物性研究　67－1（1996－10）

講義ノート

組みひもの理論と力学系

松岡 隆
鳴門教育大学 学校教育学部

（1996年7月17日受理）

1　はじめに

力学系においては、局所的な構造に比べ、大域的な構造を知ることは一般に難しい。力学系の構造の骨組みは不動点や周期軌道で形成されているので、これらに関する情報が得られれば系の大域的構造がある程度理解される。1次元写像に対しては不動点や周期軌道などに関する性質はある程度知られているが、それは写像が1次元であるという事情を有効に活用しているのであって、その方法をそのまま2次元以上の力学系に拡張するのは難しい。

本講義では、2次元力学系に対して、組みひもの理論をもちいて既知の不動点・周期軌道に関する情報から未知の不動点・周期軌道、さらに非周期軌道に関する大域的な情報を得るための方法を紹介する。

まず Section 2 で組みひもを定義し、2次元の円盤上の力学系の既知の周期軌道から組みひもを構成する方法を示す。

続いて Section 3 では組みひもを periodic なものと擬 Anosov 型 (pA) と呼ばれるものの2種類のタイプに分類する。力学系の周期軌道から構成された組みひもが pA であるということは、その力学系がカオス的な軌道を持つことを示唆している。

Section 3 の後半と Section 4 では組みひもが pA であるかどうかの判定条件について述べる。特に Section 4 では Burau 表現という組みひもの行列表現を導入し、代数的計算から新たな情報を得る方法を説明する。

Section 5 では組みひもに順序構造を導入する。

Section 6 ではアニュラス (円盤に穴が1つ開いたもの) 上の力学系に議論を限定する。アニュラスは穴を1本の組みひもに対応させれば円盤での議論の特殊な場合とみなせるが、穴のまわりの回転数という概念を導入すると、更に詳細な情報を得ることができる。

最後に Section 7 ではカオス的な軌道を持たない力学系について考察する。ある周期以下の周期点全体から構成された組みひもは有限グラフによって表現できる。これは力学系がある周期軌道を持ちうるかどうかの判定に役立つ。

2　不変集合の組みひも

この節では、まず組みひもを定義する。組みひもの集合には群構造が入り、組みひも群が定義できる。そののち、与えられた力学系からどのように組みひもを決定するかについて説明する。後の節では組みひも群の群構造を解析する事により、力学系の性質を調べる事になる。

2.1　組みひも、組みひも群、組みひも型

ここでは、組みひもに関する定義を述べ、その性質について説明する。

Definition 1 (組みひも)

2 次元 disk D 上にいくつか点をとる（図 2.1)。2 次元 disk Dとそのコピーを離しておき、片方の disk 上の点たちを始点とし、もう片方の disk 上の点たちを終点とするような点と点のつなぎを考え（図 2.2)、これを組みひも（braid）という。ひもが n 本ある時は、n 次の組みひも（n-braid）という。ただし、ひもは単調に変化しなければならない。例えば、図 2.3 のように上に巻き上がるようなひもがある場合は組みひもとは呼ばない。また、連続変形で移り合えるものは同じとみなす（図 2.4、図 2.5)。始点と終点を合わせて基点という。

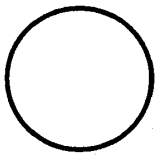


図 2.1: 2 次元 disk D（中身は詰まっている）

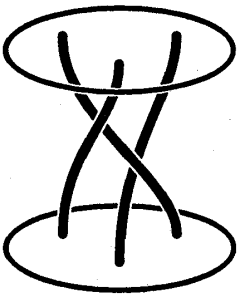


図 2.2: 組みひもの定義（例：三つ編みの組みひも）

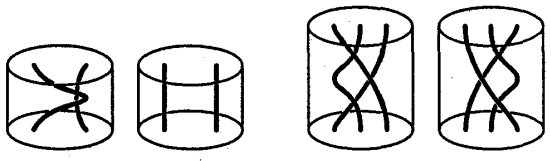
図 2.3: 組みひもにならないひもの例。ひもは単調に変化しなくてはならない。

Definition 2 (組みひも群)

組みひもの集合は群をなす。その群を

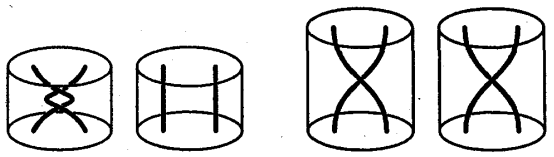
$$\mathrm{B}_n = \{n - \mathrm{braid}\}$$

とかく。B_nの単位元 e、積 bb'、逆元 b^{-1}はそれぞれ図 2.6のように定められる。



(a) (b)

図 2.4: ひもの連続変形で移り合える 2 つの例

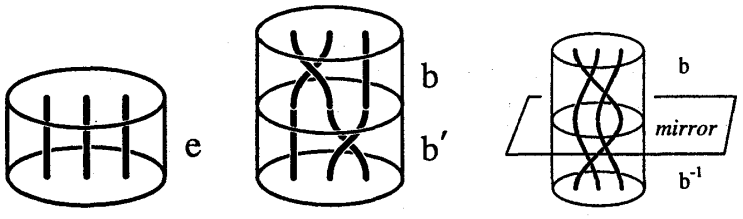


(a) (b)

図 2.5: ひもの連続変形で移り合えない 2 つの例

積 bb'に関しては、順番に注意しなければならない。bb'と書いた時には、b をまずおこない、その後に b'をおこなうことを意味すると約束する。

組みひも群 B_nは、$n-1$ 個の生成元 σ_i から生成される。つまり、任意の B_nの元はσ_iとその逆元の積によって表わされる。生成元 σ_i とその逆元は図 2.7のように表わされる。



(a) 単位元 e (b) 積 bb' (c) 逆元 b^{-1}

図 2.6: 組みひも群の単位元、積、逆元

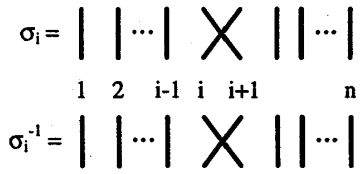


図 2.7: 組みひも群の生成元 σ_iとその逆元σ_i^{-1}

Lemma 1

生成元 σ_i の間で、次のような基本関係式が成り立つ。

(1) $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \qquad |i-j| > 1$

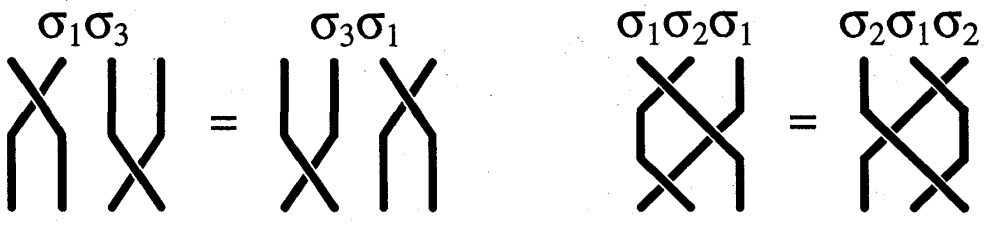
(2) $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$

証明：図 2.8から明らか。

Definition 3 (B_nの中心)

次で定義される集合を B_nの中心といい、Z_n とかく。

$$\mathrm{Z}_n = \{b \in \mathrm{B}_n \,|^{\forall} b' \in \mathrm{B}_n, bb' = b'b\}$$



(a) 基本関係式 (1) の説明図　　(b) 基本関係式 (2) の説明図

図 2.8: 基本関係式の説明図

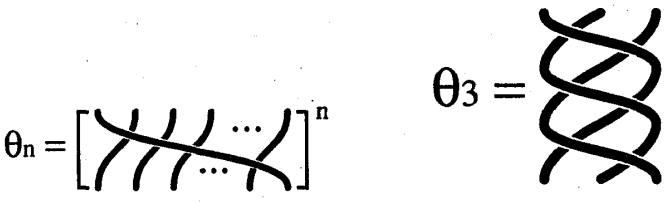
特に、$n = 2$ のときには Z_2は B_2と一致する。中心 Z_nは可換群であり、群として $\mathbf{Z}$ と同型であることが分かっている。

Z_nの生成元θ_nは $n \geq 3$、$n = 2$ のときそれぞれ次のようになる。

$(n \geq 3)$:　$\theta_n = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n$
(full-twist braid)

$(n = 2)$:　$\theta_2 = \sigma_1$ (half-twist braid)

Full-twist braid の例は、図 2.9を参照。図 2.9(b) は、$n = 3$ の時の例である。



(a) Full-twist braid　　(b) $n = 3$ のときの Full-twist braid

図 2.9: Full twist braid の絵

今までは、組みひもの基点を固定して考えていた。しかし、力学系に応用するために、もう少し条件をゆるめて基点は連続変形の間に動く事ができるものとする。ただし、組みひもの始点と終点は**同時に**連続移動させなければならず、また移動させた結果は、元の組みひもと同じタイプとみなす。

Definition 4 (組みひものタイプ)

b と b' のタイプが等しい $(b \sim b')$
$\Longleftrightarrow$ b と b' が始点と終点を同時に動かす連続変形で移りあう。

図 2.10にはタイプが等しい組みひもの例を示し、図 2.11にはタイプが異なる組みひもの例を示す。

註：$b \sim b^{-1}$ か $b \not\sim b^{-1}$ かは場合による。

$b \sim b^{-1}$ である例：$\sigma_1\sigma_2^{-1} \sim \sigma_2\sigma_1^{-1} = (\sigma_1\sigma_2^{-1})^{-1}$

$b \sim b^{-1}$ でない例：$\sigma_1 \not\sim \sigma_1^{-1}$

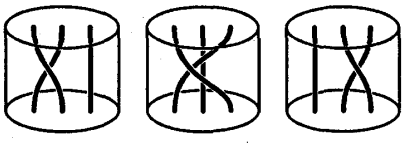


図 2.10: タイプが等しい組みひもたち

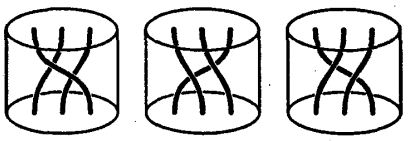


図 2.11: タイプが等しい組みひもと異なる組みひも。左と中央の組みひもはタイプが等しい（3 つの基点の組を中心の回りで 180 度回転させる）。その 2 つと右の組みひもはタイプが異なる。

Definition 5 (組みひも型（braid type）)

タイプが等しい組みひもたちの集合を組みひも型という。組みひも b とタイプが等しいものの組みひも型を $[b]$ と書く。n 本のひもからなる組みひも型を n-braid type といい、その集合を

$$\mathrm{BT}_n = \{n - \text{braid type}\}$$

と書く。

次に、BT_n が B_n を共役で割ったものと同一視できることを示そう。まず、共役を定義する。

Definition 6 (共役)

ある群 G があり、$g, g' \in$G のとき、
gと g'が共役である（$g \sim g'$）$\Longleftrightarrow {}^{\exists}h \in G, g' = hgh^{-1}$

Lemma 2

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BT}_n & = & \{n - \text{braid type}\} \\ \Updownarrow & & \text{同一視できる} \\ \mathrm{B}_n/\text{共役} & = & \{\mathrm{B}_n \text{の共役類}\} \end{array}$$

証明：次のことを示せばよい。
$b, b' \in \mathrm{B}_n, {}^{\exists}c \in \mathrm{B}_n, b' = cbc^{-1} \Longleftrightarrow [b] = [b']$
($\Rightarrow$) c は生成元から作られている。よって例えば $c = \sigma_1\sigma_2$のときは、

$$cbc^{-1} = \sigma_1(\sigma_2 b \sigma_2^{-1})\sigma_1^{-1}.$$

( ) の中身は b に対してσ_2によって共役になっており、全体としてはさらにσ_1によって共役になっている。つま

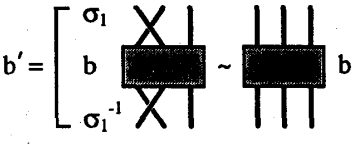


図 2.12: 共役な組みひもは、互いに連続変形で移りあえること。

り、cが生成元のときのみ考えれば良い。そしてこの時、図2.12から明らかなようにb'はbへと連続変形できる（左から1、2番目の始点と終点の順番を同時に入れ換える）。

($\Leftarrow$) 例えば図2.13のように、bとb'が連続変形できれば、b'はbをある元$c \in \mathrm{B}_n$とその逆元c^{-1}で挟んだ形になっている。つまり、$b' = cbc^{-1}$。

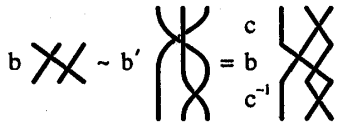


図 2.13: 連続変形可能であれば、共役であること。左の組みひもは連続変形で右の組みひもになる。また、bとb'が連続変形で移りあえれば共役の関係になっている事がわかる。

ここで、組みひもたちの間の関係についてもう一度確認をしておこう。2つの組みひもb、b'に対して、次の2つの関係が考えられる。(1) $b = b'$。(2) $b \sim b'$。前者は、「bとb'は、ひもの連続変形によって移りあえる」ことを意味する（図2.4参照）。一方後者は、「bとb'は、ひもの連続変形と、始点と終点を同時に動かす連続変形によって移りあえる」ことを意味している（図2.10）。2つの関係は違うものであるから、当然$b \neq b'$であるが、$b \sim b'$であるような場合が起こりえる（ただし逆はありえない）。図2.13がその例である。b'の右から1、2番目の基点の場所を入れ換えれば、ひもの連続変形でbと一致する。ただし、始点と終点は同時に入れ換えなければならない。

2.2　組みひもと力学系

ここまでは組みひも群に関する事柄のみであったが、ここからは力学系への組みひも群の応用を見ていく。具体的には、力学系とその不変集合から組みひも型を定め、定められた組みひも型を解析することにより力学系の性質を調べる、ということをおこなう。この節では、力学系から組みひも型を決める方法について説明をする。まず考える対象について述べる。

D : 2次元 disk、$f : D \to D$:連続かつ1 : 1、S : 有限不変集合 i.e. $f(S) = S$　（力学系のことばでいえば、fの有限個の周期軌道の和集合）とする。

つまり、これからは時間が離散な力学系を考え、写像fとその周期軌道の集合Sを考察の対象とする。時間が連続な力学系に対しては、ポアンカレ写像を考えることにより、自然に離散力学系とすることができる（図2.14）。

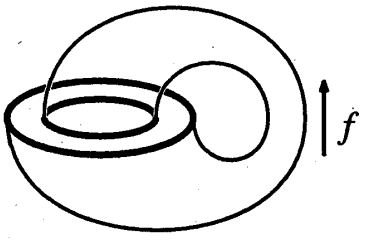


図 2.14: ポアンカレ写像

さて、離散力学系の周期軌道を考えるのであるが、それだけではSと$f(S)$は“分離した”2つの集合である。組みひもを力学系に応用するためには、Sと$f(S)$を“ひも”で結ぶ必要がある。そこで、fと恒等写像（id）との間のイソトピー（isotopy）を考えて、それを“ひも”にする。まずイソトピーを定義した後に、任意の写像に対して恒等写像との間のイソトピーが構成できる事を示そう。この

ことは任意の2次元離散力学系に対して、組みひもの理論が適用できる事を保証している。次に、イソトピーによって任意の写像とその周期軌道の集合に対する組みひも型が決定される事を見る。最後に、連続力学系はポアンカレ写像に対して、離散力学系はそれ自体に対して恒等写像との間のイソトピーを構成する事により、任意の力学系から組みひも型が決定されることを示す。

Definition 7 (イソトピー)

X, Y を位相空間、$F(X,Y) = \{X$からYへの$1:1$、連続な写像$\}$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} & F(X,Y) \ni f, g \text{ がイソトープ} \\ \Longleftrightarrow\ & {}^{\exists}H : X \times [0,1] \to Y : \text{連続、} \\ & \quad \text{s.t. } H(x,0) = g(x), H(x,1) = f(x) (x \in \mathrm{X}). \end{aligned}$$

ただし、$H(x,t) = h_t(x)$ $(t \in [0,1])$ とおくとき、各 t に対して $h_t(x)$ は $1:1$ 写像であるとする。h_tを gと fの間のイソトピーという。

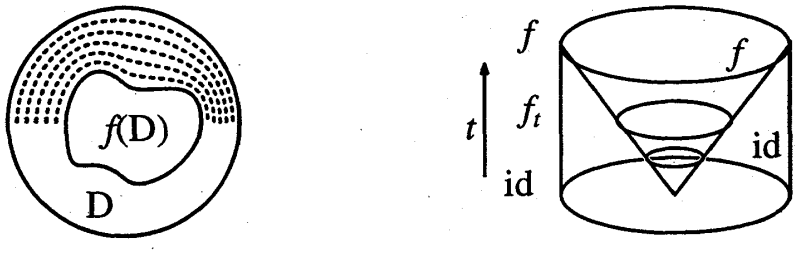
つまり、gから fへの連続変形の過程をイソトピーという。今の場合は、X、Yとして disk Dを、gとして id をとれば良い。次に、Alexander のトリックを使って、任意の写像 fは恒等写像 id とイソトープである事を示す。

Lemma 3 (Alexander のトリック)

任意の写像 fに対して、まず Dの境界∂D で恒等写像となるように変形する（図 2.15(a)）。そして、次の写像 f_tを考える（これを Alexander のトリックという）。

$$f_t(x) = \begin{cases} tf(x/t) & |x| < t \\ x & |x| \geq t \end{cases} \tag{1}$$

ここで作られた f_tは恒等写像と fの間のイソトピーである（図 2.15(b) 参照）。



(a) fの変形　　(b) f_tの作り方

図 2.15: Alexander のトリックの説明図

このように構成されたイソトピー f_tを用いて写像 fと fの周期軌道の集合 Sとに対する組みひも型を、次のように定義する。ここに、周期 n の軌道（または n 周期軌道）とは、最小周期が n である周期軌道のことである。

Definition 8 (Sの組みひも型)

写像 fを考える。

$f : D \to D$: 連続かつ 1 : 1

$S \subset D$: 有限不変集合（Sの要素は fの周期軌道たち。ただし、全ての周期軌道をふくんでなくてもよい）

とする。この時、写像 fとその周期軌道たちの集合 Sから、次のように組みひも型を定義する。

$$\mathrm{bt}(S; f) = \bigcup_{0 \le t \le 1} (f_t(S) \times \{t\})$$

$\mathrm{bt}(S; f)$ はイソトピーの取り方も込めて $\mathrm{bt}(S; f; \{f_t\})$ と書くこともある。

この定義によって、写像 fと fの周期点の集合 Sから定まる組みひも型の例は図 2.16を参照。

ところで、上で定義した組みひも型はイソトピーの取り方によらないだろうか? 実は、ある fに対して、fと恒等写像との間のイソトピーとして f_t、f'_tの 2 つを考えたとすると、それによる組みひも型の違いは、full-twist の分だけしかない。すなわち、

$$\mathrm{bt}(S; f; \{f'_t\}) = \theta_n^i \, \mathrm{bt}(S; f; \{f_t\}) \quad {}^{\exists} i \in \mathbf{Z}.$$

よって、full-twist の違いを無視するならば、写像 fに対する組みひも型はイソトピーの取り方によらない。

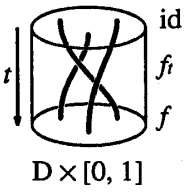


図 2.16: イソトピー f_tと fの周期軌道の集合 Sが定める組みひも型。Sの要素は基点の 3 点であって、これらは fの 3 周期軌道。

ここまで、写像 fに対して恒等写像 id との間のイソトピー f_tを取れば写像 fと fの周期軌道の集合 Sが組みひも型を決定することを見てきた。ここからは、力学系におけるイソトピーの構成法を例によって示す。これによって、力学系から組みひも型が決定できる。例は 2 つの場合に別れており、一方は連続力学系の場合、もう一方は離散力学系の場合である。連続力学系の場合は、ポアンカレ写像と恒等写像との間のイソトピーが自然に構成されることを示す。離散力学系の場合には、連続力学系のように自然にはイソトピーが構成できないが、既に述べたように Alexander のトリックによってイソトピーが構成できる。最後に、連続力学系に対する具体的な組みひも型の例をいくつか示す。

力学系からのイソトピーの構成法

(1) （元の力学系から自然にイソトピーを構成できる場合〜周期的な外力を持つ場合）
このときは、Alexander のトリックを用いなくとも、自然にイソトピーが定義できる。

$x \in \mathbf{R}^2$ とし、連続時間力学系

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t)$$

を考える。ただし、$F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ は C^1 級で、周期 1 の周期的外力が働く、すなわち

$$F(x, t+1) = F(x,t)$$

とする。

よって、この力学系を離散時間にするためには、次のポアンカレ写像を考えれば良い（図 2.17参照）。

$$f(x_0) = x(1; (0, x_0))$$

ただし、上の力学系の、時刻 t_0 で x_0 を通るような解軌道を

$$x(t; (t_0, x_0))$$

と書いた。するとイソトピーとして、

$$f_t(x_0) = x(t; (0, x_0)) \quad (0 \le t \le 1)$$

が取れる。なぜなら、解の一意性より、

$$f_t : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \quad (0 \le t \le 1)$$

は 1 : 1 であり明らかに連続、かつ

$$f_0 = \mathrm{id}, f_1 = f$$

となるからである。

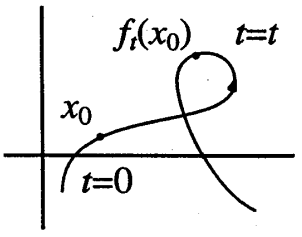


図 2.17: 周期的な外力を受けている Flow が定めるイソトピー。

(2) （元の力学系から自然にイソトピーを構成できない場合）
凸テーブル内の玉突き問題を考える。この力学系は $AOB = S^1 \times [0, \pi] \ni (x, \theta)$,

$$f : A \to A : \text{保測}$$

というような写像に従っている（Example 19 参照）。ただし、x はテーブルの壁の位置を、θは玉の反射角をそれぞれ表わす変数である。このような離散力学系に対しては、上の (1) のようには自然にイソトピーを構成できない。しかし、Alexander のトリックを使えば、必ず恒等写像と f との間のイソトピー f_t が構成できる。

以下では、外力が加わる連続力学系のポアンカレ写像を考え、ポアンカレ写像の周期軌道から自然に作られる組みひも型の例を図 2.18から図 2.22 までで見てみよう。図 2.18から

図 2.22までは、次のような約束で描いてある。図は左と右の 2 つの図からなり、左の図は相空間の様子を、右の図はポアンカレ写像とその周期軌道から自然に作られる組みひも型を示している。左の図において、実線は元の連続力学系の周期軌道を表わし、点はポアンカレ写像の周期軌道を表わす。

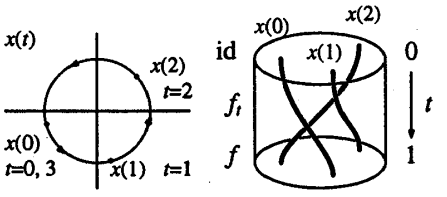


図 2.18: ポアンカレ写像とその周期 3 の周期軌道（3 点）から自然に定まる組みひも型 $\sigma_2\sigma_1$。

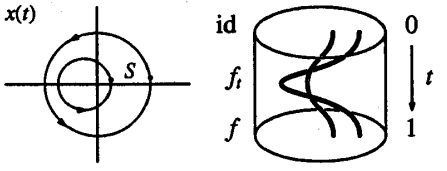


図 2.19: ポアンカレ写像とその周期 1 の周期軌道（2 点）から自然に定まる組みひも型 σ_1^2。元の連続力学系の周期軌道を 2 つ取った。

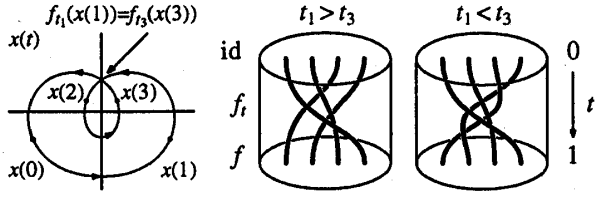


図 2.20: ポアンカレ写像とその周期 4 の周期軌道（4 点）から自然に定まる組みひも型。軌道が交わる点 $f_{t_1}(x(1)) = f_{t_3}(x(3))$ において、$t_1 > t_3$か $t_1 < t_3$かで組みひも型は変わる。

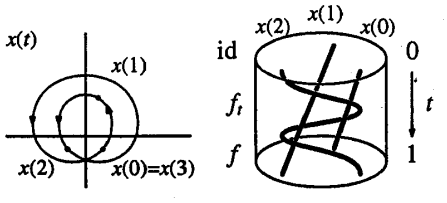


図 2.21: ポアンカレ写像とその周期 3 の周期軌道（3 点）から自然に定まる組みひも型 $\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2$。

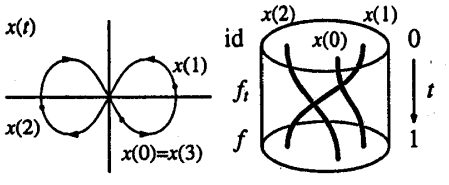
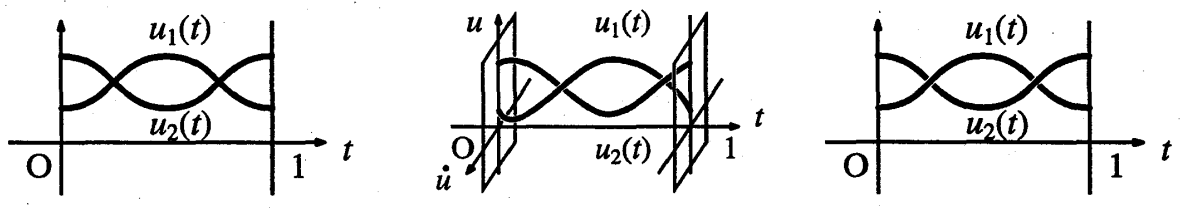


図 2.22: ポアンカレ写像とその周期 3 の周期軌道（3 点）から自然に定まる組みひも型 $\sigma_2\sigma_1^{-1}$。

この節の最後に、2 階の微分方程式によって運動が定まる系では、周期解 $u(t)$ の時間変化を描けばすぐに組みひも型がわかることを示そう（図 2.23）。まず、n 本の周期軌道の時間変化を考える（図 2.23(a) では $n = 2$）。(u) 空間で考えていた軌道の時間変化を、$(u, \dot{u})$

空間に拡張する（図 2.23(b)）。すると、そこから自然に組みひも型が定まる（図 2.23(c)）。図 2.23(b) では $(u, \dot{u})$ 空間にまで拡張したが実は図 2.23(a) からだけでも組みひも型はわかる。つまり、周期軌道がお互いに交差する時、下から交差する方を組みひもとしては上に置くというルールを使えば良いのである。



(a) 2 本の解軌道 u_1, u_2の時間変化

(b) $(u, \dot{u})$ 空間での 2 本の解軌道 u_1, u_2の時間変化

(c) (b) から作られる組みひも型

図 2.23: 2 階の微分方程式によって運動が定まる系では、周期解 $u(t)$ の時間変化を描けばすぐに組みひも型がわかる。

3　組みひも型 (braid type) の既約分解

組みひも型[1]の分解を定義した上で、Thurston の定理を紹介する。Thurston の定理は Li-Yorke の定理の２次元版にあたる。Li-Yorke の定理と Thurston の定理を並べてみると、自然数の素因数分解と組みひも型の既約分解とが対応していることが分かる。既約な組みひも型は、周期的なものと擬アノソフ型とに分類されるが、Thurston の定理ではとくに後者が重要な役割を担う。さらに、組みひも型が擬アノソフ型か否かを判定する定理をいくつか述べる。

２次元力学系と組みひも型にまつわる概念および定理は、１次元力学系の周期点に関する理論に対応するいくつかの類似性をもっている。１次元力学系と２次元力学系とを対比するときに参照できるよう、１次元力学系の復習を Appendix としてつけておく。

まず組みひも型の分解を３つの例で示す。その後、組みひも型が分解可能（可約）であることの定義を述べる。

Example 1

３つの異なるタイプの組みひも型を分解してみる（図 3.1 参照)。組みひもを２つに分解する手順は次のように行なう。まず、いくつかの組みひもをまとめてチューブでくるむ。ただし、どのチューブ中にも同数のひもが存在し、またチューブを細く縮めて組みひもとみなしたものは巡回的[2]であることを満たさねばならぬ。このとき、チューブを縮めて組みひもとし、チューブの外にある組みひもとあわせて分解の一方の組みひもがとれる。また、チューブを縮めずに巡回的な順に従って縦につなぎ合わせてつくられるチューブの中の組みひもが、分解したもう一方の組みひもである。ただし、どのチューブからつなぎはじめてもよい（タイプは同じになる)。

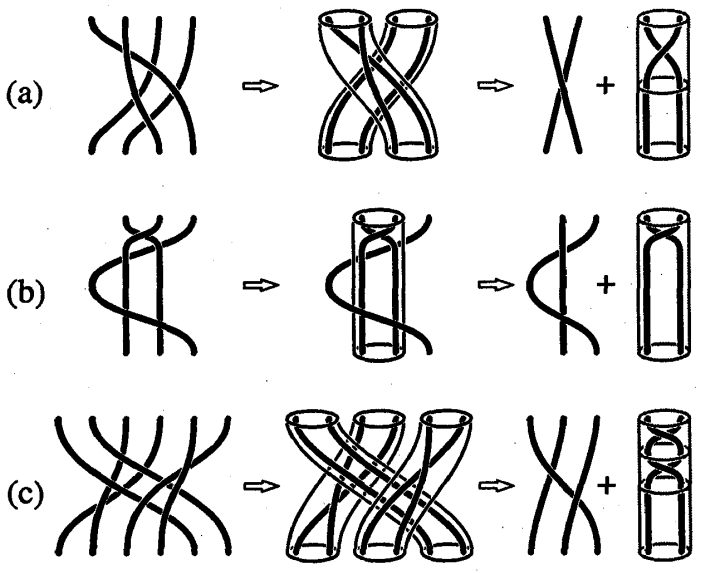


図 3.1: 組みひもの分解 (a) ひもが２本づつ入ったチューブ２本　(b) ひもが２本入ったチューブ１本とその周りをめぐる１本のひも　(c) ひもが２本づつ入ったチューブ３本

[1]以下、組みひも型 (braid type) のことを単に組みひも (braid) といってしまうこともある。

[2]上 disk の基点からひもをたどり、下 disk の基点に到達したら、上 disk の対応する基点に移動してひもをたどっていくとき、すべての組みひもをたどることができれば、その組みひもは巡回的 (cyclic) という。

(a) 図 3.1(a) の組みひもは、左側 2 本のひもと右側 2 本のひもと別々にチューブをかぶせることができる。これら 2 本のチューブを細く縮めていくと、組みひも σ_1 になる。また、2 本のチューブを縮めずに縦につなげる（中身のひもも各々つなげる）と、チューブの中身は組みひも σ_1^{-1} である。

(b) 図 3.1(b) の組みひもは、左側 2 本にチューブをかぶせてやると 1 本のチューブとそのまわりを 1 周する 1 本のひもとに分けられる。チューブを細くしていくと、組みひも σ_1^2 になる。チューブの中身は σ_1^{-1}.

(c) 図 3.1(c) の組みひもは、左・中・右の各々 2 本ずつにチューブをかぶせる。チューブを縮めると組みひも $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ に、3 つのチューブを縮めずに縦につなげると組みひも σ_1^2 になる。ただし、3 つのチューブをどのような順番につなげても組みひも型は同じであることに注意。

さて、組みひも型が分解可能であることを次のように定義する。

Definition 9 (組みひも型の分解)

組みひも型 β が分解できる $\Longleftrightarrow$ $\beta = [\beta_1, \gamma] \cup \beta_2$ とかける
ただし、組みひも型 β_1 は cyclic, すなわち、ひもの上下の基点が巡回置換で結ばれている[3]；組みひも型 γ は 2 本以上のひもからなる；組みひも型 β_1 は 2 本以上のひもからなるか、または組みひも型 β_1, β_2 はともに 1 本以上のひもからなる。

$\beta = [\beta_1, \gamma] \cup \beta_2$ となるとき、組みひも型 β は組みひも型 γ と $[\beta_1, \gamma]$ を β_1 に取り換えてできる組みひも型 $\beta_1 \cup \beta_2$ とに分解されるという[4]。分解不可能である組みひも型を既約であるという。定義中の和集合をとる記号 $\cup$ は、β_1 を表わすチューブに触れないように β_2 をつけ加えたものを表わす（以降も同様の記法を使う）。

2 つの組みひも型 β_1, γ から生成される組みひも型 $[\beta_1, \gamma]$ の定義を、例で説明する。$[\beta_1, \gamma]$ の左側の項 β_1 は組みひもをまとめて中に収容しているチューブの組みひもをあらわし、右側の項 γ はそのチューブの中に入っている組みひもをあらわす。

Example 2

2 つの組みひも型 β_1, γ をおのおの

$$\beta_1 = [\sigma_1] \in \mathrm{BT}_2, \quad \gamma = [\sigma_2\sigma_1] \in \mathrm{BT}_3$$

とする（図 3.2 参照）。組みひも型 β_1 を構成している 2 本のひもを太らせてチューブ状にする。組みひも型 γ の方は適当なところでひもを 2 つの部分に切り分ける。これらの切り分けたひもをおのおのチューブに通せば、組みひも型 $[\beta_1, \gamma]$ が生成される。

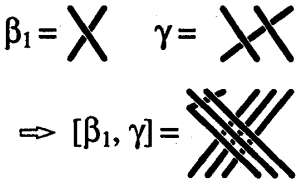


図 3.2: 組みひも型 $[\beta_1, \gamma]$ の構成

[3]上下の基点をつなげて結び目にしたとき、1 本のひもになる。
[4]分解の仕方はひととおりでないこともあるが、最終的に既約分解された組みひも型の組は一意的である。

Example 3

もう一度さきほどの分解できる組みひも型の3つの例に戻って見る。

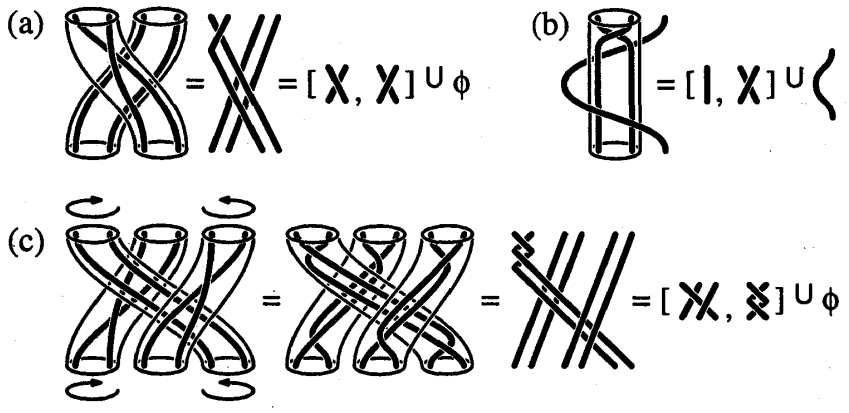


図 3.3: 組みひもの分解 (a) σ_1^{-1} と σ_1 に分解 (b) σ_1^{-1} と 2 本のひもに分解 (c) 2 本のひもをねじったものと三つ編みに分解

(a) 組みひも型 図 3.3(a) は、$\beta_1 = \sigma_1 \in \mathrm{BT}_2$, $\gamma = \sigma_1^{-1} \in \mathrm{BT}_2$, $\beta_2 = \emptyset$ とおくと、$[\beta_1, \gamma] \cup \beta_2$ とかけるので分解可能であり（ $\beta_2 = \emptyset$ であるが$\beta_1 \notin \mathrm{BT}_1$ ）、組みひも型 $[\sigma_1^{-1}]$ と $[\sigma_1]$ とに分解される。

(b) 組みひも型 図 3.3(b) は、$\beta_1 = 1 \in \mathrm{BT}_1$, $\gamma = \sigma_1^{-1} \in \mathrm{BT}_2$, $\beta_2 = 1 \in \mathrm{BT}_1$ とおくと、$[\beta_1, \gamma] \cup \beta_2$ とかけるので分解可能であり（ $\beta_1 \in \mathrm{BT}_1$ であるが$\beta_2 \neq \emptyset$ ）、組みひも型 $[\sigma_1^{-1}]$ と $[\sigma_1^2]$ とに分解される。

(c) 組みひも型 図 3.3(c) は、まず両端 2 本のひもの基点を各々回転させる。すると中のひもがからんでいるようなチューブを 1 本にできる。$\beta_1 = \sigma_1\sigma_2^{-1} \in \mathrm{BT}_3$, $\gamma = \sigma_1^2 \in \mathrm{BT}_2$, $\beta_2 = \emptyset$ とおくと、$[\beta_1, \gamma] \cup \beta_2$ とかけるので分解可能であり、組みひも型 $[\sigma_1^2]$ と $[\sigma_1\sigma_2^{-1}]$ とに分解される。

既約な組みひも型の分類を考える。

Definition 10 (周期的な組みひも型)

組みひも型 β が周期的 (periodic) $\Longleftrightarrow$ 組みひも型 β は次の組みひも型のいずれかのタイプである：

$$\beta = \begin{cases} \left[(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1})^k\right] \in \mathrm{BT}_m, \\ \left[(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m\sigma_1)^k\right] \in \mathrm{BT}_{m+1}. \end{cases}$$

ただし、m は自然数、k は整数。前者の組みひも型は m 本のひもを k/m 回転ねじったもの[5]。後者の組みひも型は 1 本のひもを軸として、そのまわりで m 本のひもを k/m 回転ねじったもの。各々 図 3.4 を参照。

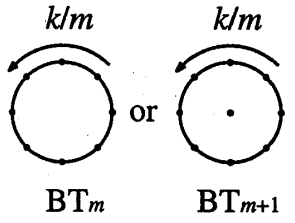


図 3.4: 周期的な組みひも型

[5] m と k とが互いに素のとき、この組みひも型は cyclic.

Example 4

$m=3$ のとき、 Definition10 により生成される組みひも型の例を挙げておく。図3.5 の左側は3個の基点を 0/3 回転（つまり回転しない）、1/3 回転、 2/3 回転して生成される3次の組みひもである。右側は1本のひもを軸とし、そのまわりで3個の基点を各々回転した4次の組みひも。1/3, 2/3 回転で生成されるもの $(k=1,2)$ はいずれも既約な組みひも型になっている。一方 0/3 回転でつくられる組みひも $(k=0)$ は明らかに分解できる組みひもである。

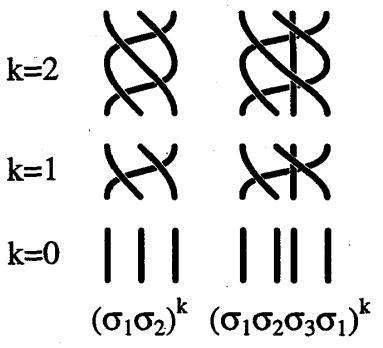


図 3.5: 周期的な組みひも $(m=3)$

Remark 1

次が成り立つ。

周期的 (periodic) な組みひも型 β が既約 $\Longleftrightarrow$ m と k とは互いに素

Example 5

Remark1 に関する例。 $m=3$ のときは上の Example4 の組みひものうち 1/3 回転、2/3 回転したものが既約になっていることは上で述べたとおり。 $m=6$ で $k=2$ の 6 次組みひも型、すなわち 6 本のひもを 2/6 回転（ $=1/3$ 回転）して生成される組みひも型を考えてみる。 m と k とはもちろん互いに素でなく 2 を因数としてもつので、可約のはずである。実際 図3.6 で示したように、ひもをひとつおきに 3 本とってチューブ（図中の点線）で包むことができるので、分解可能である。

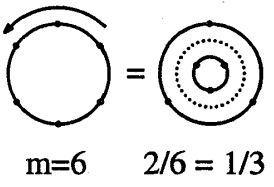


図 3.6: 可約な周期的組みひも

Definition 11 (擬アノソフ型の組みひも型)

組みひも型 β が擬アノソフ型 (pseudo-Anosov)
$\Longleftrightarrow$ 組みひも型 β は既約だが、周期的 (periodic) でない。

以降、擬アノソフ型を pA と略して書くこともある。

以上の定義より、組みひも型の既約成分は周期的 (periodic) なものと擬アノソフ型 (pA) との二種類の成分に分類できる。次に述べる Thurston の定理に関して 1 次元写像系の場合との対応を考えると、既約な組みひも型のうち周期的なものは一次元系の偶素数 2 に、擬アノソフ型は一次元系の奇素数 $3,5,7,\ldots$ にあたることがわかってくる。

Theorem 1 (Thurston)

1：1 連続写像 f の不変集合 S で、組みひも型 $\mathrm{bt}(S,f)$ が擬アノソフ型 (pA) 成分を含むものが存在$\Longrightarrow h(f)>0$ かつ $\#\{$ 周期点 $\}=\infty$.

ここで $h(f)$ は f に対するトポロジカルエントロピーで、次のように定義する。

Definition 12 (連続写像に対するトポロジカルエントロピー)

連続写像 $f:X\to X$（X: コンパクト距離空間）に対するトポロジカルエントロピーとは、

$$h(f)=\log\left(\lim_{\epsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\max_{E}\sqrt[n]{\#E}\right).$$

ただし、$E(\subset X)$ は次の条件をみたす点の集合：正の数 ϵ と互いに異なる任意の $x,y\in E$ に対し、$d(f^i(x),f^i(y))>\epsilon$ となるような有限整数値 $i(0\le i\le n)$ が存在する。つまり E に含まれる相異なる 2 点は、f による有限回（n 回まで）の写像で距離 ϵ より離れてしまうようになっている。

Example 6

(1) 三つ編みの組みひも型 $[\sigma_1\sigma_2^{-1}]\in \mathrm{BT}_3$ は擬アノソフ型 (pA) である。よってこのような組みひも型が存在するような写像 f に対して $h(f)>0$ である。

(2) 2.2 の 1 階常微分方程式 $\dot{x}=F(x,t)$ の例。8 の字型の周期軌道（図 3.7(a)）は三つ編みの組みひも型で表わされる（図 2.22）ので、トポロジカルエントロピーは $h(f)>0$ である。

(3) 桃をたて割りしたような周期軌道（図 3.7(b)）は組みひも型 $[\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2]$ で表わされる（図 2.21）。これは擬アノソフ型。よってこのような軌道が存在する系ではトポロジカルエントロピーは正値をとる。

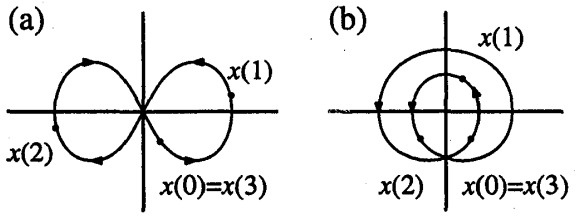


図 3.7: 擬アノソフ型の周期軌道　(a) 8 の字型 (b) 桃のたて割り

Thurston の定理（Theorem1）は「擬アノソフ型を含むような不変集合 S が見つかれば、トポロジカルエントロピー $h(f)$ は正で、無限個の周期点が存在する」ことを主張している。この定理は、区間 I に関する 1 次元力学系 $f:\mathrm{I}\to\mathrm{I}$（ただし f は連続写像）に対する定理（Theorem20）を 2 次元系に拡張したものとしてとらえられる。1 次元系の定理において「f は 2 のべきでない周期の周期点を持つ」は「f は奇素数を因数にもつ自然数を周期とする周期点を持つ」と言い直すことができる。Thurston の定理との対応は「奇素数因数 $\Longleftrightarrow$ 擬アノソフ型 (pA) 成分」という読み替えをつかえばよい。

Remark 2

特に写像 f が $C^{1+\epsilon}$ 級のときには次の定理が成立する：

$$h(f) > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{bt}(\gamma) \supset \mathrm{pA} \text{ なる周期軌道 } \gamma \text{ が存在する}$$

証明には Katok の定理を用いる。証明は「 $h(f) > 0 \Longrightarrow$ horse-shoe の存在 $\Longrightarrow$ horse-shoe には pA 型成分をもつ周期軌道が無限個埋まっている」という手順で進める。

Thurston の定理によれば「系が chaotic になる構造をもつことを示すためには、組みひも型を既約分解してその中に擬アノソフ成分を見つければよい」ということになる。そこで、まず組みひも型を分解するのであるが、これは一般に困難な作業である。実際に分解していく手順の一例を示そう。

Example 7

一見分解ができそうにないような組みひも型 $[\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3]$ は実は可約である。分解の手順を示す（ひもの変形方法の別の例を 図 3.8 に示す）：

$$\begin{aligned}
\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 &= 11123 && \text{簡単のため以下この表記を使う}\\
&\sim 11231 && (\leftarrow \sigma^{-1}(\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3)\sigma^1 \text{ との共役性})\\
&= 11213 && (\leftarrow \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \text{ 基本関係式その 1})\\
&= 12123 && (\leftarrow \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \text{ 基本関係式その 2})\\
&\sim 12312 && \text{以下同様に共役関係と基本関係式を使う}\\
&= 12132
\end{aligned}$$

ここまで同値関係を使って変形してくれば、この組みひも型は分解可能であることがわかり、 $\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 = [\sigma_1, \sigma_1]$ となる。すなわち 2 つの同じタイプの組みひも型 σ_1 に分解される。

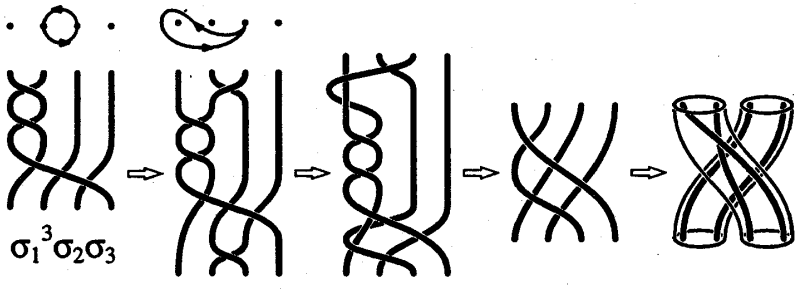


図 3.8: 一見分解不可能にみえる組みひもの分解

組みひも型が同じかどうかを判定するアルゴリズムとして Garside のものがある。これはたいへんしちめんどくさいやりかたをしている。

組みひも型を既約分解することができたとして、つぎはそれが擬アノソフ型かどうか判定しなくてはならない。現在のところ $\mathrm{bt}(S) \supset \mathrm{pA}$ を判定するアルゴリズムが 3 種類知ら

れている（Franks and Misiurewicz (1993), Bestvina and Handel (1995), Benardete *et al.* (1995)）。これらのアルゴリズムを使えば完全な解をもとめることができるが、実際に実行すると計算量が膨大で、ほとんど役に立たたない（笑）。そこで、次にいくつか紹介するような定理に頼ることになる。

Theorem 2 (Boyland 1984 [6])

n を素数、n 次組みひも型 β は巡回的で、その指数和 $\mathrm{e}(\beta)$ は $(n-1)$ の倍数でない
$\Longrightarrow$ 組みひも型 β は擬アノソフ型 (pA)

組みひも型に対する指数和は次のように定義する：

Definition 13 (指数和)

組みひも型$\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots \sigma_{i_r}^{\epsilon_r}$ の指数和 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{e}(\beta) = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_r$

指数和は組みひもをつくるに要する生成元の（符号付き）個数を表わす。

Example 8

組みひも型$\beta = [\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_3\sigma_4] \in \mathrm{BT}_5$ の指数和は$\mathrm{e}(\beta) = 6 \not\equiv 0(\mathrm{mod}4)$ となる。上の Theorem2 より、この組みひも型 β は擬アノソフ型 (pA) であることが分かる。実際この 5 次の組みひも型 β は、horse-shoe 写像（図 3.9）から導かれる由緒正しいものである。[6]

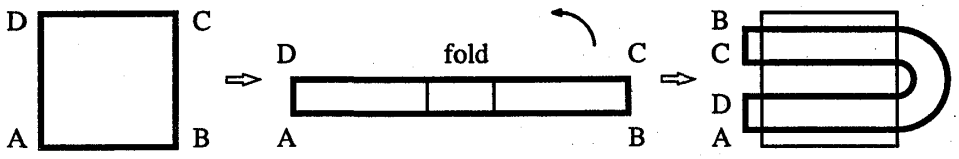


図 3.9: Horse-shoe 写像

Horse-shoe 写像の周期点の集合と記号 $\{0,1\}$ からなる周期的数列の集合との間には、1 対 1 対応が存在する。ここで horse-shoe 写像から記号力学系を生成する方法を簡単に述べておく。

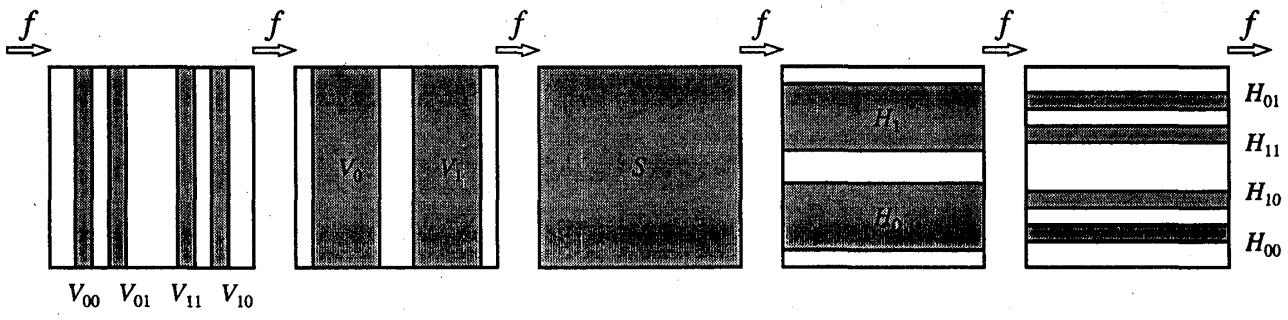


図 3.10: Horse-shoe 写像のくりかえし

[6]Horse-shoe 写像は横に引き伸ばして折り曲げる定義をとった。

正方領域 S に horse-shoe 写像 f をほどこすと、$S \cap f(S)$ は2つのよこ帯領域 H_0, H_1 になる。逆写像も考えると、$f^{-1}(S) \cap S$ はふたつのたて帯領域 V_0, V_1 になる。よこ帯 $H_0 \cup H_1$ をさらに f でうつす、つまり S に f^2 をほどこすと細い4つのよこ帯になる。一般に S の f^n に対する像は $2^{|n|}$ 本の帯領域である。各々の領域を次のように表わすことにする：

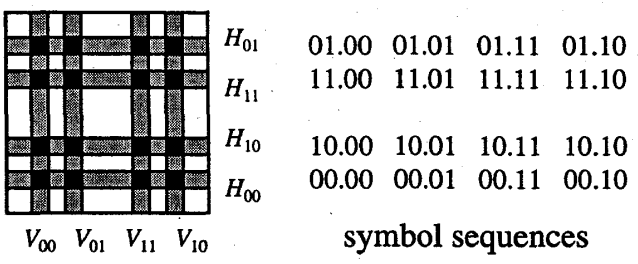


図 3.11: 矩形領域と記号列の対応

$$H_{a_{-2}a_{-1}} = H_{a_{-1}} \cap f(H_{a_{-2}}), \quad H_{a_{-3}a_{-2}a_{-1}} = H_{a_{-1}} \cap f(H_{a_{-3}a_{-2}}), \quad \ldots$$
$$V_{a_0a_1} = f^{-1}(V_{a_1}) \cap V_{a_0}, \qquad V_{a_0a_1a_2} = f^{-1}(V_{a_1a_2}) \cap V_{a_0}, \qquad \ldots$$

ただし a_i（i は整数）は 0 か 1 の値をとる。よこ帯とたて帯の交わった矩形領域 $H_{\ldots a_{-2}a_{-1}} \cap V_{a_0a_1\ldots}$ を記号 0 と 1 からなる記号列 $\{\cdots a_{-2}a_{-1}.a_0a_1\cdots\}$ で示す（例えば $n=2$ のときは 図 3.11 を参照)。以上の表記をつかうと horse-shoe 写像 f の不変集合 $\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(S)$ の各要素は、両側無限列 $\{\cdots a_{-2}a_{-1}.a_0a_1\cdots\}$ と対応する。f に対応する両側無限列上の写像は、小数点 . をひとつ右にずらす操作になる。n 周期軌道は循環する記号列になるが（例えば2周期軌道だと $\{\cdots 010101.010101\cdots\}$)、これを $(a_0a_1\cdots a_{n-1})^\infty$ と書くことにする。さて、記号列 $(10011)^\infty$, $(10010)^\infty$ は horse-shoe 写像における 5 周期の周期軌道である。このふたつの周期軌道に対応する組みひも型はさきの $\beta = [\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_3\sigma_4]$ である。ただし horse-shoe 写像 f に対してイソトピーは自然にとったものとする。記号列 $(10010)^\infty$ の場合について、組みひもとの対応を 図 3.12 に示す。

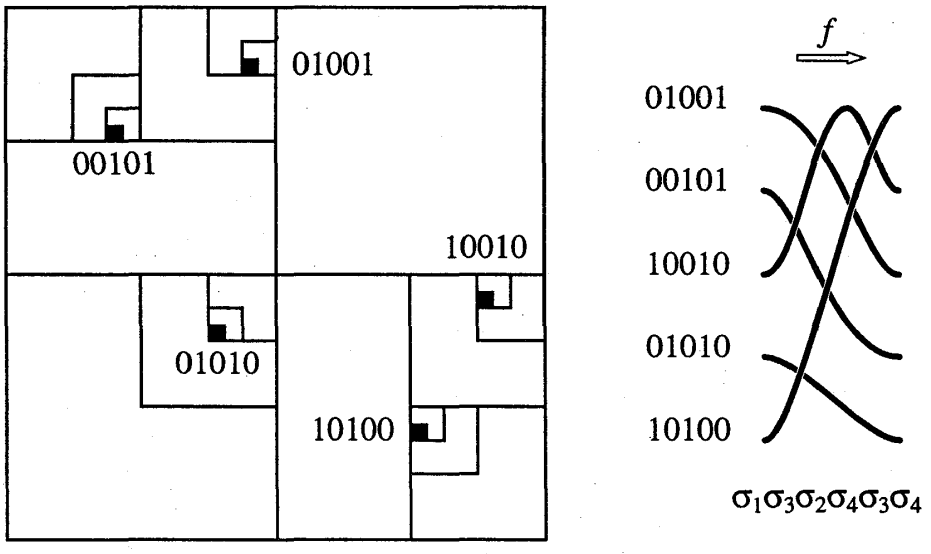


図 3.12: 5 周期軌道と組みひも

Remark 3

Boyland による定理（Theorem2）は一般の次数の組みひも型について成立する。しかし、組みひもの次数が 3 のとき cyclic な組みひも型は常に偶数の指数和 $e(\beta)$ をもち、Boyland の定理の仮定が成立しない。つまり、3 次の組みひも型にたいしてこの定理は適用できない。そこで、次に $n=3$ に対して擬アノソフ型を判定する定理を掲げる。[7]

Theorem 3 (Matsuoka 1986 [16])

3 次の組みひも型 β が擬アノソフ成分を含む（ $\Longleftrightarrow$ β は擬アノソフ型）
$\Longleftrightarrow$ $\beta=[\theta_3^m\sigma_1^{i_1}\sigma_2^{-j_1}\cdots\sigma_1^{i_d}\sigma_2^{-j_d}]$ とかける。ただし $m\in\mathbf{Z}$, $i_1,j_1,\ldots,i_d,j_d>0$.

上定理中の組みひも $\theta_3^m\sigma_1^{i_1}\sigma_2^{-j_1}\cdots\sigma_1^{i_d}\sigma_2^{-j_d}$ は alternate braid と呼ばれる。

Example 9

三つ編み $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ は alternate braid になっており、擬アノソフ型でもある。
以前使った桃のたて割り周期軌道の例（図 3.7(b)）を考える。組みひもは$\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2$ と表わされるが、これを alternate braid に変形する：

$$\begin{aligned}\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2 &= 122112 \text{ という表記を使う}\\ &\sim 121221=(12)^3 2^{-1}1^{-1}21=\theta_3 2^{-1}1^{-1}21\\ &=\theta_3\sigma_1\sigma_2^{-1}.\end{aligned}$$

よって、この周期軌道は擬アノソフ型である。ただし、最後の等式では $2^{-1}1^{-1}2=12^{-1}1^{-1}$ なる関係を使った。これは、基本関係式 $121=212$ を等式変形して、

$$\begin{aligned}1^{-1}2^{-1}1^{-1}&=2^{-1}1^{-1}2^{-1},\\ 1^{-1}2^{-1}1^{-1}2&=2^{-1}1^{-1},\\ 2^{-1}1^{-1}2&=12^{-1}1^{-1},\end{aligned}$$

より得られる。

Remark 4

3 次の組みひも型 β が擬アノソフ型でない（すなわち周期的成分のみもつ）
$\Longleftrightarrow$ $\beta=\sigma_1\sigma_2,(\sigma_1\sigma_2)^{-1},\sigma_1\sigma_2\sigma_1,\sigma_1^i$ および、これらと full-twist との積。

次に Theorem3 を包含する定理を示すが、そのまえに任意の組みひも型 β は

$$\beta=[\theta^m\rho\sigma_1^{k_1}\cdots\rho\sigma_1^{k_r}]$$

[7]擬アノソフ型組みひもの判定は、次数 $n=1,2$ のときは自明。$n=4$ 以上についての扱いは非常に難しくなると思われる。今のところ Boyland の定理に頼るしかない（あるいは、先に述べた 3 種類のアルゴリズムをつかう）。

なる形に書けることに注意しておく。

ここで、$\rho = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1}$ （図 3.13 参照）；$k_1,\ldots,k_r$ は自然数；次の定理では $^\forall s=1,\ldots,r$ に対して $\underbrace{k_s+k_{s+1}+\cdots+k_{s+n-3}}_{(n-2)\text{ 個}} \geq n$ を満たすと仮定する。ただしこの和は巡回的にとるものとする（つまり、k_r まで足したら k_1 に戻って足しあわせていく）。

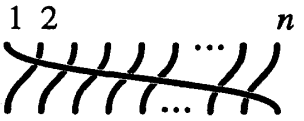


図 3.13: $\rho = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1}$

Theorem 4 (Matsuoka 1993 [17])
組みひも型 $\beta = [\theta^m\rho\sigma_1^{k_1}\cdots\rho\sigma_1^{k_r}]$ が次の (1) または (2) をみたす：

(1) $k_s \geq 4$ なる s が存在

(2) $k_s = 2, k_{s'} = 3$ なる s, s' が存在

$\Longrightarrow$ 組みひも型 β は擬アノソフ型成分を含む。

Definition 14 (組みひも型のエントロピー)
組みひも型 β に対するエントロピーを $h(\beta) = \inf_f h(f)$ で定義する。ただし、下限は β 型の不変集合（周期軌道）をもつようなすべての写像に関してとる。

Theorem 5 (Thurston)

(1) $\beta \supset \mathrm{pA} \Rightarrow h(\beta) > 0$

(2) $\beta : \mathrm{pA} \Rightarrow h(\beta) = h(\varphi_\beta)$
ただし、$\varphi_\beta : D \to D$ は擬アノソフ写像。

この定理（とくに後半）は組みひも型に対して実際にそのエントロピーをもつ写像が実現できることを示している。擬アノソフ写像 φ_β は位相共役を除いて 1 個だけ存在し、β 型不変集合をもつすべての f に対して $h(\varphi_\beta) \leq h(f)$ となるもっとも simple な写像になっている。1 次元写像の場合には区分線型写像がもっとも simple な写像であったが（Theorem21, Theorem23）、これの 2 次元版が擬アノソフ写像である。

擬アノソフ写像は次のような性質をもっている：

(1) $h(\varphi_\beta) > 0$

(2) φ_β の周期点は D の中で稠密

(3) f が β 型の周期軌道 S を持つ$\Longrightarrow \mathrm{Per}(\varphi_\beta) - S \to \mathrm{Per}(f)$ なる単射で組みひも型を保つものが存在する。ただし、$\mathrm{Per}(f)$ は写像 f の周期軌道の集合。

アノソフ写像は全空間の各点で、安定方向（縮む）と不安定方向（伸びる）を持っている。擬アノソフ写像はアノソフ写像に有限個の特異点が付加されたものと考えればよい。

4 Burau 表現

ポアンカレ写像の周期 1 の周期軌道（不動点）に関する情報を持つものとして、ホモトピー不変な不変多項式が構成できる。この不変多項式は、組みひも群の Burau 表現を用いて代数的に求められる場合がある。Burau 表現によって不変多項式を求めるために用いる組みひもは、周期 1 以外の周期軌道から得られたものであってもよい。すなわち、Burau 表現を用いれば周期 1 以外の周期軌道から周期 1 の周期軌道に関する情報を得られる。

この節では、まず不変多項式を構成するために linking 数と不動点指数の説明をする。そののち、Burau 表現を導入し、Burau 表現と不変多項式を結ぶ定理を紹介し、いくつかの応用例を見る。最後に、Burau 表現を用いて組みひもが pA であるかないかという判定を行う方法について述べる。

Definition 15 (linking 数)

$f : D \to D$: 連続、1 : 1、
$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in D | f(x) = x\}$ (不動点の集合)、
$S(\subset D)$: $f(S) = S$, $\sharp S < \infty$ (fの不変集合全体から適当に選んだ、要素数が有限である f の不変部分集合) とする。
$x \in \mathrm{Fix}(f) - S$ について、x と S との linking 数 $\mathrm{lk}(x, S)$ を図 4.1、図 4.2 のように数える。

定義から明らかに、linking 数はホモトピー不変（ひもの連続変形で不変）である。

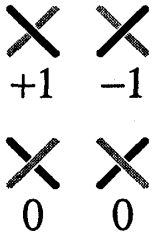


図 4.1: linking 数。黒：x のひも。グレー：Sの要素のひも。

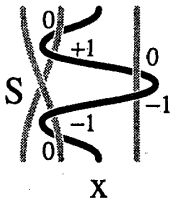


図 4.2: linking 数の数え方（例：$\mathrm{lk}(x, S) = -1$）

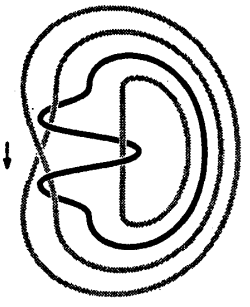


図 4.3: knot

註：ひもを閉じてできる knot の向きを下向きに取れば、knot の linking 数と同じである (図 4.3)。

Definition 16 (不動点指数)

x : fの孤立不動点に対し、x の指数 $\mathrm{ind}(x)$ を次のように定める。ただし、Uは不動点 x を中心とする十分小さな円周である。

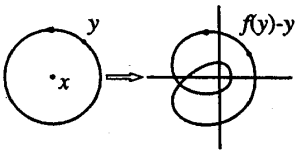


図 4.4: 不動点指数。この場合は、$\mathrm{ind}(x) = 2$。

$$\mathrm{ind}(x) = 「U \to \mathbf{R}^2 - \{0\} \text{ の回転数}」$$
$$y \mapsto f(y) - y$$

Example 10

(1) x : sink $\Longrightarrow \mathrm{ind}(x) = 1$。

(図 4.5 は sink の例。$f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x$)

(2) x : untwisted saddle $\Longrightarrow \mathrm{ind}(x) = -1$。

(図 4.6 は untwisted saddle の例。$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x$)

(3) x : twisted saddle $\Longrightarrow \mathrm{ind}(x) = 1$。

(図 4.7 は twisted saddle の例。$f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x$)

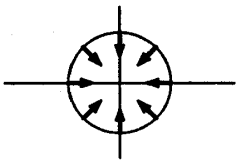


図 4.5: sink (図の矢印は $f(y) - y$ を表す)

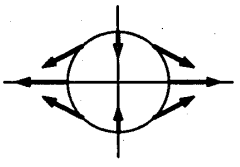


図 4.6: untwisted-saddle

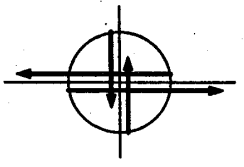


図 4.7: twisted saddle

上の定義によると、写像 fの flow を見て不動点指数を決定しているが、fの x における線型固有値がわかれば、$\mathrm{ind}(x)$ がすぐにわかる場合もある。

Lemma 4

$\sigma(Df(x))$: fの x における線型固有値の集合、としたとき
$\sigma(Df(x)) \not\ni 1 \Longrightarrow \mathrm{ind}(x) = (-1)^{\mathrm{e}}, \quad \mathrm{e} = \sharp\{\lambda \in \sigma(Df(x)) | \lambda > 1\}$
ただし、固有値が重複していたら重複の数だけ e に数える。

この補題の例としては、上記の Example を参照。

註 1: 双極子型不動点（図 4.8）は上の条件を満たさない（固有値として 1 を持つ)。不動点指数は 2 である。

註 2: Flow から作られる写像の不動点 x に対しては

$$\mathrm{ind}(x) = 1 + \frac{\sharp E - \sharp H}{2} \tag{2}$$

が成り立つ。ただし、E、H はそれぞれ楕円型（Elliptic)、双曲型（Hyperbolic）の Flow を示す領域を表わす（図 4.9 参照)。

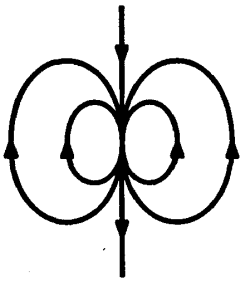


図 4.8: 双極子型不動点。$\mathrm{ind}(x) = 2$。

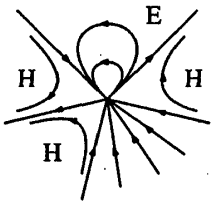


図 4.9: Flow の不動点の例。$\mathrm{ind}(x) = 1 + (1-3)/2 = 0$。

Remark 5

不動点の指数はホモトピー不変である。従って、分岐を起こしても不動点の指数の総和は不変である (図 4.10 参照)。

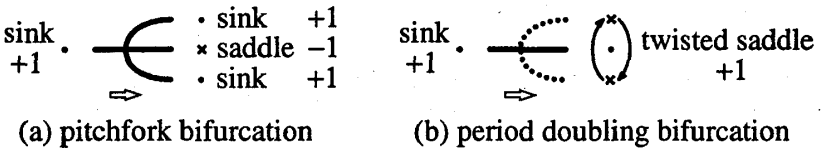


図 4.10: 分岐に対する不動点指数の不変性。(b) においては、分岐後の実線は不安定な不動点を、点線は安定な 2 周期点（ゆえに指数の総和には数えない）を表わす。

linking 数と不動点指数は共にホモトピー不変であるから、これら二つから次のような不変多項式を構成できる。

Definition 17 (不変多項式)

$S : f(S) = S, \sharp S < \infty$ （fの不変集合全体から適当に選んだ、要素数が有限な不変部分集合)、
$y \in \mathrm{Fix}(f) - S$ とする。

fの不動点 y の指数と yと S との linking 数を用いて、次のような t の単項式をつくる。

$$\mathrm{ind}(y)t^{\mathrm{lk}(y,S)} \tag{3}$$

$\mathrm{Fix}(f)-S$ の元からつくった上の様な単項式を足し上げて、次のような不変多項式を定義する。

$$\sum_{y\in \mathrm{Fix}(f)-S} \mathrm{ind}(y)t^{\mathrm{lk}(y,S)} \tag{4}$$

この不変多項式は、S以外の不動点の情報をある程度含んでいる。例えば t^2 という項があれば、S との linking 数が 2 であり S の元でない不動点が少なくとも 1 つは存在する事になる。ただし、t^2の係数が 1 であるからといって、その不動点の指数は 1 であるとは限らない。なぜなら、S との linking 数が 2 である S の元でない不動点が 2 つあり、それらの指数がそれぞれ 2、-1 である場合も、不変多項式上では t^2 として表わされるからである。

また、周期 n の周期軌道の性質は f^n に対して上の不変多項式を構成する事により求められる。このとき、n の約数 m に対して、周期 m の周期軌道の性質も同時に求められている事になる。ただし、n の約数以外の周期を持つ周期軌道の性質は f^n からは分からない。

このように、不変多項式は写像 fの S以外の不動点についての情報を含んでいるが、実は不変多項式は Sの情報だけから代数的に求められる場合もある。このことを示すために、組みひも群の Burau 表現を導入しよう。

Definition 18 (（reduced）Burau 表現)

$$R : \mathrm{B}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(n-1, \mathbf{Z}[t,t^{-1}])$$

(ただし、$\mathbf{Z}[t,t^{-1}]=\{t$、t^{-1} 上の $\mathbf{Z}$-係数多項式 $\}$ 、$\mathrm{GL}(n-1,\mathbf{Z}[t,t^{-1}])$ は $\mathbf{Z}[t,t^{-1}]$ を要素として持つ $(n-1)\times(n-1)$ の行列の集合。)
組みひも群 B_n の生成元が次のように表わされる準同型写像 R を B_nの Burau 表現という。

$$R(\sigma_1)=\left(\begin{array}{cc|c} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{n-3} \end{array}\right), \quad R(\sigma_{n-1})=\left(\begin{array}{c|cc} I_{n-3} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & t & -t \end{array}\right), \tag{5}$$

$$R(\sigma_i)=\left(\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-2} & & 0 & & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & t & -t & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & I_{n-i-2} \end{array}\right), \qquad (i=2,3,\cdots,n-2) \tag{6}$$

ここで I_n は $n\times n$ の単位行列を表わす。

$i=1,n-1$ の時も" 拡大解釈" すれば $i=2,3,\cdots,n-2$ の時と同じ形であるとみなせる。例えば、$i=1$ のときは $I_{-1}=0$ と思って右下から $(n-1)\times(n-1)$ の大きさの行列を

採れば $R(\sigma_1)$ になっている。なお、生成元の逆元の Burau 表現は次のように表わされる。

$$R(\sigma_i^{-1}) = \left(\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-2} & & 0 & & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -t^{-1} & t^{-1} & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & I_{n-i-2} \end{array}\right) \tag{7}$$

Remark 6

準同型の定義については積の順番に注意しなければならない。ここでは、組みひもと行列の作用の順番を考慮に入れて、準同型を次のように定義した。

$$R(\sigma\sigma') = R(\sigma')R(\sigma)$$

ただし、文献によっては

$$R(\sigma\sigma') = R(\sigma)R(\sigma')$$

と定義されているときもある。(力学系に応用する際には、どちらの定義を用いてもよい。)

Example 11

$n = 3$ のとき

(1) $R(\sigma_1\sigma_2) = R(\sigma_2)R(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ -t^2 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $R(\sigma_1\sigma_2^{-1}) = R(\sigma_2^{-1})R(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ -t & 1-t^{-1} \end{pmatrix}$

Remark 7

L: link、$b \in \mathrm{B}_n$ の間に図 4.11 のような関係がある時、L の不変多項式であるアレクサンダー多項式 Δ_L と b の Burau 表現 $R(b)$ は次の様な関係によって結ばれる。

$$\Delta_L = (\sqrt{t})^{n-e-1}\frac{t-1}{t^n-1}\,|I_{n-1} - R(b)|$$

(e: 指数和)

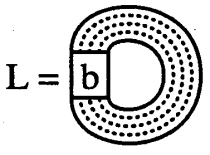


図 4.11: Link と Braid の関係

Remark 8

Burau 表現において $b, b' \in \mathrm{B}_n$、$R(b) = R(b') \Rightarrow b = b'$ が成り立つとは限らない。しかし、$n \leq 3$ のときは、$R(b) = R(b') \Rightarrow b = b'$ が成り立つ（逆は明らかに成り立つ)。

$n \geq 6$ では $R(b) = R(b') \Rightarrow b = b'$ に対する反例がある。反例は n が小さくなるほど作りにくくなる。なぜなら、もしある n' で反例 A が作れれば、$n > n'$ に対しては他のひもには絡まない $(n - n')$ 本のひもを組みひも A に加えるだけで反例となるからである。

Burau 表現と不変多項式を結びつける定理を次に示そう。

Theorem 6 ([15]、[17] 参照)

$S(\subset D) : f(S) = S,\ \sharp S < \infty$ (fの不変集合全体から適当に選んだ、要素数が有限である f の不変部分集合) とする。このとき、

$$^{\forall}x(\in S)\text{: attractive} \implies \sum_{y\in \mathrm{Fix}(f)-S} \mathrm{ind}(y)t^{\mathrm{lk}(y,S)} = -\mathrm{tr}R(\mathrm{bt}(S))$$

この結果は、イソトピーの取り方によらない。

この定理の意味は次の様なものである。定理の仮定、及び帰結の右辺は Sの情報のみで得られる。一方、帰結の左辺である不変多項式は、さきほど見たように S以外の不動点の情報をも含んでいる。従って、この定理は Sの情報から S以外の不動点の情報（存在、Sとの linking 数）を教えてくれる。

この定理は、Sの要素としては attractive な x しか許していない。つまり、attractive な周期軌道がない写像に対してはこの定理を適用できない。これは定理の適用範囲を狭めているだろうか? 結論をいえば、定理の仮定は定理の適用範囲を狭めてはおらず、任意の写像に対して若干の修正をすれば定理を適用できる。その理由と修正の方法について述べよう。まず理由を述べる。不変多項式はホモトピー不変であったから、fをホモトピー変形した結果に対しても、(変形によって新たに不動点が生成されなければ) 同じ不変多項式が得られることに注意しよう。そして、不動点の分岐はホモトピー変形であること、sink 以外の不動点でも適当に分岐させれば sink の不動点が得られること（例えば、saddle の不動点を分岐させて saddle、sink、saddle という 3 つの不動点にする。図 4.10(a) 参照）を考えれば、任意の写像に対してこの定理が適用できることがわかる。保存系の場合、Liouville の定理（相空間の体積保存）が成り立つのでもともとのポアンカレ写像には sink の不動点は存在しない。もし、ホモトピー変形させる時に保存系であり続けるように変形しなければならないのであれば定理は保存系には使えないのだが、保存系と言う性質は重要ではない（写像のトポロジーだけが問題）ので保存系の場合でも上の議論は有効である。次に修正の方法について述べよう。上で例に出したように saddle を saddle、sink、saddle に分岐させた時には、2 つの saddle を人工的に作りだした。この人工的に作った 2 つの不動点の情報が定理の式の左辺に入り込んでいるので、これら 2 つの不動点を表わす項を両辺から引いておけば元の写像に対する不変多項式が得られる。すなわち、fをホモトピー変形して作った写像を gとすると、定理として成り立つのは

$$\sum_{y\in \mathrm{Fix}(g)-S} \mathrm{ind}(y)t^{\mathrm{lk}(y,S)} = -\mathrm{tr}R(\mathrm{bt}(S)) \tag{8}$$

であるが、知りたいのは

$$\sum_{y\in \mathrm{Fix}(f)-S} \mathrm{ind}(y)t^{\mathrm{lk}(y,S)} \tag{9}$$

であるから

$$\sum_{y\in \mathrm{Fix}(g)-S} = \sum_{y\in \mathrm{Fix}(f)-S} + \sum_{y\in \text{人工的に作った2つのsaddle}} \tag{10}$$

に注意すると、

$$\sum_{y\in \mathrm{Fix}(f)-S} \mathrm{ind}(y)t^{\mathrm{lk}(y,S)} = -\mathrm{tr}R(\mathrm{bt}(S)) - \sum_{y\in \text{人工的に作った2つのsaddle}} \mathrm{ind}(y)t^{\mathrm{lk}(y,S)} \tag{11}$$

となる。

それでは以下に、この定理を実際に適用した例を見てみよう。

Example 12

(1) Sとして、不動点、周期外力による周期1の点が1個づつある場合 (図 4.12) を考えよう。Sから得られる組みひもは、図 4.12より $\mathrm{bt}(S) = \sigma_1^2$ である。よって、Sの2点がattractive であればすぐさま定理を適用することにより、次の様に不変多項式が求まる。
$-\mathrm{tr}R(\mathrm{bt}(S)) = -\mathrm{tr}R(\sigma_1^2) = -\mathrm{tr}(-t)^2 = -t^2$

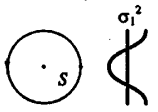


図 4.12: $\mathrm{bt}(S) = \sigma_1^2$

従って、Sに含まれる不動点以外に、S との linking 数が 2 である不動点が少なくとも 1 つは存在する。

上のような組みひも型を実現する写像の例として、図 4.13 のような連続力学系を考えよう。矢印は、flow を表わす。左から、sink、saddle、sink の 3 つの不動点があることが分かる。ポアンカレ写像として、時間を 1 だけ進める写像 fをとる。fと恒等写像とのイソトピーとして左の sink の周りを反時計周りに一回転させるようなものをとろう (図 4.14参照)。Sとして sink である左と右の 2 つの不動点をとれば、$\mathrm{bt}(S) = \sigma_1^2$ となり、上で存在が明らかになったSとの linking 数が 2 である不動点とは図 4.13の中央の不動点であることが分かる。

註：上の例では$\mathrm{bt}(S) = \sigma_1^2$となるように左の不動点の周りで一回転するようなイソトピーをとったが、一回転しないイソトピーをとることもできる。この時は、$\mathrm{bt}(S) = e$ (単位元) となるから、不変多項式は$-\mathrm{tr}R(e) = -1$となる。このときも、Sとの linking 数が 0 であるような中央の不動点の存在は予言できている。(このイソトピーでは、3 点の不動点に対応する 3 本のひもが互いにからまらない)

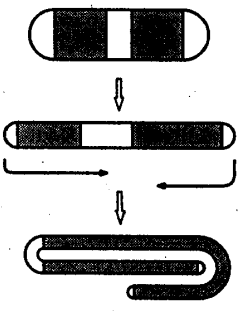


図 4.15: generalized horse-shoe

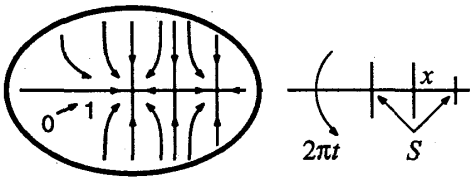


図 4.13: $\mathrm{bt}(S) = \sigma_1^2$を作る元となる力学系の例。ポアンカレ写像は時間を 1 だけ進める写像をとる。Sとしては左と右の sink の不動点 2 つをとる。イソトピーは、$\mathrm{bt}(S) = \sigma_1^2$となるように左の不動点の周りを反時計周りに一回転させるようなものをとる（右の図を参照）。

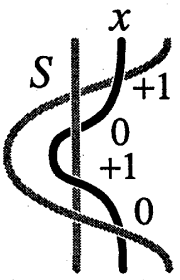


図 4.14: 図 4.13の力学系のポアンカレ写像に対するイソトピー。中央の不動点 x が Sの情報から存在が予言された不動点。$\mathrm{lk}(x, S) = 2$。

(2) generalized horse-shoe (図 4.15)

f^3 は両半月形、中央の長方形の領域に対して縮小写像になっているので、それぞれの領域の中にただ 1 つの attractive な不動点をもつ。それら 3 つの f^3 の不動点の集合を Sとする。図 4.16から $\mathrm{bt}(S) = \sigma_1\sigma_2^{-1}$ であることがわかるので、不変多項式は次の様になる。
$-\mathrm{tr}R(\mathrm{bt}(S)) = -(-t + 1 - t^{-1}) = t - 1 + t^{-1}$ (Example 11 参照)。
この不変多項式から、fは 3 つの不動点をもち、Sとの linking 数はそれぞれ $1, 0, -1$ であることがわかる。図 4.17中の y_1、y_2、y_3 がこれら 3 つの不動点にそれぞれに対応する。

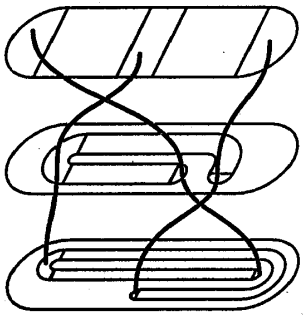


図 4.16: イソトピーと不変集合（3 周期軌道）

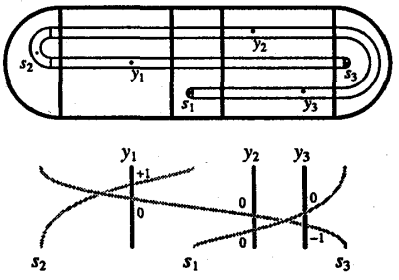


図 4.17: 3 周期点と不動軌道

Burau 行列の形の説明

Burau 表現を用いると組みひもの生成元を式 (6) の形にかけるが、この形はどのようにして出てきたものだろうか? $n = 4$ のときを例にとって、generalized horse-shoe 写像から Burau 行列の形を導出して見よう。

$n=4$ のときは、

$$R(\sigma_2)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ t & -t & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (12)$$

図 4.18: $n=4$ のときの組みひも群の生成元。

σ_2 を実現する horse-shoe 写像 f として、図 4.19 のような写像をとる。この写像に対して、S としては 図 4.19 中にかかれている γ_i $(i=1,2,3,4)$ の 4 点をとる。これら 4 点のうち、γ_1 と γ_4 は不動点、γ_2 と γ_3 は互いに移りあう周期 2 の周期軌道である (i.e. $f(\gamma_2)=\gamma_3,\ f(\gamma_3)=\gamma_2$)。

長方形の領域 A、B、C の f による移り方を、上下の方向も込めて行列の形に書く。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(A) & f(B) & f(C)\end{array}\\ \begin{array}{c} A\\ B\\ C\end{array} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

この行列の読み方は、例えば $f(A)$ は A と B の領域に存在しているから、A と B の行に 1 を書く。また、$f(B)$ は B の領域に存在しているが、もとの上下の方向が逆になっているので -1 と書いてある。

さらに、例えば A が B に行く領域から 1 点を選び、その点と S との linking 数を考える。例えば、A 領域の中で f で移された後も A 領域にいる点を一点とると、その点は S とはからまらないので（図 4.20参照）linking 数は 0 である。したがって、行列の A 行 $f(A)$ 列の要素 1 には t^0 をかける。また、A 領域の中で f で移された後は B 領域にいる点を一点とると、その点は S に左上からからまるので linking 数は 1 である。したがって、行列の B 行 $f(A)$ 列の要素 1 には t^1 をかける。このようにすると、式 (12) の形が得られる。

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1\cdot t^0 & 0 & 0\\ 1\cdot t^1 & -1\cdot t^1 & 1\cdot t^0\\ 0 & 0 & 1\cdot t^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ t & -t & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

多変数版

次に、不変多項式を t の 1 変数多項式から多変数多項式に拡張して見よう。つまり、S の周期軌道に対応するひもを γ_i として、それぞれに変数 t_i を対応させる。

$$\begin{array}{ccccccc} S= & \gamma_1 & \cup & \gamma_2 & \cup & \cdots & \cup\ \gamma_l\\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow\\ & t_1 & & t_2 & & & t_l\end{array}$$

すると、$t_1^{\pm1}, t_2^{\pm1}, \cdots, t_l^{\pm1}$ を変数とする l 変数多項式ができる。この多変数不変多項式を用いれば、不動点の数や、linking 数について 1 変数の時よりも詳しい情報が得られる。

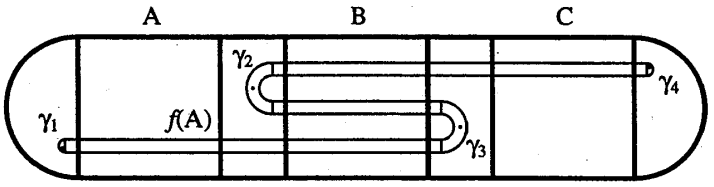


図 4.19: generalized horse-shoe と記号力学系。S の元は、attractive な 4 つの点$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$である。

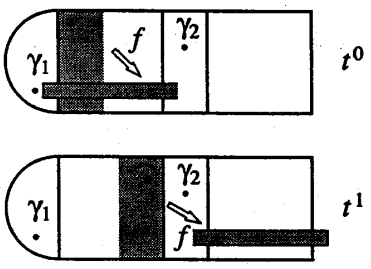


図 4.20: Sとの linking の情報 — t^0, t^1 を例に。

Example 13

$\mathrm{bt}(S) = \sigma_1^2\sigma_2^{-2}$ のとき 3 本のひもに対応する変数をそれぞれ a、b、c とすると

$$\mathrm{tr}R(\mathrm{bt}(S)) = ab + ac^{-1} + b^{-1}c^{-1} + 1 - a - c^{-1}$$

となる。

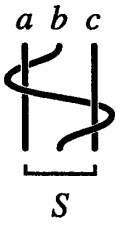


図 4.21: 多項式表現の多変数版

1 変数の場合は、

$$\mathrm{tr}R(\mathrm{bt}(S)) = t^2 + 1 + t^{-2} + 1 - t - t^{-1}$$

となって、linking 数が 0 の不動点の情報が落ちていることが分かる。また、多変数であれば、新たな不動点が S のうちのどの不動点とからまっているのかも分かる。例えば、ac^{-1} の項からは、a に 1 回、c に逆方向から 1 回からまっている不動点があることが分かる。

この節の後半では、組みひも型の Burau 表現を用いてエントロピーに関する情報を得るための方法について説明する。まず、1 次元の区間 I における写像のエントロピーに関する定理について述べる。

Theorem 7 (Young,'81)

$f : I \to I$ 、S :有限不変集合、
$\pi : S$の置換、$M_\pi : \pi$の構造行列とする。このとき、

$$h(f) \geq \log(M_\pi\text{のスペクトル半径})$$

スペクトル半径とは固有値の絶対値の最大値の事である。

この定理によれば、構造行列を知る事により写像のエントロピーが評価できる。

ここで構造行列について少し述べる。一般に n 周期軌道を、$a_1, a_2, \cdots, a_n (a_1 < a_2 < \cdots < a_n)$ とする。また区間 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ を、

$$A_i = [a_i, a_{i+1}]$$

と定義すると構造行列は $(n-1)\times(n-1)$ 行列 $M_\pi=\{m_{ij}\}$ であり、

$$[f(A_1)\ f(A_2)\ \ldots\ f(A_{n-1})]=[A_1\ A_2\ \ldots\ A_{n-1}]M_\pi$$

を満たすものである。つまり構造行列の第 i 列は、区間 A_iの行き先を表す。$m_{ij}=0$ の時 $A_i\cap f(A_j)=\emptyset$ であり、$m_{ij}=1$ の時 $A_i\cap f(A_j)\neq\emptyset$ である。

Example 14

1. 3 周期軌道があると、Li - Yorke の意味でのカオスが出る (Appendix 参照)。この時のエントロピー $h(f)$ を評価する。

   この場合、3 周期軌道に対する置換πは図 1に示す 2 種類しかない。

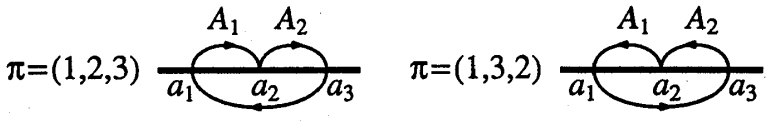


図 4.22: 3 周期軌道

このとき、構造行列 M_πはすぐわかるように、

$$\mathrm{M}_\pi=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\text{または}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

となり固有値 λは、

$$\lambda^2-\lambda-1=0\qquad\qquad\therefore\lambda=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

である。よってエントロピーは、

$$h(f)\geq\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$$

となり、何らかの情報が埋め込まれている事がわかる。

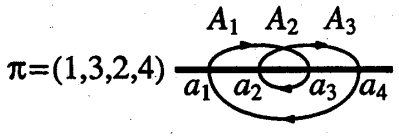


図 4.23: 4 周期軌道

2. 4周期軌道で、π=(1 3 2 4) のタイプの置換であるときを考える (図 4.23参照)。

   これは周期倍カスケードから生じるものであり、情報を持っていては困る。よってエントロピーは0でなくてはならない。実際、構造行列 M_πは

$$\mathrm{M}_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   であり、固有多項式は

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

   となり固有値は、λ=1,1,−1 である。よって M_πのスペクトル半径は1なので $h(f) \geq 0$ となり、$h(f) = 0$ と矛盾しない。

次に、組みひも型の Burau 表現とエントロピーに対する定理を述べる。

Theorem 8 (Fried,'86)

β: 組みひも型 に対して、

$$h(\beta) \geq \log \max_{t \in \mathbf{C}, |t|=1} (R(\beta) \text{ のスペクトル半径})$$

この定理により構造行列を知らなくとも、Burau 表現からエントロピーの下限を知ることができる。また次の系は、組みひもが擬アノソフ型の既約表現を持つかどうかの判断に有用である。

Corollary 1

$$^{\exists}t \in \mathbf{C},\ |t| = 1,\ |\mathrm{tr}R(\beta)| > n - 1 \implies \beta \supset pA$$

これは、もしβがpAを含まないなら $h(\beta)$= 0 となる、つまり、固有値の絶対値はすべて1以下であるということより分かる。

Example 15

$\beta = \sigma_1\sigma_2^{-1} (n = 3)$ の場合は、$|\mathrm{tr}R(\beta)| = |t + t^{-1} - 1|$ であり、$t = -1$ とおくと、$|\mathrm{tr}R(\beta)|$=3 > 2 となる。したがってこのときβは擬アノソフ型の組みひもを含む。

Example 16

$n=3, \beta=\sigma_1^i\sigma_2^{-1}(i\geq 1)$ の場合 (図 4.24参照)。

$$R(\sigma_1^i\sigma_2^{-1})=\begin{bmatrix} (-t)^i & 1-t+t^2-\cdots+(-t)^{i-1} \\ (-t)^i & -t^{-1}+1-t+\cdots+(-t)^{i-1} \end{bmatrix}$$

ここで $t\to -t$ の置き換えをする。(ここでは $|t|$ が問題なので、この置き換えは構わない。)
これによって、

$$R(\sigma_1^i\sigma_2^{-1})=\begin{bmatrix} t^i & 1+t+t^2+\cdots+t^{i-1} \\ t^i & t^{-1}+1+t+\cdots+t^{i-1} \end{bmatrix}$$

となる。

この固有値を求めると、

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-\mathrm{tr}R\pm\sqrt{(\mathrm{tr}R)^2-4detR}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{t}^{i-1}}{2}(-T\pm\sqrt{T^2-4})\end{aligned}$$

図 4.24: $\sigma_1^i\sigma_2^{-1}$

となる。ここで、$T=\sqrt{t}^{-i-1}+\sqrt{t}^{-i+1}+\cdots+\sqrt{t}^{-i+(2i+1)}$ とおいた。
この T に関しては、

$$\begin{aligned}T &= \sqrt{t}^{-i-1}+\sqrt{t}^{-i+1}+\cdots+\sqrt{t}^{-i+(2i+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{i+1}\sqrt{t}^{-i-1+2j}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\sqrt{t}^{-i+(2i+1)-2j} &= \sqrt{t}^{i+1-2j} \\ &= \sqrt{t}^{-(-i-1+2j)}\end{aligned}$$

から、$\sqrt{t}^{-i+(2i+1)-2j}$ と $\sqrt{t}^{-i-1+2j}$ は複素共役であるとわかる。よって $|T|\leq i+2$ であり、$t=1$ の時 T は最大値 $i+2$ をとる。したがって、

$$\begin{aligned}|\lambda| &= \left|\frac{\sqrt{t}^{i-1}}{2}\right|\left|T\pm\sqrt{T^2-4}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|T\pm\sqrt{T^2-4}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(i+2+\sqrt{(i+2)^2-4}\right)\end{aligned}$$

$$h(\sigma_1^i\sigma_2^{-1})\geq\log\frac{i+2+\sqrt{i^2+4i}}{2}$$

これに $i=1$ を入れると、

$$h(\sigma_1\sigma_2^{-1}) \geq \log\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

を得る。

この例により $\theta^m\sigma_1\sigma_2^{-1}$ の型の組みひも型は、horse-shoe H には現れない事がわかる。なぜならば、horse-shoe では 1 回の写像でもとの領域に 2 回またがるので $h(H) = \log 2$ であるが、

$$h(\theta^m\sigma_1\sigma_2^{-1}) \geq \log 2.6\cdots$$

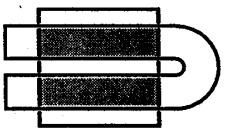


図 4.25: horse-shoe

なので、これは horse-shoe に埋め込むことはできないからである。

5　braid type の順序構造

これまで組みひも型に関する色々な定理等を述べてきた。ここではもう一歩進み、組みひも型に順序構造を入れる。

任意の2つの組みひも型の間には、ごく自然な形で順序構造が入る。この順序構造は数学的な順序の公理を満たし、力学系へは周期軌道の消失問題として応用され、数値計算の確認としても使える。

まず、組みひも型の順序構造を定義する。

Definition 19 (組みひも型の順序)

β, β' :組みひも型とする。このとき、
$\beta \geq \beta' \Longleftrightarrow$「$f : D \longrightarrow D$は連続で$1:1$かつ$\beta$型の不変集合をもつような任意の写像。$\Longrightarrow f$は$\beta'$型の不変集合ももつ。」

Theorem 9 (Boyland,'92 [8])

"$\geq$" は順序の公理を満たす。

ここで順序の公理とは、$\begin{cases} \beta \geq \beta \\ \beta \geq \beta', \ \ \beta' \geq \beta'' \ \Longrightarrow \ \beta \geq \beta'' \\ \beta \geq \beta', \ \ \beta \leq \beta' \ \Longrightarrow \ \beta = \beta' \end{cases}$

となる事である。

Theorem 10 (Thurston の定理より)

βが擬アノソフ型ならば

$$\{\beta' : \text{ 組みひも型} \mid \beta' \leq \beta\} = \{ \ \mathrm{bt}(S) \mid S\text{は pA map } \varphi_\beta\text{の不変集合} \ \}$$

この定理によって、擬アノソフ写像を調べさえすれば組みひも型の順序がわかる。また次に述べる補題は、Dが open disk の場合にも適用できる。よって$\mathbf{R}^2$でも使える。

Remark 9 (松岡、'86 [16])

$n = 3$ のとき

1、$[\sigma_1^{i_1}\sigma_2^{-1} \ldots \sigma_1^{i_d}\sigma_2^{-1}] > [\sigma_1^j] \Longleftrightarrow -d \leq j \leq i_1 + \cdots + i_d$

例えば $d = 1, i_1 = 1$ の場合、

$$[\sigma_1\sigma_2^{-1}] > [\sigma_1^j] \Longleftrightarrow -1 \leq j \leq 1$$
$$\Longleftrightarrow j = \pm 1、0$$

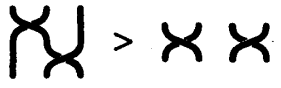


図 5.1: $[\sigma_1\sigma_2^{-1}] > [\sigma_1^{\pm 1}]$

が言える (図 5.1参照)。

これは、$[\sigma_1\sigma_2^{-1}]$ のタイプの組みひも型をもてば、必ず $[\sigma_1^j](-1 \leq j \leq 1)$ のタイプの組みひも型も持つ、ということである。

2、$i \geq 3$ のとき $[\sigma_1^i \sigma_2^{-1}] > [\sigma_1^{i-2}\sigma_2^{-1}], [\theta\sigma_1^{i-2}\sigma_2^{-1}]$

例えば $i = 3$ とすると図 5.2のようになることがわかる。ここで、

$$[\theta\sigma_1\sigma_2^{-1}] = [\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2]$$

ということにも注意しておく。

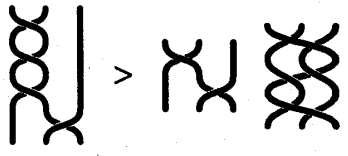


図 5.2: $[\sigma_1^3\sigma_2^{-1}] > [\sigma_1\sigma_2^{-1}], [\theta\sigma_1\sigma_2^{-1}]$

また、T. Hall により horse-shoe に現われる組みひも型 (unimodal braid type) の順序構造 (HS,≥) が調べられている [13][14] (図 5.3参照)。

ここで、HS = { bt(γ, H) | γは Hの周期軌道 } である。

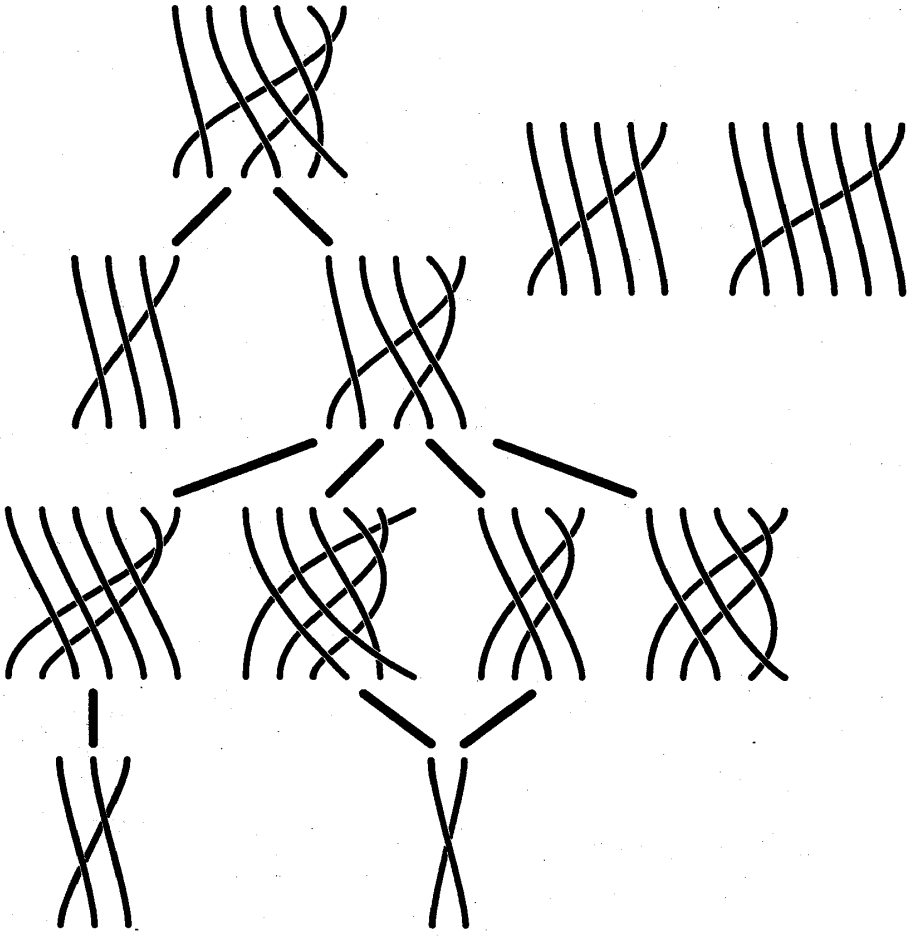
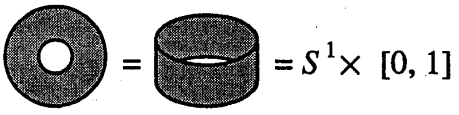


図 5.3: unimodal braid type ($2 \leq n \leq 6$) の Hasse 図式

6　アニュラス上の力学系



A: annulus

図 6.1: アニュラス

これまではすべてディスク上の話であったが、その自然な拡張としてアニュラス上での組みひも型が考えられる。アニュラスとは円環であり、円周と閉区間の直積として定義される (図 6.1参照)。この節では、アニュラス上の写像に対して組みひもの概念を導入し、組みひもの順序構造について述べたあと、アニュラス上の組みひも型に特有な概念である回転数を導入する。このためには covering space というアニュラスを切り開いたような空間を考える必要があり、このあたりのことについては少し詳しく述べる。そしてこの節の最後には力学系との関連も少し述べる。

まず A をアニュラスとし、アニュラスからアニュラスへの写像 f を次の様に定義する。

Definition 20 (アニュラス上の写像)

アニュラス A 上の写像 f を次のものとする。

$$f : A \longrightarrow A : \text{連続で } 1:1 \text{ かつ } f \sim id、$$

また S を有限不変集合とする。ここで、$f \sim id$ とは、f が恒等変換から連続変形によって得られることを表す。つまり f が図 6.2のような内側と外側のひっくり返しの変換の場合は $f \sim id$ ではない。

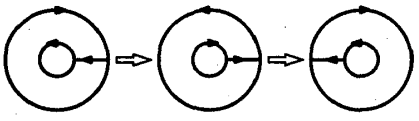


図 6.2: $f \sim id$ でない例。まず一番左のアニュラスを連続変形して真中のアニュラスを得る。次に裏返すと一番右のアニュラスが得られる。

また、S と f によって作られるアニュラス上の組みひも型 $\mathrm{bt}(S, f)$ はディスクと同様に定義すればよい (図 6.3参照)。真中の空洞は考えなければよいのである。

ここで 2 つの数学的準備をする。

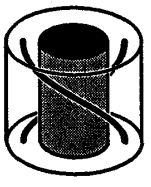


図 6.3: アニュラス上の braid type

1 組みひも型 $\beta_{\frac{p}{q}}$

この組みひも型は、'88[7] に Boyland によって研究されたものであり、'94[9] に研究結果がまとめられている。q と p は互いに素な整数であるとし、$0 < p < q$ とする。このとき、組みひも型 $\beta_{\frac{p}{q}}$ を下の図 6.4の様に定義する。

例として、$\beta_{\frac{1}{3}}$ を図 6.5に示す。

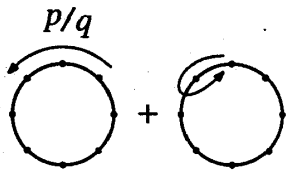


図 6.4: $\beta_{\frac{p}{q}}$：まず q本のひもを$\frac{p}{q}$回転させ、その後どれか 1 つのひも (どれでもよい) に隣のひもを回ってこさせればよい。

2 Farey interval

まず q次の Farey 数列とは、分母が q以下の分数 $(q > 0)$ を小さい順に並べたものである。例えば 5 次の Farey 数列は、次の様になる。

$$\left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right\}$$

これを用いて Farey 区間を定義する。

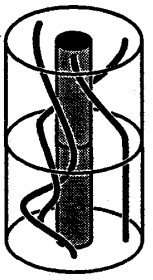


図 6.5: $\beta_{\frac{1}{3}}$

$$\frac{p}{q}\text{の Farey interval FI}\left(\frac{p}{q}\right) := \left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$$

ここで、

$$\frac{a}{b} = \max\left\{\frac{a'}{b'} \mid \frac{a'}{b'} < \frac{p}{q}, b' < q\right\},$$
$$\frac{c}{d} = \min\left\{\frac{c'}{d'} \mid \frac{c'}{d'} > \frac{p}{q}, d' < q\right\}$$

である。例えば、$\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$の Farey 区間、FI($\frac{2}{5}$),FI($\frac{3}{7}$),FI($\frac{2}{7}$) はそれぞれ次のようになる。

$$\text{FI}\left(\frac{2}{5}\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$$
$$\text{FI}\left(\frac{3}{7}\right) = \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$$
$$\text{FI}\left(\frac{2}{7}\right) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$$

また、Farey 区間を求めるアルゴリズムではないが、簡単に求める方法があるので紹介しておく。この方法は上の 3 つの例から見てとれるように、右辺の分子同士・分母同士の和がそれぞれ左辺の分子・分母になっていて、右辺を 2×2 行列のように見なして行列式を考えると、必ず-1 になっている事を利用する。

1. FI($\frac{3}{7}$) の求め方。

   まず分子の 3 を $3 = 2+1$ と分けて、対応する分母も同様に 7 を $7 = 3+4$、$7 = 2+5$、$7 = 1+6$ など分けてみる。そしてたすきがけをして、-1 になるように決める。

(a) $7=3+4$ の場合。

$[\frac{1}{3},\frac{2}{4}]$ か $[\frac{1}{4},\frac{2}{3}]$ のどちらかであるが、前者は約分できるため不合理である。後者のたすきがけは、

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

となり、これは Farey 区間ではない。

(b) $7=2+5$ の場合。

$[\frac{1}{5},\frac{2}{2}]$ か $[\frac{2}{5},\frac{1}{2}]$ のどちらかであるが、同様に前者は約分できるため不合理である。ここで後者のたすきがけは、

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

となり、$\mathrm{FI}(\frac{3}{7})=[\frac{2}{5},\frac{1}{2}]$ である。

(c) $7=1+6$ の場合もついでに見ておく。

$[\frac{1}{6},\frac{2}{1}]$ か $[\frac{2}{6},\frac{1}{1}]$ のどちらかであるが、どちらも明らかに不合理である。

2. $\mathrm{FI}(\frac{3}{8})$ の求め方。

同様に、分子は $3=2+1$ と分ければよい。分母は $8=3+5$ しか考えられない。($8=1+7$ は明らかに不合理。また $8=4+4$ も $8=2+6$ もどちらかが必ず約分できるので不合理。) よって、$[\frac{1}{5},\frac{2}{3}]$ か $[\frac{1}{3},\frac{2}{5}]$ のどちらかであるが、

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

であり、$\mathrm{FI}(\frac{3}{8})=[\frac{1}{3},\frac{2}{5}]$ と求められる。

ここで、Farey 区間を用いた組みひも型$\beta_{\frac{p}{q}}$の順序に対する定理を述べる。

Theorem 11 (Boyland,'94 [9])

$$\beta_{\frac{p_1}{q_1}} \geq \beta_{\frac{p_2}{q_2}} \Longleftrightarrow \mathrm{FI}\left(\frac{p_1}{q_1}\right) \supset \mathrm{FI}\left(\frac{p_2}{q_2}\right)$$

Example 17

$$\mathrm{FI}\left(\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{2}\right]$$
$$\mathrm{FI}\left(\frac{2}{5}\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$$
$$\mathrm{FI}\left(\frac{3}{8}\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$$

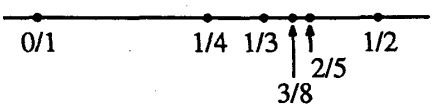


図 6.6: $\beta_{\frac{3}{8}} < \beta_{\frac{2}{5}} < \beta_{\frac{1}{3}}$

であるので、$\beta_{\frac{3}{8}} < \beta_{\frac{2}{5}} < \beta_{\frac{1}{3}}$が言える (図 6.6参照)。

Remark 10

$$h(\beta_{\frac{p}{q}}) = \log \max\{(x^b - 2)(x^d - 2) = 3 \text{ の解 }\}$$

ここで、b と d は Farey 区間の定義式の中の b と d を表す。

Example 18

$\beta_{\frac{1}{3}}$のトポロジカルエントロピーを求める。

$$\mathrm{FI}\left(\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{2}\right]$$

であるので、

$$(x-2)(x^2-2) = 3 \qquad \therefore x = -1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

よって、

$$h\left(\beta_{\frac{1}{3}}\right) = \log \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

となる。ところで、

$$h\left(\sigma_1 \sigma_2^{-1}\right) \geq \log \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

であった。これはアニュラスの外側の境界を 1 点につぶして$\beta_{\frac{1}{3}}$ をディスク上の 3 次の組みひもと見なせば、組みひも型が$\sigma_1\sigma_2^{-1}$となる事に対応している。

さて本題に戻る。アニュラス上の組みひもに固有な概念である回転数 (rotation number) について述べる。

Definition 21 (回転数)

$$A = \mathbf{S}^1 \times [0,1]$$
$$x \in A, f : A \longrightarrow A, \text{連続写像}$$

とする。極限値

$$\mathrm{rot}(x,f) = \lim_{i\to\infty} \frac{\pi(\tilde{f}^i(\tilde{x})) - \pi(\tilde{x})}{i}$$

が存在するときこの右辺をもって rot(x,f) と定義し、fによる点 x のまわりの回転数と呼ぶ。ここで、$\tilde{x}$,$\tilde{f}$ はそれぞれ covering space 上での座標、写像を表わす。

covering space とは次のような写像 p によって A と対応づけられた (つまり A を cover する) 空間 $\mathbf{R}\times[0,1]$ の事である (図 6.7参照)。

$$\begin{array}{rccccl} p: & \mathbf{R}\times[0,1] & \longrightarrow & A & & \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid & & \\ & \tilde{x} = (\tilde{\theta}, r) & \longmapsto & x & = & (\theta, r)\ ,\ \theta \equiv \tilde{\theta}(mod\ 2\pi) \end{array}$$

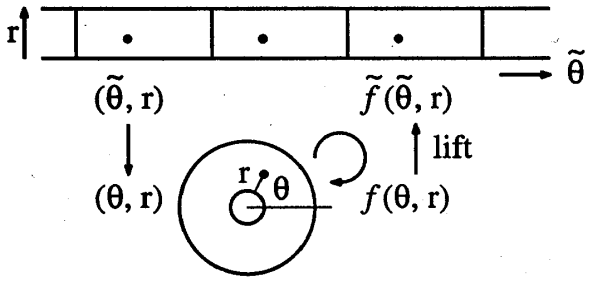


図 6.7: covering space とリフト

図 6.7は、covering space とアニュラスとの関連を示している。直観的にはアニュラスを $\theta = \mathrm{const}$ の線によって切断し、その端同士をつなげたものが covering space である。ここで 1 つのアニュラスに対応する長方形の$\tilde{\theta}$方向の長さは 1 にとっている。この時、

$$^{\exists}\tilde{f} : \mathbf{R}\times[0,1] \longrightarrow \mathbf{R}\times[0,1]$$
$$p \circ \tilde{f} = f \circ p$$

つまり、p に関して fに共役な写像$\tilde{f}$が存在する。このような性質をもつ写像$\tilde{f}$の事をリフトと呼ぶ。また写像 π は、

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbf{R}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & (\tilde{\theta}, r) & \longmapsto & \tilde{\theta} \end{array}$$

と定義される。つまり$\tilde{\theta}$への射影である。

Remark 11

ここで定義した rot(x,f) は、リフト$\tilde{f}$のもつ平行移動に対する不定性によって整数分の不定性をもつ。実際、あるリフト$\tilde{f}$に対して、

$$\tilde{f}' = \tau_1 \circ \tilde{f}$$

τ_1 : covering space 上で、$\tilde{\theta}$方向に 1 だけ平行移動するオペレーター

とすると、

$$(\tilde{f}')^2 = \tau_1 \circ \tilde{f} \circ \tau_1 \circ \tilde{f}$$

となり、$\tilde{f}'$でリフトする毎に $\mathrm{rot}(x, f)$ の定義式の分子には τ_1 が 1 つ余分に入り、回転数の値は 1 だけずれる。この任意性は、イソトピーのフルツイスト分の任意性に対応するものだが、始めに 1 つリフトを決めたらその後は変えないものとする。

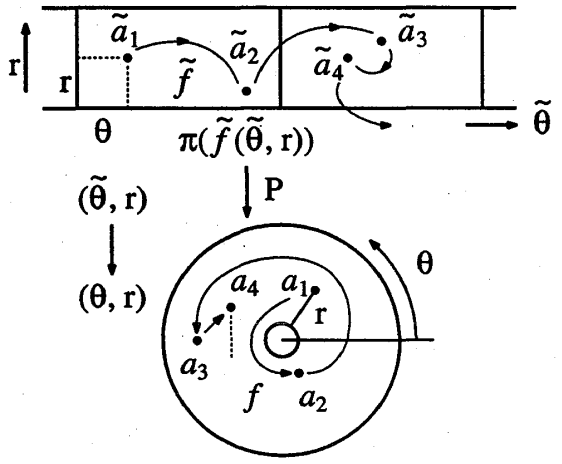


図 6.8: アニュラス上の写像 f と covering space 上のリフト $\tilde{f}$

図 6.8にアニュラス上の写像と covering space 上のリフトとの関係を具体的に示す。アニュラス上の写像 fが図 6.8の下の図のように与えられたとき、リフト $\tilde{f}$を$\tilde{\theta}$正方向に向けて最短距離でとれば、上の図のような covering space 上の写像が得られる。アニュラス上の a_1に対応する covering space 上の点は$\tilde{a}_1$であり、これらはお互い写像 p でうつりあう。また、アニュラス上で $a_2 = f(a_1)$ であるが、このときθの原点となる$\theta = \mathrm{const}$ の線を一度横切るため、covering space 上の$\tilde{a}_2 = \tilde{f}(\tilde{a}_1)$ は 1 つ隣りの長方形にうつる。以下同様にして covering space 上の点$\tilde{a}_3$,$\tilde{a}_4$,... が決められる。

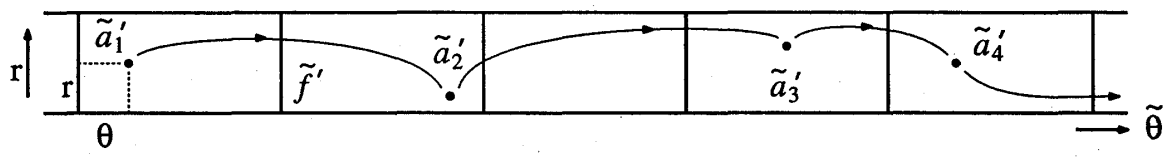


図 6.9: covering space 上のリフト $\tilde{f}' = \tau_1 \circ \tilde{f}$

一方、リフトを$\tau_1 \circ \tilde{f}$にとると、covering space 上の点は図 6.9のようにうつることになる。この時、$\mathrm{rot}(x, f)$(fは図 6.8におけるもの) が定義されている (つまり極限値が存在している) とすると、

$$\mathrm{rot}(x, \tilde{f}') = \mathrm{rot}(x, \tilde{f}) + 1$$

となるわけである。

Example 19

図 6.10のような凸テーブルΩの中でのビリヤードを考える。球は境界$\partial\Omega$で完全弾性衝突するとし、$\partial\Omega$上のある定点からはかった$\partial\Omega$に沿った長さと、その点における接線と反射方向のなす角の直積をもってアニュラス A と考える。そして$\partial\Omega$の長さは 1 に規格化しておく。すなわち、

$$A = \partial\Omega \times [0, \pi]$$

である。また$\partial\Omega$は C^2級であるとする。このとき写像

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & A \\ & \cup\!\!\!\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\!\!\!\cup \\ & (x, \varphi) & \longmapsto & (X, \Phi) \end{array}$$

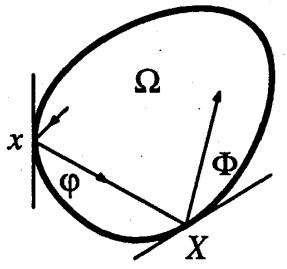


図 6.10: twist map

は保測かつ twist 写像となる。この場合の covering space は、例えば図 6.11のようになる(点は 3 周期軌道を表わす)。

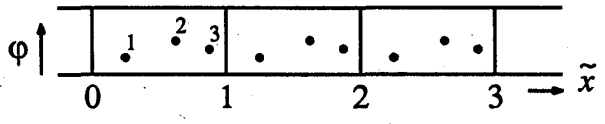


図 6.11: covering

また便宜上、

$$f(x, 0) = (x, 0)$$
$$f(x, \pi) = (x, \pi)$$

つまり、境界上では恒等写像であると定義しておく。

この写像 fに対してリフトを考える。図 6.12において $(0,0)$ から $(1, \pi)$ にむかう曲線は、線分$\tilde{x} = 0$ の$\tilde{f}$によるイメージである。これが$\tilde{x}$座標について単調増加であるということは、$\partial\Omega$上の原点から球を打ち出す場合に角度ϕを大きくしていくと、たどりつく x の値 $(mod\ 1)$ も大きくなることを示している。また、この図の場合 1 の下を通り 2 や 3 の上を通ることから、原点から 1 に打ち出したときのϕの値は実際の周期軌道のϕの値より小さく、2 や 3 に打ち出したときは大きくなることがわかる。

そしてこの場合、3 回の写像の後 covering space 上で 1 進むことになるので $\mathrm{rot}(f, x) = \frac{1}{3}$である。このようなリフトをとれば、$^\forall x$ に対して $0 \leq \mathrm{rot}(f, x) \leq 1$ となる。

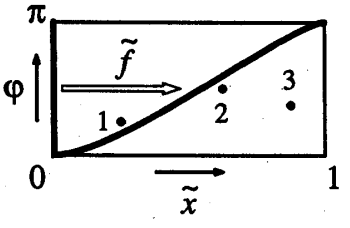


図 6.12: ビリヤードテーブル上の写像におけるリフト

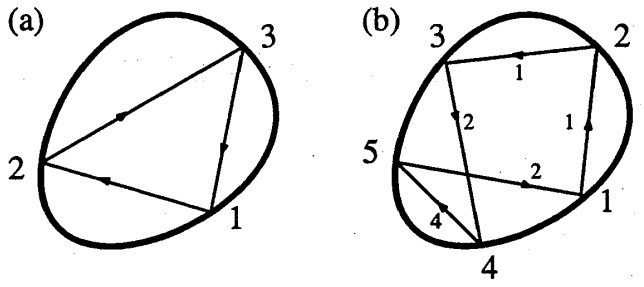


図 6.13: $\mathrm{rot}(f,x)$

図 6.13の (a) においては、3 回の写像で 2 回転することになるので、$\mathrm{rot}(f,x)=\frac{2}{3}$であるし、$(b)$ においては 5 回の写像で 2 回転するので、$\mathrm{rot}(f,x)=\frac{2}{5}$である。

次に、写像 fに対する rotation set を定義する。

Definition 22 (rotation set)

回転数 $\mathrm{rot}(f,x)$ 全体の集合

$$\mathrm{rot}(f)=\{\mathrm{rot}(f,x)\mid x\in A\}$$

を写像 fに関する rotation set と呼ぶ。このとき、もちろん $\mathrm{rot}(f,x)$ が定義されているもののみ考える。

Remark 12

この定義は、

$$\mathrm{rot}(f)=\bigcup_{x\in A}\left[\varliminf_{i\to\infty}\frac{\pi(\tilde{f}^i(\tilde{x}))-\pi(\tilde{x})}{i}\ ,\ \varlimsup_{i\to\infty}\frac{\pi(\tilde{f}^i(\tilde{x}))-\pi(\tilde{x})}{i}\right]$$

と一致する。つまり、上下からそれぞれおさえてから重ねてやるのと同じである。

rotation set については以下に挙げるような定理が知られている。

Theorem 12 (Aubry-Mather ([4] 参照))

写像 $f\ :\ A\longrightarrow A$ は保測かつ twist 写像であるとする。このとき、$\partial A\ =\ A_0\cup A_1$とかくとき (図 6.14参照)、次の 2 つが成り立つ。

1. $\mathrm{rot}(f) = [\,\mathrm{rot}(f|_{A_0})\,,\ \mathrm{rot}(f|_{A_1})\,]$

2. ${}^{\forall}\omega \in \mathrm{rot}(f)$ に対し、不変、単調、コンパクトな集合 X_ωで、

$$\mathrm{rot}(X_\omega) = \{\omega\}$$

なるものが存在する。

また、この定理を fが単射で恒等写像からの連続変形で得られるようなもの $(f \sim id)$ に拡張するとき、次の定理が証明される。

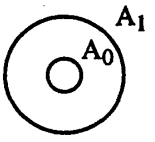


図 6.14: $\partial A = A_0 \cup A_1$

Theorem 13 (Handel,'90)

$f : A \longrightarrow A, f \sim id, 1:1$ とする。このとき、

1. $\mathrm{rot}(f)$ は閉集合。

2. 有限個のωを除いて、${}^{\forall}\omega \in \mathrm{rot}(f)$ に対し、不変、コンパクトな集合 X_ωで

$$\mathrm{rot}(X_\omega) = \{\omega\}$$

なるものが存在する。

3. ${}^{\forall}\frac{p}{q} \in \mathrm{rot}(\omega)$ に対し周期軌道γ_ωで、

$$\mathrm{rot}(\gamma_\omega) = \omega$$

となるものが存在する。

また、組みひもの rotation set に対しては次のような定理がある。

Theorem 14 (Boyland,'92 [8])

1. $\mathrm{rot}(\beta) = \frac{p}{q}$、$\beta \in \mathrm{BT}_q, p$ と qは互いに素、$\beta \neq \alpha_{\frac{p}{q}}$の時 (図 6.15参照)、

$$\beta : \mathrm{pA},\ \beta > \alpha_{\frac{p}{q}}$$

2. fが 1.の型のβ型軌道をもてば、

$$\mathrm{rot}(f) \supset \mathrm{FI}\left(\frac{p}{q}\right)$$

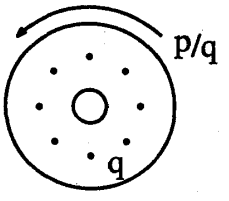


図 6.15: $\alpha_{\frac{p}{q}}$

Example 20

写像 fが$\beta = \beta_{\frac{1}{3}}$(図 6.16参照) を周期軌道としてもつ場合

$$\mathrm{rot}(f) \supset \mathrm{FI}\left(\frac{1}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

である。ここで 13(Handel) より、

$$0 \leq {}^{\forall}\frac{p}{q} \leq \frac{1}{2}, {}^{\exists}\gamma_{\frac{p}{q}} : \text{周期軌道}$$

$$\mathrm{rot}(\gamma) = \frac{p}{q}$$

なるものが存在する。

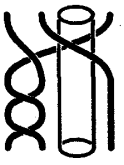


図 6.16: $\beta_{\frac{1}{3}}$

Theorem 15 (Boyland et.al.,'93)

γ：周期軌道として $\mathrm{rot}(\gamma) = 0$ であり、自明に埋め込まれていないとすると、

$$\mathrm{bt}(\gamma) \supset \mathrm{pA}$$

つまり自明には埋め込まれていないときには pA を含む。

自明に埋め込まれているとは、$A - \gamma$内の閉曲線 Cで、次をみたすものが存在するときをいう (図 6.17参照)。：

1. Cは A の中で 1 点に縮む。
2. $f \circ C$を $A - \gamma$内で連続変形して、Cにできる。

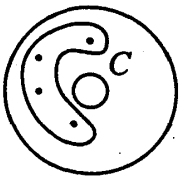


図 6.17: 自明に埋め込まれている

7　エントロピーが 0 の braid type

この節が最後の節となる。前節ではアニュラス上の組みひもを中心に議論したが、本節では再びディスクが中心となる。

エントロピーが 0 である組みひも型は有限有向グラフによる表現が可能であり、またその逆も成り立つ。このことを利用すればある力学系における不動点、周期点の組みひも型を知れば、そのトポロジカルエントロピーの議論ができる場合がある。またグラフでの表現にはある条件があり、その対偶を使うことにより見つけ残している不動点や周期点の存在を知ることができる。

Dを 2 次元ディスク、写像 $f : D \longrightarrow D$とするとき $P(n)$ を次の様に定義する。

$$P(n) := \text{写像 } f \text{による、周期が } n \text{ 以下の周期点全体}$$

Example 21

$n = 1,2$ については、

$$P(1) = \mathrm{Fix}(f)$$
$$P(2) = \mathrm{Fix}(f) \cup \text{ 2 周期点全体}$$

この $P(n)$ に関係した 1 つの定理を述べる。

Theorem 16 (松岡)

$P(n)$ の組みひも型のエントロピーが 0 ならば、$B(\tau,\phi)$ というタイプの分解が可能である。また、この逆も成り立つ。つまり、

$$h(\mathrm{bt}(P(n))) = 0 \Longleftrightarrow {}^{\exists}\tau, {}^{\exists}\phi, \mathrm{bt}(P(n)) = B(\tau, \phi)$$

τ,ϕおよび $B(\tau, \phi)$ については後で定義する。なおこの時、系全体のエントロピーはどうでもよい。

また、$P(n)$ の要素の数に対する定理も挙げておく。

Theorem 17 (松岡)

$$\#P(n) \leq 2n + 2 \Longrightarrow h(\mathrm{bt}(P(n))) = 0$$

Dがアニュラスのときは、

$$\#P(n) \leq 2n + 1 \Longrightarrow h(\mathrm{bt}(P(n))) = 0$$

なぜなら、穴を 1 つの sink と思えばいいからである。

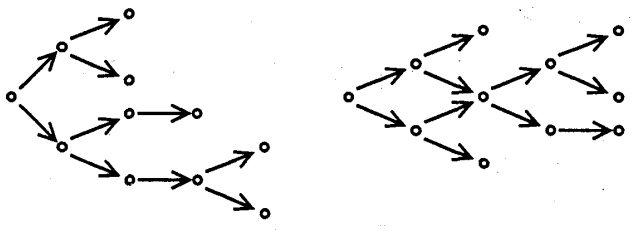


図 7.1: tree になる場合、ならない場合

$B(\tau,\phi)$ の定義に入る前に、少し数学的な準備をする。
まず、τは有向な有限グラフで連結であり、以下に挙げる条件を満たすものとする。

1. τ：tree、つまり図 7.1に示すように、ある中心からすべて外向きに出るようなグラフにできる。
2. 辺は、$\longrightarrow, \Longrightarrow$ の 2 種類。
3. 各頂点からでる辺は、$\longrightarrow, \Longrightarrow$ 共に高々1 本。

このグラフτの頂点全体の集合を $V = \{\tau$の頂点$\}$ とする。また、ϕは Vから Bへの写像 $\phi : V \longrightarrow B$である。ここで $B = \{b^i_m | m \in \mathbf{N}, i \in \mathbf{Z}\}$, $b^i_m \ni \mathrm{BT}_{m+1}$は$\frac{i}{m}$回転を行った m 本のひもを配置した組みひも型を表す。(図 7.2〜7.4にいくつかの例を示す。)

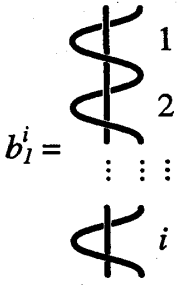


図 7.2: b^i_1の場合。これは 1 つの不動点の周りの i 回転を表わす。

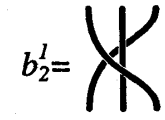


図 7.3: b^1_2の場合。1 つの不動点と、その周りの 2 つの 2 周期点を表わしている。

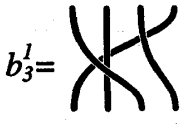


図 7.4: b^1_3の場合。同様に 1 つの不動点と、その周りの 3 つの 3 周期点を表わしている。

またϕの条件として、1 つの頂点 $(\in V)$ から$\longrightarrow$と$\Longrightarrow$の両方が出ているときには、$\longrightarrow$の前後の頂点には同じ組みひも型 $(\in B)$ が対応づけられねばならない (図 7.5 参照)。

$$v \begin{array}{l} \nearrow v' \\ \Rightarrow v'' \end{array} \Longrightarrow \phi(v) = \phi(v')$$

図 7.5: ϕの条件

これらを用いて、$B(\tau,\phi)$ の定義をする。

Definition 23 ($B(\tau,\phi)$ の定義)

有限グラフτおよび写像$\phi : V \longrightarrow B$に対して、以下の操作を繰り返して得られる組みひも型を $B(\tau,\phi)$ と定義する。

$$\begin{cases} b^i_m \Longrightarrow b^{i'}_{m'} : & b^i_m\text{の中のまわりのひもに}\, b^{i'}_{m'}\text{を埋め込む} \\ b^i_m \longrightarrow b^{i'}_{m'} : & b^i_m\text{の中の中心のひもに}\, b^{i'}_{m'}\text{を埋め込む} \end{cases}$$

Example 22

$$\begin{tikzcd} b^1_2 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr] & b^0_1 \\ & b^1_2 \arrow[r] & b^2_1 \end{tikzcd}$$

このグラフに対応する$\beta(\tau,\phi)$を図7.6 に示す。まず1番左の図はb^1_2である。その中心のひもにb^1_2を、まわりのひもにb^0_1(すなわち単なる2本のひも) をそれぞれ埋め込んだのが真ん中の図である。さらにその中心にb^2_1を埋め込んだのが右の図である。このときはじめの$\longrightarrow$の両側の組みひも型はどちらも b^1_2 であり、条件に反していないことにも注意しておく。

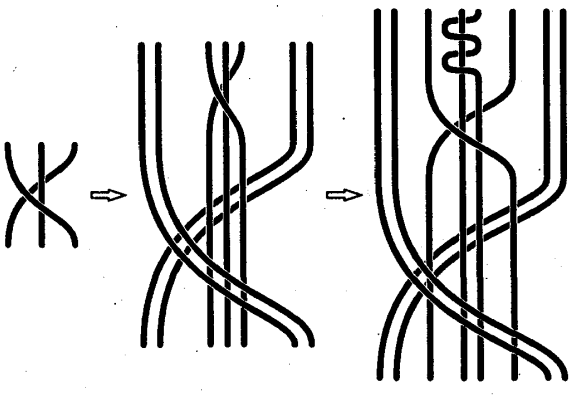
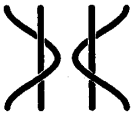


図 7.6: $B(\tau,\phi)$

Example 23



$$\begin{tikzcd} & b^{-1}_1 \\ b^0_1 \arrow[ur] \arrow[r, Rightarrow] & b^1_1 \end{tikzcd}$$

図 7.7: $\#P(1) = 4$ の組みひも型とそれに対応するグラフ

もしある写像 $f : D \longrightarrow D$が存在して、その $P(1) = \mathrm{Fix}(f)$ に対して $\mathrm{bt}(P(1))$ が図 7.7 の左の図のように与えられているとする。対応する有限グラフ $B(\tau,\phi)$ は右の図のようになり、$\longrightarrow$の前後で組みひも型が違っている。これはϕの条件を満たさないため $B(\tau,\phi)$ の表現で表わしたことにはならない。一方このとき、$\#P(1) = 4 \leq 2\times 1+2$ であり、17より $h(\mathrm{bt}(P(1))) = 0$ でなければならない。従って 16より $B(\tau,\phi)$ の表現が可能であり、有限グラフで表現できないことと矛盾する。

これは $P(1)$ の組みひも型がこのような形になることがありえないことを表わしている。言い換えれば、まだこの系に関しては $\mathrm{Fix}(f)$ をみつけ残しているという事である。またこの例から、不動点付近の flow がこのようにはならないという事もわかる。

Example 24 ($P(2) \ni {}^{\forall}x$:双曲不動点 (hyperbolic) の場合)

同様に、ある写像 $f : D \longrightarrow D$が存在して、その $P(2)$ に対する $\mathrm{bt}(P(2))$ が図 7.8の左の図のように与えられているとする。このとき、対応する有限グラフは $b_2^0 \longrightarrow b_2^1$である。(この場合 b_2^0から$\Longrightarrow$ が出ていないため、$\longrightarrow$の前後の組みひも型が違っていても問題ない) また $P(n)$ に含まれる任意の元が双曲不動点である場合は、Theorem17は書き換えられ、

図 7.8: $\#P(2) = 5$

$$\#P(n) \leq 3n + 5 \Longrightarrow h(\mathrm{bt}(P(n))) = 0$$

でよい。(明らかにこの方が条件が緩い。) この場合は$\#P(2) = 5 \leq 11$ であり、この条件を満たすため $h(\mathrm{bt}(P(2))) = 0$ である。実際、2つの2周期点は明らかに周期倍カスケードから出てきており、エントロピーが0になると考えられる。

しかし右の図のような場合には少し問題がある。このとき有限グラフは、$b_2^1 \longrightarrow b_2^0$であり、$B(\tau, \phi)$ での表現が可能であるが、$P(2)$ の組みひも型がこのような形になることは、以下に見るようにありえない。両端の2本のひもは、周期倍カスケードから生じる2周期点であると考えられ、指数は1または-1の組になっている。この場合ディスク上での写像を考えているため、指数は1にならねばならず、真ん中の3本のひもに対応する不動点の指数の和は1にならなくてはならない。従って真ん中の3本のひものさらに真ん中のひもに対応する不動点を twisted-saddle(指数 1) であると考え、その両脇の2本のひもに対応する不動点はそれぞれ saddle(指数-1)、sink(指数 1) であると考えなくてはならなくなる。しかしこのような不動点の配置に対する flow は存在しない。

A　1次元力学系

2次元力学系の周期軌道に対する諸定理は、1次元力学系の周期軌道に対するものと比較すると、いくつかの相似点がある。この Appendix では、区間 I から I への連続写像 $f : I \to I$ で表わされる1次元力学系に関して成立する定理を列挙し、2次元力学系と比較する際の目録とする。ここで扱う内容については、文献 [1] 参照。

まず、カオス研究の端緒となった Li-Yorke の定理を掲げる。Li, Yorke らは、任意の周期を持った無限個の軌道達と scrambled set と呼ばれる非加算集合の概念を用いてカオス的な力学系を特徴づけた。

Theorem 18 (Li-Yorke の定理 (1975))

f に3周期点が存在する。$\Longrightarrow$

(1) 任意の自然数 n に対し、n-周期点が存在する。

(2) 次の性質をもつ非加算集合 S が存在する：
$^\forall x \in S, {}^\forall p$: 周期点 に対し、

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \left| f^i(x) - f^i(p) \right| > 0,$$

$^\forall x, {}^\forall y \in S, x \neq y$ に対し、

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \left| f^i(x) - f^i(y) \right| > 0, \quad \underline{\lim_{i\to\infty}} \left| f^i(x) - f^i(y) \right| = 0.$$

1次元力学系が上定理中の (1), (2) をみたすとき、Li-Yorke の意味でカオス的であるという。

Li-Yorke の定理は軌道の周期性について「3周期軌道の存在は任意周期の軌道の存在を意味する」と述べている。これに対し Sharkovskii の定理ではすべての周期間に順序をつけて周期軌道の存在を議論している。

自然数全体を次の順序に並べる：

$$\begin{array}{cccccc}
3, & 5, & 7, & 9, & 11, & \ldots \\
2\cdot 3, & 2\cdot 5, & 2\cdot 7, & 2\cdot 9, & 2\cdot 11, & \ldots \\
2^2\cdot 3, & 2^2\cdot 5, & 2^2\cdot 7, & 2^2\cdot 9, & 2^2\cdot 11, & \ldots \\
2^3\cdot 3, & 2^3\cdot 5, & 2^3\cdot 7, & 2^3\cdot 9, & 2^3\cdot 11, & \ldots \\
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & 2^5, & 2^4, & 2^3, \quad 2^2, \quad 2, \quad 1.
\end{array}$$

1次元力学系の周期点達の間に上の順序関係をつけたのが Sharkovskii の定理である：

Theorem 19 (Sharkovskii の定理 (1964))

f が n-周期点をもつ $\Longrightarrow$ n の右にある $^\forall m$ に対し f は m-周期点をもつ

周期軌道の存在とトポロジカル・エントロピーに関して次の定理がある：

Theorem 20 (Bower-Franks (1976), Misiurewicz (1979))

トポロジカル・エントロピーが $h(f) > 0 \Longleftrightarrow f$ は周期が 2 のべきでない周期点をもつ

同じ周期 n をもつ周期軌道でも、n 個の点を経巡るときの行き方は何通りかある。この経巡り方をも考慮して周期軌道に順序を定めるのが、Sharkovskii の定理の精密化である。n 個の点の経巡り方は長さ n の巡回置換で表わされる。よって、写像 $f : I \to I$ の n-周期軌道は長さ n の巡回置換を定める。ロジスティック写像を例にとり、周期軌道の定める巡回置換を実際に見てみる：

Example 25

ロジスティック写像

$$f_a(x) = ax(1-x) \qquad (13)$$

の周期軌道のうち、安定な 2^n-周期軌道が定める巡回置換は：

$n = 1$	のとき	(1)
$n = 2$		(12)
$n = 3$		(1324)
$n = 4$		(15472638)
$\vdots$		$\vdots$

ただし、周期点の番号は区間 $[0, 1]$ で左から順にふった (図 A.1 参照)。

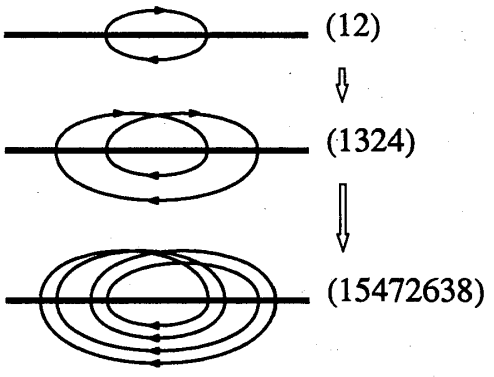


図 A.1: ロジスティック写像の安定な 2^n-周期軌道

Remark 13

次が知られている。

> 置換が (1234) である周期軌道が存在 $\Longrightarrow$ 任意の自然数 n に対し、n-周期軌道が存在

巡回置換の間に順序を定義しておく：

Definition 24 (巡回置換の順序 [5])

π, π' が巡回置換で $\pi \geq \pi' \Longleftrightarrow f$ が π 型の周期軌道をもてば π' 型の周期軌道をもつ

上の定義で順序は導入されたが、具体的に順序を決定する際には次の定理が有効である：

Theorem 21

$\{\pi' : \text{巡回置換} \mid \pi' \leq \pi\} = \{f_\pi \text{ の周期軌道の置換}\}$
ただし、写像 f_π は π が定める区分線型写像。

Example 26

長さ 5 の巡回置換 $\pi = (13452)$ に対する区分線型写像 f_π とは：

$$f_\pi(x) = \begin{cases} -2x + 1/2, & 0 \le x < 1/4, \\ 3x - 3/4, & 1/4 \le x < 1/2, \\ x + 1/4, & 1/2 \le x < 3/4, \\ -3x + 13/4, & 3/4 \le x \le 1. \end{cases}$$

すなわち、単位正方領域 I^2 内の点 $(0, 1/2)$, $(1/4, 0)$, $(1/2, 3/4)$, $(3/4, 1)$, $(1, 1/4)$ を順に直線で結んだ折れ線 $(x, f_\pi(x))$ から生成される写像（図 A.2 参照）。

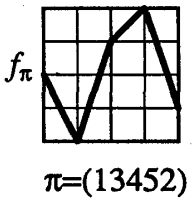


図 A.2: 区分的線型写像

Theorem21 により、区分線型写像に対する周期軌道を調べれば、巡回置換の間に順序構造がつけられることになる。

Example 27

長さ 5 の巡回置換の順序構造を例として 図 A.3 をあげておく（[1], p. 76）。

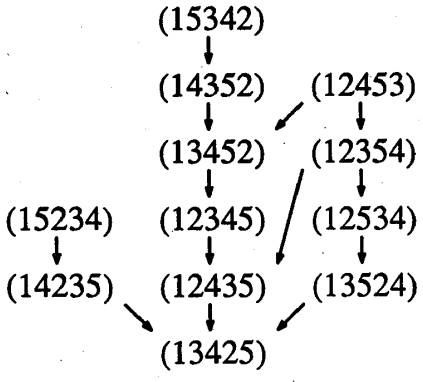


図 A.3: 長さ 5 の巡回置換の順序構造。たとえば Example26 の区分線型写像（図 A.2）は置換 (13452), (12345), (12435), (13425) に対応する周期軌道を持つ。

ロジスティック写像 (13) でパラメータ a が 3 を越えて大きくなると、周期点は周期倍分岐をくり返し、周期がもとの倍になった周期点が次々に生まれてくる。この分岐が無限回くり返されて系はカオスの構造をもつようになる。まず「無限回」くり返して分岐の起こった状態を次のように定義しておく：

Definition 25 (周期倍分岐のカスケード)

f の周期軌道の列 $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ が周期倍分岐のカスケード $\Longleftrightarrow$

(1) 周期軌道 γ_n の周期は 2^n

(2) 周期軌道 γ_n 上の各点の両側に 1 つづつ周期軌道γ_{n+1} 上の点がある

図 A.4: 周期倍分岐のカスケード。周期軌道 γ_n の両側に周期軌道 γ_{n+1} がある。

Theorem 22 (Misiurewicz, 1979)

$h(f) > 0 \Longrightarrow$ 周期倍分岐のカスケードが存在

Theorem 23 (Young, 1981: 4 節 Theorem7 に同じ)

S を写像 f の有限不変集合、π を S の置換$\Longrightarrow h(f) \geq \log\{\mathrm{M}_\pi$のスペクトル半径$\}$
ただし、M_π は f_π の構造行列。

Example 28

さきほどの例であげた区分線型写像 f_π 図 A.2 に対する構造行列は：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

参考文献

[1] L. Alseda, J. Llibre and M. Misiurewicz, *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One* (World Sci. 1993)

[2] P. Boyland, *Braid types of periodic orbits for surface homeomorphisms,* Lecture Notes (Warwick Univ. 1989)

[3] P. Boyland and T. Hall, *Dynamics of surface homeomorphisms,* (World Sci.) to appear.

[4] K. Meyer and G. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body Problem,* Appl. Math. Sci. **90** (Springer 1992)

[5] S. Baldwin, *Generalizations of a theorem of Sarkovskii on orbits of continuous real-valued functions,* Discrete Math. **67** (1987), 111-127.

[6] P. Boyland, *Braid types and a topological method of proving positive entropy,* Preprint.

[7] P. Boyland, *An analog of Sharkovskii's theorem for twist maps,* Contemp. Math. **81** (1988), 119-133.

[8] P. Boyland, *Rotation sets and monotone periodic orbits for annulus homeomorphisms,* Comment. Math. Helv. **67** (1992), 203-213.

[9] P. Boyland, *Topological methods in surface dynamics,* Topology its Appl. **58** (1994), 223-298. (この論文の参考文献リストには、100 を越える多数の関連論文が含まれている。)

[10] P. Boyland and G. Hall, *Invariant circles and the order structure of periodic orbits in monotone twist maps,* Topology **26** (1987), 21-35.

[11] J. Gambaudo, J. Guaschi and T. Hall, *Period-multiplying cascades for diffeomorphisms of the disk,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **116** (1994), 359-374.

[12] J. Guaschi, *Representations of Artin's braid groups and linking numbers of periodic orbits,* J. Knot Theory and its Ramifications **4** (1995), 197-212.

[13] T. Hall, *Weak universality in two-dimensional transitions to chaos,* Phys. Rev. Lett. **71** (1993), 58-61.

[14] T. Hall, *The creation of horseshoes,* Nonlinearity **7** (1994), 861-924.

[15] H-H Huang and B. Jiang, *Braids and periodic solutions,* Lecture Notes in Math. **1411** (Springer 1989), 107-123.

[16] T. Matsuoka, *Braids of periodic points and a 2-dimensional analogue of Sharkovskii's ordering,* World Sci. Adv. Ser. in Dynamical Systems **1** (1986), 58-72.

[17] T. Matsuoka, *The Burau representation of the braid group and the Nielsen-Thurston classification,* Contemp. Math. **152** (1993), 21-41.

[18] F. McRobie and J. Thompson, *Braids and knots in driven oscillators,* International J. Bifurcation and Chaos **3** (1993), 1343-1361.

[付記]

この講義録は 1995 年 11 月に名古屋大学で DC 向け特別講義として行われた松岡隆先生 (鳴門教育大学) の集中講義に基づいて作成されたものである。講義録の作成は名古屋大学理学部物理学科 R 研の山田裕康、今井健二、山口義幸、平田吉博が担当した。