理　高木　伸

0. 序

量子力学（QM；場の量子論を含む）が現在の物理学的認識の基本枠組であることは万人が認める所であろう。超ミクロから超マクロまで、実験的検証の可能性を遥かに超えた気の遠くなるような外挿理論が、この枠組内で論じられている。しかし、これを究極の土俵として受け入れるのはためらわれる。猫問題が存在するからである。

「巨視的量子現象（MQP=Macroscopic Quantum Phenomena)」の研究は、猫問題に対する一つのアプローチである。猫問題は QM と MR（Macro Realism；巨視的実在論）の対立であり、この対立は、線形結合状態が微視的レヴェルから巨視的レヴェルへと伝染する（MMM; Micro-to-Macro Magnification）により生ずる。しかし、MMM は「QM が巨視的レヴェルに於いても妥当である」との仮定に基づく。この仮定を実証的に点検しよう、という観点から、MQP 研究のプログラムとして提唱されたのが Leggett 構想（LP; Leggett Program）である。その概要については、別の所 [Takagi, Kagaku; 以下Ｉと呼ぶ] にまとめておいたのでそれを参照して頂きたい。重複を避けるため、以下ではＩを補足する形で、その個々の論点について少し立ち入った議論を試る。（同一著者の筆になる異なる出版物が内容的に殆ど重なっている、という例が頻見される。国内研究会報告、国際集会プロシーディング、レター、本論文という quartet はざらである。量だけ増えて有効情報量は殆ど増えず、煩わしい。多少止むを得ない点はあるにしても好ましくないと自戒をこめて想う。できるだけ Schmidt 方式を採り、書き物の内容の直交化を図りたい。）

1. MQP と散逸：一般的なコメント

MQP 研究を QM の側に立って見れば、どの程度に巨視的なレヴェルまで量子力学的現象の存在を確認し得るか、という挑戦である。つまり、出来るだけ量子力学的 coherence が保たれるような静謐な環境を用意することを目指す。いわゆる decoherence の効果を極力抑えたい。そのためには decoherence の効果を明確に同定する必要があり、従って MQP 研究は decoherence 研究と切り離すことが出来ない、という訳である。MQP の立場は、「QM の普遍的妥当性を承認し、かつ QIMDS の非存在を（既定の事実とみなして）QM の枠内で証明（納得）しよう」という伝統的立場（DCS; Decoherence and Classicalization School）と方向性を逆にするものであると言える。しかし、対象とする現実の系および物理・数理的考え・技術は両者に共通である。ちなみに、散逸（すなわち、選別された少数の巨視的自由度（”エリート自由度”）から多数の微視的自由度（”大衆自由度”）へのエネルギー（を初めとする準保存量）の非可逆的移行）は decoherence の機構の、重要ではあるが、一部であ

る。一般に

$$\text{Decoherence} = \text{Dissipation} + \text{Dephasing}.$$

このDDD公式は、古来よりMR (magnetic relaxation) 理論において認識されている[Bloch; Kubo-Tomita; etc.]。3節参照。

2. Decoherence

Coherence(可干渉性) に否定詞を付けたこの言葉が頻りに使われ始めたのは1980年代後半に現れたGell-MannとHartle [Gell-Mann-Hartle] の共著論文以降と思われる（最近ではnon-decoherenceという妙な言葉さえ見かける)。しかし、その基本的考え方自体はQMの歴史と同じくらい古くより存在する。一言で云えば、「MMMに伴ってDDDが同時進行するから、QIMDSは実際上検出不可能」という考えである。なお、QIMDSに限らず、微視的に異なる二状態間の干渉も「環境によるdecoherence」を蒙り得る。(ここでは「環境」という言葉を、対象とする巨視系（例えば猫）の多数の「内部自由度」(生と死を区別する以外の自由度）をも含んだ意味で用いている。) 巨視的な場合には、それが不可避かつ致命的である、というのが「伝統的立場」の趣旨である。(これに続いて、「従って、ANDは事実上 ("For All Practical Purposes") ORと同じである」と論じられることが多いが、このような議論 ("FAPP argument") によってTAO問題が解消する訳ではない。)

ただし、Gell-Mann-Hartle, Omnes, Yamadaおよびそれらの先駆者Griffiths, 等によって研究されている非干渉性歴史 (non-interfering histories, decohering histories, もしくはconsistent histories) という概念は、1980年代に入ってから新しく展開されているものであり、QMの枠組自体にとって重要な問題である。が、以下の話はこれとは直接関係しない。

3. $D = D + D$: 素人（含筆者）のためのMR梗概

（MR理論について詳しくは柴田氏の講演を参照。）

環境中のスピン1/2（二準位系）のQMを考える。

$|+>\equiv$“スピンの初期状態”$:= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow> + |\downarrow>)$

$|\chi>\equiv$“環境の初期状態”

$|\Psi(0)>\equiv$“全系の初期状態”$= |+>|\chi>$

$\hat{H}_e \equiv$“環境のハミルトニアン”

$\hat{H}_{s-e} \equiv$“スピンと環境の相互作用ハミルトニアン”

$\hat{H} \equiv$"全系のハミルトニアン"$:= \hbar\Omega\hat{S}_3 + \hat{H}_e + \hat{H}_{s-e}$

$|\Psi(t)> \equiv \exp(-i\hat{H}t/\hbar)|\Psi(0)>$

これを $\{|\sigma>|\sigma=\uparrow,\downarrow\}$ で展開することは常に可能;

$$|\Psi(t)> = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e^{-i\Omega t/2}|\uparrow>|\tilde{\chi}_\uparrow(t)> + e^{i\Omega t/2}|\downarrow>|\tilde{\chi}_\downarrow(t)>\}$$

各項のノルム

$$\mathcal{N}_\sigma(t) \equiv \| \, |\tilde{\chi}_\sigma(t)> \|, \quad |\chi_\sigma(t)> := (\mathcal{N}_\sigma(t))^{-1}|\tilde{\chi}_\sigma(t)>$$

を導入すれば

$|\Psi(t)> = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_\sigma e^{-i\sigma\Omega t/2}\mathcal{N}_\sigma(t)|\sigma>|\chi_\sigma(t)>.$

$\rho(t) := |\Psi(t)><\Psi(t)|$

$W(+t|+0) \equiv$"$|+>$の persistence probability"

$\equiv$"時刻 0 に $|+>$であったとして時刻 t にも $|+>$である条件付確率, つまり $|+>$から $|+>$への遷移確率"

$:=\mathrm{Tr}\{\rho(t)|+><+|\}$

$=\|<+|\Psi(t)>\|^2 = \frac{1}{2}\{1 + Re\, \mathcal{C}(t)\}$

$\mathcal{C}(t) \equiv$coherency$\equiv$"$\uparrow$と$\downarrow$ の干渉性の目安"

$:=\mathrm{Tr}\{\rho(t)|\downarrow><\uparrow|\}$

$= e^{-i\Omega t}\mathcal{N}_\downarrow(t)\mathcal{N}_\uparrow(t) <\chi_\downarrow(t)|\chi_\uparrow(t)>$

典型的な漸近 $(t \sim \infty)$ 振舞

$$\mathcal{N}_\uparrow(t) \sim e^{-t/2T_1}\ , \ \mathcal{N}_\downarrow(t) \sim (1 - e^{-t/T_1})^{1/2}$$

$$<\chi_\downarrow(t)|\chi_\uparrow(t)> \sim \exp\{-(\frac{1}{T_2'} - i\delta\Omega)t\}$$

故に

$$\mathcal{C}(t) \sim \exp\{-(\frac{1}{T_2} + i\tilde{\Omega})t\}\ ,\ \frac{1}{T_2} \equiv \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_2'}\ ,\ \tilde{\Omega} \equiv \Omega - \delta\Omega.$$

これら T_1, T_2', $\delta\Omega$を計算することが MR 理論の重要課題である。(7節の MQC の場合には、上のように定義した周波数偏移$\delta\Omega$が、通常、正となる。つまり、赤方偏移。) Coherency の decay time ("横緩和" 時間) は、energy dissipation ("縦緩和") に起因する項 $(1/2T_1)$ と dephasing に起因する項 $(1/T_2')$ とから成る。伝統的に、それぞれ、life-time effect, secular broadening とも呼ばれる [Slichter]。(所謂 motional narrowing に関係するのは後者の効果である。) 少なくともこれら基本概念については MR 理論から学ぶ所大である。

4. 巨視的実在論 (MR; MacroRealism)

Einstein は, とある散歩の折、猫の代わりに月を引き合いに出してこう言ったと伝えられる。「貴方は本当にそう信じますか、お月さんは貴方が観ているときにのみ存在する、と。」 (" ··· during one walk Einstein suddenly stopped, turned to me and asked whether I really believed that the moon exists only when I look at it." [Pais]) この会話は、必ずしも「巨視的レヴェルの実在」の問題に限ったことではなかったかもしれないが、MRを代弁する言葉としてふさわしい。MR とは、以下の二つの仮定 (A1, A2) を認める認識論的立場である [Leggett Garg]。

MRA1:巨視的確定性 (Macroscopic Definiteness) の仮定

巨視系の状態として、互いに巨視的可峻別な複数の状態 $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \cdots\}$ が考えられる場合、その巨視系は観測されていようといまいとに拘らず、常に、$\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \cdots\}$ のうちのいずれか一つの状態に存在する。

MRA2:無侵襲可測性 (Non-Invasive Measurability) の仮定

巨視系の状態は、常に、原理的に無限小のじょう乱で確定され得る、即ち、状態を確定すべく行われる測定過程が巨視系のその後の振舞に及ぼす影響は原理的にいくらでも小さくされ得る。[cf:Shinomoto]

QM は一般に A1, A2 のいずれをも認めない。差し当りの議論において必要なのは A1 のみである。(あとで、LG 不等式と実験を対比する際に A2[および A3:Induction (しかし、これは MR vs QM に限らず常に必要] も必要となる) である。「観測されればいずれかの状態に見出される」というのは経験事実 (もしくは「観測」の定義?) であって、QM もこれを認める。これに対し A1 の主張の要点は、「観測されようとされまいと」という部分にある。

5. LP

LP の最終目標は、その提唱者の言葉を引用すれば、以下の通りである。

"At the macroscopic level does Nature believe in quantum mechanics, in realism or in neither?"

(Mentioned as "the biggest question of all" at the end of the lecture[Leggett, Les Houches])

勿論 QM の破綻の兆候がすでにどこかに見られる訳ではないが、「MR と対比したときの QM の奇妙さ」が QM の破れの探索をも射程にいれたこのプログラムの動機となっている。（と同時に、宇宙における微々たる存在としての人類が、理論の細部は別として既に究極の枠組みに到達した、と考えるのは些か傲慢に過ぎないか、という心情的異存もあろうかと筆者は想うが、以下は一応それとは別の次元の議論である。）標語としては Try to Create Laboratory Cousins of the S-Cat [cf: Leggett, Kagaku]。

6. MQP

言葉遣いについて一言注意しておきたい。1970 年代以前には巨視的量子現象という言葉は超流動・超伝導の代名詞として使われていた。コップ内の液体ヘリウムがコップの壁をよじ登ってするすると流れ出る、といった現象は疑いもなく巨視的であり、かつＱＭによってのみ説明可能である。しかし、これらは１もしくは２粒子のレヴェルでの干渉効果が、多数の粒子が歩調を揃えて振る舞う（Bose-Einstein 凝縮）ことにより、巨視的なスケールに拡大された結果として生ずる現象である。そこには QIMDS の関与はなく、本稿のＭＱＰ（ＭＱＣやＭＱＴ）とは本質的に異なる。前者を「第一種巨視的量子現象」、本稿のＭＱＰを「第二種巨視的量子現象」、と称することもある。

MQT については I でも述べた（そこで触れた Josephson 接合系の実験は Clarke らによる [Clarke et al]）ので、以下、MQC について考える。

7. MQC(Macroscopic Quantum Coherence)

SQUID 環を貫く磁束Φや微小磁性体の磁化 $\mathcal{M}$ に対しては、縮退した二重井戸型 (DDW= degenerate double well) ポテンシャルで表される状況を現実にしつらえることが可能である。縮退した二つの（近似的）基底状態を $|\pm>$ とし、対象とする巨視的自由度（Φや $\mathcal{M}$）を記述する Hilbert 空間を $|\pm>$ で張られる二次元空間に制限 (truncate) して考えたとすれば、問題は前節と同型となる。$|+>$ と $|->$ の間の振動の検出可能条件は

(i)$\hbar\tilde{\Omega} > T \equiv$ 温度　　(7.1)

(ii)$\tilde{\Omega}T_2 \gtrsim 1.$　　(7.2)

条件 (i) が破れても、MQC の痕跡が観察できる可能はあるが、純粋に量子力学的な regime を達成すべくその成立が望ましい。

後で述べる CLS(Caldeira-Leggett scheme) が成立するならば、

$\gamma \equiv (\tilde{\Omega}T_2)^{-1} \simeq \pi\eta/2$

$\eta \equiv$"量子まさつの強さ"

$\equiv$"巨視的自由度が古典的に振る舞う（古典的な Brown 運動をする）と見なされ得る状況においてその運動の記述に現れるまさつ係数を$\eta_{\rm conv}$とするとき、$\eta_{\rm conv}$が、同自由度の量子論的運動に及ぼす効果を表す無次元量"
従って　　(7.2) $\Leftrightarrow$ $\eta \lesssim 1$ 。
具体的に SQUID の場合、
$\mathcal{R} \equiv$"SQUID を所謂 RSJ(=resistively shunted junction) 模型で記述したときの電気抵抗"

$\phi_0 \equiv$磁束量子$:= \frac{2\pi\hbar}{2e}$

$\eta_{\rm conv} = 1/\mathcal{R}$

$\eta := \frac{\phi_0^2}{2\pi\hbar}\eta_{\rm conv} = \frac{1}{4}\frac{\mathcal{R}_H}{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}_H \equiv 2\pi\hbar/e^2 \simeq 2.5 \times 10^4$ohm.

今の所 MQC は実証されていないが、$\mathcal{R} \sim 10^9$ohm を達成する技術も存在するようなので、条件 (ii) に関しては希望は充分にある。むしろ条件 (i) の方が困難をもたらすかも知れない；

$$T/\hbar = 1.3 \times 10^5 (T/1\mu K)\text{sec}^{-1}.$$

つまり、MHz 程度の振動を検出せねばならない。なお、微小磁性体における MQC の可能性については、小林・羽田野・鈴木氏のポスター [Kobayashi-Hatano-Suzuki] を参照されたい。

8. QM 対 MR

MQC 振動が検出されたとしても、直ちに、「猫状態の確認」と結論づけるのは速断にすぎる。MQC は、「QM によれば猫状態によって記述される」という意味で猫状態と両立するが、MR とも両立するかも知れぬ。つまり、実験結果が、「QM とは両立するけれども MR とは両立しない」という事が言えて初めて猫状態の存在が立証されたことになる。（ここでは、一応、QM の対抗馬としては MR 以外にないものと仮定。）そのような結論を下し得るための定量的 criterion が必要である。

有名な Bell の定理は、「QM とは両立するが LR とは両立しない（LR; LocalRealism, 局所的実在論)」現象の存在を指摘したものであり、そのような現象（EPR [Einstein-Podolsky-Rosen] 相関）の存在が実証されたことは周知の事実である。そこで、Bell の故事に習い、QM vs MR という対立に黒白を決すべき不等式が提案された。それが次に述べる LG 不等式である。（LR と同じく、MR と言っても何か具体的な理論を念頭に置いている訳ではない。4

節の A1, A2 を満たす理論なら何でもよい。そのような一類の理論全体をひとまとめにして QM（もしくは実験）と定量的に付き合わせようという試みである。）

"Thus, if the MQC experiment can be done under appropriately stringent conditions, we shall in effect be able to *force nature to choose between quantum mechanics and macro-realism*" [Leggett, Les Houches p503]

"(Experimental violation of LG inequality would allow us to verify,) irrespective of the framework in which the experiments are interpreted, that under certain circumstances a macroscopic object need not be in a definite macroscopic state" [Leggett ISQM 86 p291 left]

LG 不等式を考案する動機:

"Is it possible to confront the hypothesis of MR directly with the experimental data, without the intervention of a QM'l interpretation of the latter? In other words, is it possible to devise an experiment which if comes out according to the predictions of QM, must unambiguously refute the hypothesis of MR? (This is) what Bell did for the local realism. [Leggett Lecture p225~226]

つまり、LG 不等式は、QM と無関係に「MR 対実験」に使える。しかし、現実に興味のあるのは、「MR 対実験対 QM」である。この付き合わせを、QM と MR が矛盾する（つまり、QM の予言が LG 不等式を破る）ような状況で行うことである。これが QM 対 MR という標題のゆえんであり、この事情は Bell 不等式の場合と共通である。

"(These (MQC) experiments can also be used to explore the limits of QM.) Indeed, from my point of view, it is somewhat depressing that so far experiment has given no indication that the limits are being approached." [Leggett, ISQM 86 p297 right]

もちろん、「QM の破れ」を実証するのは並大抵のことではない。

"Even if LG is satisfied expeimentally when QM predicts otherwise, there always remains a possibility that the QM-theory overlooked a possible mechanism of decoherence, which would make QM-theoretical prediction compatible with the LG inequality."

大それた主張をするには細心の注意が要求される。同様のコメントは QM 対 LR の場合についても当てはまるが、MR の対象は LR のそれに比べて遥かに複雑であり、それ故、非常な困難が予想されることは云うまでもない。

9. Leggett-Garg 不等式

着目する巨視系の状態として、巨視的可峻別な二つの状態 $S_{\pm}$ が考えられるとする。かつ、この系の状態を表す巨視変数 R が存在し、状態 $S_{\pm}$ は、それぞれ、R の値 ± 1 に対応するものとする。以下、本節では MR が成立すると仮定する。MRA1 により

$$^{\forall}t\ ,\ \text{“}R(t) = +1 \text{ or } -1\text{''}$$

以下、簡単のため、ある4個の時点 $t_4 > t_3 > t_2 > t_1$ のみを考えることにすれば

$$^{\forall}j \in \{4,3,2,1\}\ ,\ \text{“}R(t_j) = +1 \text{ or } -1.\text{''}$$

従って、以下の性質を持つ joint probability $\mathcal{P}$ が存在する筈である。

$\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\sigma_4 t_4 | \sigma_3 t_3 | \sigma_2 t_2 | \sigma_1 t_1)$

$\equiv$ “$R(t_j) = \sigma_j$, $j = 1,2,3,4,$ なる確率”

(ただし、$^{\forall}j$,“$\sigma_j = +1$ or -1”)

$\mathcal{P} \geq 0$

$\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} \mathcal{P} = 1$

これに基き、Rの時間相関函数を定義することが出来る。即ち $4 \geq j > i \geq 1$ なる任意の対 (j,i) に対し、

$$C_{ji} := \sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} \sigma_j \sigma_i \mathcal{P}.$$

これは以下の不等式を満たす（複号同順）：

$$|C_{32} \pm C_{31}| \mp C_{21} \leq 1$$
$$|C_{32} \pm C_{21}| \mp C_{31} \leq 1$$
$$\mathcal{K}_1 \equiv |C_{32} - C_{31}| + C_{21} \leq 1$$
$$\mathcal{K}_2 \equiv -(C_{32} + C_{21} + C_{31}) \leq 1$$

[LeggettGarg(2a)]

$$|C_{32} + C_{21}| + |C_{43} - C_{41}| \leq 2$$

[LeggettGarg(2b)]

$$-1 \leq \mathcal{K}_3 \equiv \frac{1}{2}\{C_{43} + C_{32} + C_{21} - C_{41}\} \leq 1$$

[Leggett, LesHouches]

証明:（本質的に Bell および Clauser-Horne-Shimony-Holt 不等式の証明と同じ）

（手順 1）$\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma_j (j = 1 \sim 4)$ はすべて binary 変数 (± 1) とすれば

$$|\sigma\sigma'' + \sigma'\sigma''| = |\sigma\sigma''(1 + \sigma\sigma')| = 1 + \sigma\sigma'$$

$(1.1)\sigma = \sigma_1,\ \sigma' = \pm\sigma_2,\ \sigma'' = \sigma_3,$ と置けば

$$1 \pm \sigma_1\sigma_2 = |\sigma_1\sigma_3 \pm \sigma_2\sigma_3|$$

故に

$$\begin{cases} 1 \pm \sigma_2\sigma_1 + \sigma_3\sigma_1 \pm \sigma_3\sigma_2 \geq 0 \\ 1 \pm \sigma_2\sigma_1 - (\sigma_3\sigma_1 \pm \sigma_3\sigma_2) \geq 0 \end{cases}$$

(1.2)$\sigma = \sigma_1$, $\sigma' = \sigma_3$, $\sigma'' = \sigma_2$と置けば

$$|\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_2| = 1 + \sigma_1\sigma_3$$

$\sigma = \sigma_1$, $\sigma' = -\sigma_3$, $\sigma'' = \sigma_4$と置けば

$$|\sigma_1\sigma_4 - \sigma_3\sigma_4| = 1 - \sigma_1\sigma_3$$

故に

$$|\sigma_2\sigma_1 + \sigma_3\sigma_2| + |\sigma_4\sigma_3 - \sigma_4\sigma_1| = 2$$

$$-2 \leq \sigma_2\sigma_1 + \sigma_3\sigma_2 \pm (\sigma_4\sigma_3 - \sigma_4\sigma_1) \leq 2$$

(手順２)
(2.1)

$$1 \pm C_{21} + C_{31} \pm C_{32} = \sum_{\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1} (1 \pm \sigma_2\sigma_1 + \sigma_3\sigma_1 \pm \sigma_3\sigma_2)\mathcal{P} \geq 0.$$

上の不等式は (1.1) の第２式を使って導いた。同様に (1.1) の最後の式を用いて

$$1 \pm C_{21} - (C_{31} \pm C_{32}) \geq 0$$

故に第１不等式ｑｅｄ。また２と３を入れ替えて第２不等式ｑｅｄ。

(2.2) 上の (2.1) の第１の式で＋符号をとれば第４不等式ｑｅｄ。

(2.3)　(1.2) の最後の式より

$$-2 \leq C_{21} + C_{32} \pm (C_{43} - C_{41}) \leq 2$$

故に

$$\begin{cases} C_{21} + C_{32} + |C_{43} - C_{41}| \leq 2 \\ -2 \leq C_{21} + C_{32} - |C_{43} - C_{41}| \end{cases}$$

故に

$$\pm(C_{21} + C_{32}) + |C_{43} - C_{41}| \leq 2$$

故に第５不等式ｑｅｄ。
(2.4)

$$|C_{43} + C_{32} + C_{21} - C_{41}| \leq |C_{32} + C_{21}| + |C_{43} - C_{41}|$$

故に最終不等式ｑｅｄ。

定理: (Maximal violation of LG inequalities at equally-spaced times)

相関函数 C_{ji}が定常かつ下に凸とする。つまり

$$C_{ji} = C(t_j - t_i), \quad C''(t) > 0$$

なる函数 Cが存在するとする。この場合、t_3と t_1を固定すれば、$t_3 - t_2 = t_2 - t_1$のとき、$\mathcal{K}_2$は最大となる。同じく、$C''(t) < 0$ とすると、t_4と t_1を固定すれば t_4, t_3, t_2, t_1が等間隔のとき $\mathcal{K}_3$は最大となる。（この定理は以下で有用となる。）

証明:

$$\tau \equiv t_3 - t_1 \ , \ x \equiv (t_2 - t_1)/\tau \ ,$$

と置けば

$$\mathcal{K}_2 = -f(1-x) - f(x) - C(\tau) \ , \ \ 0 \le x \le 1.$$

故に

$$d\mathcal{K}_2/dx = -f'(x) + f'(1-x)$$

仮定により $f''(x) > 0$,　つまり $f'(x)$ は単調増大。故に $\mathcal{K}_2$は $x = 1 - x$ にて最大。ｑｅｄ。

9.1 実測できる相関函数

実験的に決定できるのは以下の諸量である。

$\mathcal{P}(\sigma t_i) \equiv$ “$R(t_i) = \sigma$なる確率”

$W(\sigma' t_j|\sigma t_i) \equiv$ “$R(t_i) = \sigma$であった場合に、$R(t_j) = \sigma'$となる条件付確率、つまり $\mathcal{S}_\sigma$から $\mathcal{S}_{\sigma'}$への遷移確率”

これらを用いて

$$C_{ji}^{\mathrm{exp}} := \sum_{\sigma'\sigma} \sigma'\sigma W(\sigma' t_j|\sigma t_i)\mathcal{P}(\sigma t_i)$$

これを MR の C_{ji}と比べるには、MRA2 を援用する。MAR2 に言う NIM が実現されたとすれば、巨視系のアンサンブルの統計的性質（つまり $\{\mathcal{P}\}$）は測定によって影響を受けないから、

$$W(\sigma' t_3|\sigma t_2)\mathcal{P}(\sigma t_2) = \sum_{\sigma_4\sigma_1} \mathcal{P}(\sigma_4 t_4|\sigma' t_3|\sigma t_2|\sigma_1 t_1), \text{ etc.}$$

(注:QM においては、このような式は勿論不成立。そもそも joint probability $\mathcal{P}$が “合理的に” (つまり、amplitude の和則、probability の和則、および確率の規格化がすべて consistent

になるように)定義できるかどうか、ということから考え直さねばならない。)従って、MRが正しいとすれば

$$C_{ji}^{\exp} = C_{ji} \ .$$

9.2 QM の相関函数

一方、QM においては、$\mathcal{S}_{\pm}$が DDW の極小に対応するとすれば、+と−の対称性から

$$W^{\mathrm{QM}}(\sigma' t_j|\sigma t_i) = \mathcal{P}_+(t_j - t_i)\delta_{\sigma'\sigma} + \{1 - \mathcal{P}_+(t_j - t_i)\}\delta_{\sigma' -\sigma}$$

故に

$$\begin{aligned} C_{ji}^{\mathrm{QM}} &:= \sum_{\sigma'\sigma} \sigma'\sigma W^{\mathrm{QM}}(\sigma' t_j|\sigma t_i)\mathcal{P}(\sigma t_i) \\ &= \sum_{\sigma}[\mathcal{P}_+(t_j - t_i) - \{1 - \mathcal{P}_+(t_j - t_i)\}]\mathcal{P}(\sigma t_i) \end{aligned}$$

[ ] 内はσに依らない。かつ定義により

$$\sum_{\sigma} \mathcal{P}(\sigma t_i) = 1 \ \ .$$

故に

$$C_{ji}^{\mathrm{QM}} = 2\mathcal{P}_+(t_j - t_i) - 1 = Re\, \mathcal{C}(t_j - t_i).$$

(この$\mathcal{C}$は3節で定義した coherency である。)QM が正しければ、これが$C_{ji}^{\exp}$と一致する筈である。[ただし、"時刻t_iにおいて当該の巨視系を状態$\mathcal{S}_\sigma$に見出す" ための測定が、系の$t > t_i$に於る時間発展(ただし時刻t_iに状態$\mathcal{S}_\sigma$にあったという初期条件での時間発展)に影響を及ぼさない、という条件を満たす実験でなければならない。この条件は、初期状態が$\mathcal{S}_{-\sigma}$の場合の$t > t_i$に於る時間発展に関しては何も要請しない、つまり、後者がが当該の測定によって乱されることは許容する、ということに注意しておこう。つまり、MRA2 とは全く異なる条件である。]

(注:厳密に言うと、以上 9.1, 9.2 において、MR, QM いずれにおいても、Induction Hypothesis を用いている。)

ここで2節の結果を使えば

$$C_{ji}^{\mathrm{QM}} = C(t_j - t_i), \quad C(t) \equiv e^{-t/T_2}\cos\tilde{\Omega}t$$

$$[\alpha << 1 \text{ limit of Leggett, LesHouche(6.26)};\ \tilde{\Omega} = \Delta_{\text{eff}}]$$

少なくとも

$$\pi/2 < \tilde{\Omega}t < 3\pi/2$$

であれば $C''(t) > 0$。故に上述の定理が使える。そこで、以下、$t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = \theta/\tilde{\Omega}$ とし、$\gamma \equiv (\tilde{\Omega}T_2)^{-1}$ と置けば

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2^{\mathrm{QM}} &\equiv -C_{32}^{\mathrm{QM}} - C_{21}^{\mathrm{QM}} - C_{31}^{\mathrm{QM}} \\ &= -2e^{-\gamma\theta}\cos\theta - e^{-2\gamma\theta}\cos 2\theta, \end{aligned}$$

$$\pi/2 < \theta < 3\pi/2.$$

もし環境による decoherence が無視できる $(\gamma = 0)$ なら、

$$\mathcal{K}_2^{\mathrm{QM}} = -2(\cos\theta + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}$$

$$(\mathcal{K}_2^{\mathrm{QM}})_{\max} = (\mathcal{K}_2^{\mathrm{QM}})_{\theta=2\pi/3} = 3/2.$$

これは LG 第 4 不等式と矛盾する。従って QM 対 MR に黒白が付けられる。これに対し、decoherence の効果が大 $(\gamma >> 1)$ であると、$|\mathcal{K}^{\mathrm{QM}}| << 1$ となってしまい、もはや QM と MR は LG 不等式に関しては矛盾しない。どの程度のγまで $\mathcal{K}^{\mathrm{QM}}$が LG 不等式を破るか、およその見積りをすべく、$\theta = 2\pi/3$ と採れば (optimal なθの正確値はγに依存するが、以下の結果からして、このγ- 依存性は余り重要でない)

$$\mathcal{K}_2^{\mathrm{QM}} = z_2 + \frac{1}{2}z_2^2 \ , \ z_2 \equiv e^{-2\pi\gamma/3}$$

従って

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2^{\mathrm{QM}} > 1 &\Leftrightarrow z_2 > \sqrt{3} - 1 = 0.7320\cdots \\ &\Leftrightarrow \gamma < 0.1489\cdots \Leftrightarrow \eta < 0.09480\cdots \end{aligned}$$

ただし、最後に CLS における結果 ("$\alpha << 1$ limit"), $\gamma = \pi\eta/2$, を用いた。[cf: αの高次を考慮すると（?）[Leggett Garg p858] $\eta < 0.11$.]

Leggett-Garg の原論文は上の $\mathcal{K}_2$を議論したのであるが、実は、$\mathcal{K}_1$の不等式の方が役に立つ。それを見るには、上と同じ記法を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1^{\mathrm{QM}} &= |e^{-\gamma\theta}\cos\theta - e^{-2\gamma\theta}\cos 2\theta| + e^{-\gamma\theta}\cos\theta \\ &= 2e^{-\gamma\theta}\cos\theta - e^{-2\gamma\theta}\cos 2\theta. \end{aligned}$$

ただし、$\cos\theta > 0 > \cos 2\theta$ となるθを考えた。これは $\mathcal{K}_1^{\mathrm{QM}}$ と第 1 項の符号が異なるだけであるから、$\theta = \pi/3$ と採れば

$$\mathcal{K}_1^{\mathrm{QM}} = z_1 + \frac{1}{2}z_1^2, \ z_1 \equiv e^{-\pi\gamma/3}$$

従って

$$\mathcal{K}_1^{\rm QM} > 1 \Leftrightarrow z_1 > \sqrt{3} - 1$$
$$\Leftrightarrow \gamma < 0.2978\cdots \Leftrightarrow \eta < 0.1896\cdots$$

これは$\mathcal{K}_2$の不等式を用いた場合に比べて因子２だけ緩やかな条件である。

$\mathcal{K}_3$に関しても同様の議論が出来る。４個の時点を等間隔に採り、以上と同じ記法を用いれば

$$\mathcal{K}_3^{\rm QM} = \frac{1}{2}\{3e^{-\gamma\theta}\cos\theta - e^{-3\gamma\theta}\cos 3\theta\}.$$

もし$\gamma = 0$なら

$$\mathcal{K}_3^{\rm QM} = -2(\cos\theta)^3 + 3\cos\theta,$$
$$(\mathcal{K}_3^{\rm QM})_{\rm max} = (\mathcal{K}_3^{\rm QM})_{\theta=\pi/4} = \sqrt{2}.$$

そこで$\gamma \neq 0$の場合にも$\theta = \pi/4$と採ってみれば

$$\mathcal{K}_3^{\rm QM} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3z_3 + z_3^3)\ ,\ z_3 \equiv e^{-\pi\gamma/4}.$$

従って

$$\mathcal{K}_3^{\rm QM} > 1 \Leftrightarrow z > 0.7828\cdots$$
$$\Leftrightarrow \gamma < 0.3116\cdots \Leftrightarrow \eta < 0.1984\cdots$$

つまり、ηに関する条件は、僅かではあるが、さらに緩やかとなる。（注: 上の計算においてC_{32}, C_{21}, $C_{43} > 0$, $C_{41} < 0$である。従って、第６不等式の代わりに第５不等式を用いても結果は同じである。なるべく大きなγまで許容するには、θはなるべく小さい方がよいから$\theta \simeq \pi/4$がoptimalである。）

より定量的な評価をするには、「LG不等式の破れの"判定余裕度"Y」という概念を導入するとよかろう。つまり、

$$\mathcal{K}^{\rm QM} = 1 + Y$$

と予言されるとき、破れが「余裕度Y」をもって判定可能、と呼ぶことにする。この等式を満たすηの値をη_Yとすれば、「Y以上の余裕度をもって破れが判定可能」となるための条件は

$$\mathcal{K}^{\rm QM} > 1 + Y\ ,\quad \text{or equivalently}\quad \eta < \eta_Y\ .$$

（ここで$\mathcal{K}$ vs ηのグラフがあるとよい。各ηについてoptimalなθを求め、$\mathcal{K}$をηで表す。）

既に述べたように、$\eta \sim 0.1$は技術的に達成可能のようである。とすれば、多分、最も好都合なのは$\mathcal{K}_1$であろう。採るべき時点が３個で済み、かつηに対する条件も比較的緩やかだからである。これに対し、$\mathcal{K}_3$の場合には、４個の時点が必要である。

10. Caldeira-Leggett スキーム

「実験結果がMQPを検出した（もしくはMQPの非存在を示した）」と結論し得るためには、QMに基づく理論との定量的比較が求めらるが、その際、理論の予言がAPF(adjustable-parameter-free)であることが望ましい。特にトンネル確率のように指数函数的にパラメータに依存する量を扱う際には、望ましいというよりは絶対的に必要と言うべきかもしれない。そのようなAPF予言は、微視的で少数自由度の系については可能としても、巨視系の場合には、パラメータの数が多過ぎて一見絶望的と思われる。

Caldeira-Leggett 理論の要点は、「ある緩やかな条件を満たす巨視系に関しては、（意外にも）APF予言が可能である」という主張にある。具体的には、トンネル率Γが

$$\Gamma = \Gamma(h, \eta)$$

の形に書かれるということである。ここにηは前述の「量子まさつの強度」であり、

$h \equiv$“当該の巨視的自由度に特有の作用量で無次元化したプランク定数”

である。上述の「多数のパラメータ」はすべてhとηの中にまとめて押し込まれている。

11. D（= Disconnectivity）

巨視的可峻別とは如何なる意味か？　二つの状態の「巨視的峻別可能性」の度合いの目安として提案されているのが、Dである。これは正準変換に関して不変でないが、その定義には、”民主的自由度”（粒子の入れ替えに関する対称性を尊重した自由度）を用いるのが妥当であろう。

紙数（というよりは力）が尽きたので、10及び11節に関する詳細は別の機会に論じたい。

12. 結

以上、長々とLeggett構想を筆者の理解する範囲で紹介し、若干の考察を述べた。その動機は、いわゆる戦後５０年という節目が筆者自身の人生とほぼ重なるこの機会に、自身のささやかな研究の位置付けを自分なりにまとめておきたかった、という私的な事項、及び、この構想は来世紀の物理を貫く重要な柱になるであろうと筆者には思われるということ、にある。（妄想：宇宙の問題から脳や心の問題まで、この構想と切り離して論ずることは不可能となるのではあるまいか、いや、むしろ、この構想が実現されて初めてそのような高邁な議論も現実的なものとなり得るのではなかろうか。「Felix Klein(1894-1925)が1872年にErlangen大學教授就任の際に提出した目録（Programm）は幾何学の綜合に画期的卓見を示

し、永く指導的役割を演じた」（岩波数学辞典増訂版、岩波書店 (1966)、p.80) とのことである。有名な Klein の Erlanger Programm(Erlangen Program)」である。Leggett Program はまだ緒についたばかりであるが、来世紀中葉になって振り返ってみれば、今世紀の数学における Klein Program に匹敵する役割を物理学において演じたと評価されるのではないか、と筆者は予想している。）このシンポジウムの直前、３月４日 22:15-23:00, NHK 第一で「戦後 50 年特集　人物往来　湯川秀樹」という、佐藤文隆・湯川スミ両氏の談話を交えた番組があった。「外国の真似は駄目、独創的に考えよ」という湯川さんの生の声が聞こえた。「外国」という言葉を「他の研究者」と置き換えれば普遍的に妥当な言葉であり、上記の筆者の話などは独創性のかけらもないと叱責される事必定である。しかし湯川さんも一方では「二十世紀に入ってから急速に進歩した学問 … の上げ潮の中で、自分の好きなことを自分の好きな流儀でやって来た … 明日進むべき道をさがし出すために、時々、昨日まで歩いてきたあとを、ふり返って見ることも必要なのである。」[Yukawa] とも仰有っている。潮の流れ自体を創り出すことは到底凡人のなし得るところではないが、この 15 年間のＭＱＰ研究の潮流を振り返ってみた、ということに何らかの意義があれば幸いである。

REFERENCES

Bell,J.S., Physics 1, 195(1964)

Clarke,J., A.N.Cleland, M.H.Devoret, D.Esteve and J.M.Martinis: Science 239, 992(1988)

Clauser,J.F., M.A.Horne, A.Shimony and R.A.Holt, Phys.Rev.Lett.23,880(1969)

Gell-Mann,M. and J.B.Hartle, in Complexity, Entropy and the Physics of Information, Proceedings of the 1988 Santa Fe Institute Workshop, Addison-Wesley(1990),p.425.

Grifiths,R.B., J.Stat.Phys. 36,219(1984)

Kobayashi,R., N.Hatano and M.Suzuki, 本研究会での発表。

Leggett,A.J., Les Houches Lectures in Chance and Matter, ed.J.Souletie et al, Elsevier Science Publishers(1987), p.395.

Leggett,A.J., Kagaku（岩波科学）54, No.11, 693; No.12, 761 (1984)

Leggett,A.J., ISQM 86: Proc.2nd Int. Symp.Q.M., ed. M.Namiki et al, Phys.Soc. Japan (1987), p.287

Leggett,A.J.,ISQM 92 :Proc.4th Int. Symp.Q.M., ed. M.Tsukada et al, JJAP Series 9(1993), p.10

Leggett,A.J. and A.Garg: Phys.Rev.Lett., 54,857(1985)

Omnes,R., Rev.Mod.Phys. 64,339(1992)

Pais,A., Rev.Mod.Phys.,51,863(1979), p.907

Shinomoto,S., 脳のデザイン　0-th edition (1995) (to be published);「無侵襲」なる言葉はこの本より借用。

Slichter,P., Principles of Magnetic Resonance, Harper(1963), Sec.5.7.
Takagi,S., Kagaku（岩波科学）8 (or 9) 月号 (1995), in press.
Yamada,N., PhD Thesis, Tohoku Univ. (1992) reprinted in Science Reports of the Tohoku University Ser8, 12, p.177-292; Prog.Theor.Phys. 85, 985(1991)
Yukawa,H., 旅人, 角川文庫 (1960), p.5-6.