搖動散逸定理の真空の揺らぎ項の物理的な意味

藤川和男（東大理）

搖動と散逸という概念は, 統計力学における基本的な概念であり, これらの二つは搖動散逸定理で関係づけられている. 搖動あるいはゆらぎという概念が基本的であることは、最近の分数量子 Hall 効果での 半端な電荷の測定がいわゆる"excess quantum noise" の測定に基づいていることからもわかる. すなわち電流の揺らぎ S_I と（Hall 効果の媒体がピンチされている constriction での）back flow 電流 I_B が Poisson 分布の関係 (ショットノイズ)

$$S_I = 2(\frac{e}{3})I_B \tag{1}$$

でつながっていること、およびこの公式が Nyquist の公式で記述される（平衡状態の近傍での揺らぎの）公式へ クロスオーバー する振る舞いの測定に基づいている [1].

搖動散逸定理は Einstein の Brown 運動の理論とか Nyquist の公式, さらには Planck の輻射の公式とも関係している. 具体的には, この定理は [2]

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{2}{\pi}\int [\frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}]R(\omega)d\omega \tag{2}$$

のように書かれる. ここで、 Q は力の場 (force field) であり、 $R(\omega)$ は散逸係数（あるいは、抵抗係数）である.

例えば, 真空を散逸の媒体と考えると, 振動数 ω で単振動する電荷からの双極子輻射の公式からわかるように, 輻射の強さは加速度の時間微分に比例し, 荷電粒子に働く反作用 $F = -R(\omega)\dot{x}$ で定義される散逸係数 $R(\omega)$ は ω の自乗に比例する いわゆる super-Ohmic な媒質となる. 荷電粒子に作用する力の場 Q として電場 E を取ると、その自乗は真空中の電磁場のエネルギー密度を与え, 上記の搖動散逸定理の公式は, Planck の輻射の公式そのものになる. この考察からわかるように、搖動散逸定理の公式の右辺の第一項は真空の揺らぎを与え、その物理的な意味, 特にそれが測定可能か否かは自明ではない. 例えば, 最近の mesoscopic 系における Aharonov-Bohm タイプの実験においては、真空の効果あるいは搖動の低振動数極限の振る舞いが問題になっていることからも、この種の考察が無意味では無いことが分かる [3].

以下では, Callen と Welton による搖動散逸定理の少し異なる角度からの再定式化を行い, 上記の真空の揺らぎの項は, 散逸物質中への（有効的な）振動子の自発的な放出に関係しており, 従って適当なプロセスを考えれば観測可能で

あることを示したい [4]. (線形応答理論に基づく久保流の定式化はエレガントであるが、我々の現在の目的には, それ以前の Callen と Welton による定式化が便利である.) また、この考察においては、揺動散逸定理を自発的な対称性の破れに伴う南部-Goldstone の定理と類似な解釈を行うと, 物理的な内容が明確になることを示したい.

まず次の ハミルトニアンから出発する.

$$H = H_0(q) + qQ \tag{3}$$

ここで q は我々が注目している自由度を表し, その力学は $H_0(q)$ で記述される. Q は環境系 (散逸をもたらす系) を指定する一般には複雑な (複合) 演算子である. このハミルトニアンの選択は線形応答理論からは正当化されると思われる. 変数 Q を記述する力学系, 従って 間接的に ハミルトニアン $H_0(Q)$ を指定するために, 次の思考実験を考える: 与えられた正弦的な運動をする変数 q

$$q_{ext}(t) = q_{ext}(0) \sin \omega t \tag{4}$$

を微少量 $q_{ext}(0)$ を用いて定義し, 次の相互作用 ハミルトニアン

$$H_I' = q_{ext}(t) Q \tag{5}$$

を考える. ここで, ハミルトニアン $H_0(q)$ は switch-off しておく.

Fermi の黄金律に基づく H_I' を用いた最低次の摂動計算は, Q の系の状態 $|E_n\rangle$ から出発した時には遷移確率

$$\begin{aligned} w &= \frac{\pi}{2\hbar} q_{ext}(0)^2 \{ |\langle E_n + \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n + \hbar\omega) \\ &\quad + |\langle E_n - \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n - \hbar\omega) \} \end{aligned} \tag{6}$$

を与える. ここで $\rho(E_n)$ は Q の系のエネルギー $E = E_n$ での状態密度である. 系 Q によるエネルギーの吸収率は, この遷移確率の二つの項 (吸収項と放出項) の差に $\hbar\omega$ を乗じて得られる.

$$\begin{aligned} &\frac{\pi\omega}{2} q_{ext}(0)^2 \{ |\langle E_n + \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n + \hbar\omega) \\ &\quad - |\langle E_n - \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n - \hbar\omega) \} \end{aligned} \tag{7}$$

従って環境系が温度 T にあるときの単位時間当りのエネルギー吸収は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} &\frac{\pi\omega}{2} q_{ext}(0)^2 \sum_n \{ |\langle E_n + \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n + \hbar\omega) \\ &\quad - |\langle E_n - \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n - \hbar\omega) \} f(E_n) \end{aligned} \tag{8}$$

ここで, $f(E_n)$ は規格化された Boltzmann 因子であり, $f(E_n+\hbar\omega)/f(E_n)=\exp(-\hbar\omega/kT)$ を満たす.

この最後の散逸の表式は次のようにも書ける.

$$\begin{aligned} Power &= \frac{\pi\omega}{2}q_{ext}(0)^2\omega\int_0^\infty dE\rho(E)f(E)\{|\langle E+\hbar\omega|Q|E\rangle|^2\rho(E+\hbar\omega) \\ &\quad -|\langle E-\hbar\omega|Q|E\rangle|^2\rho(E-\hbar\omega)\} \\ &= \frac{\pi\omega}{2}q_{ext}(0)^2\omega(1-e^{-\hbar\omega/kT}) \\ &\quad \times\int_0^\infty dE\{|\langle E+\hbar\omega|Q|E\rangle|^2\rho(E+\hbar\omega)\rho(E)f(E)\} \end{aligned} \tag{9}$$

ここで 積分変数をずらした後に $|\langle E_n-\hbar\omega|Q|E_n\rangle|=|\langle E_n|Q|E_n-\hbar\omega\rangle|$ および $f(E+\hbar\omega)/f(E)=e^{-\hbar\omega/kT}$ を用いた.

他方, 与えられた正弦的な運動 $q_{ext}(t)$ によって 散逸（９）が誘起されるということは、現象論的な摩擦力 (反作用) が逆に変数 $q_{ext}(t)$ に働いていることを示唆している

$$F=-R(\omega)\dot{q}_{ext}(t) \tag{10}$$

ここで $R(\omega)$ は振動数 ω の正弦的な運動にたいする散逸係数（摩擦）を表す. われわれは、反作用力（１０）を作り出す微視的なメカニズムをここでは問わないことにする。この現象論的な摩擦によるエネルギーの散逸は

$$\begin{aligned} Energy\ \ dissipation\ \ &/\ \ unit\ \ time \\ &= -\overline{F\dot{q}_{ext}(t)} \\ &= R(\omega)\overline{\dot{q}_{ext}(t)^2}=\frac{\omega^2}{2}R(\omega)q_{ext}(0)^2 \end{aligned} \tag{11}$$

により与えられる. ただし、上に引いた棒線は時間平均を表す.

この現象論的なエネルギーの散逸の式をミクロな表式（９）と同一視することにより

$$R(\omega)=\frac{\pi}{\omega}(1-e^{-\hbar\omega/kT})\int_0^\infty|\langle E+\hbar\omega|Q|E\rangle|^2\rho(E+\hbar\omega)\rho(E)f(E)dE \tag{12}$$

が得られる. この表式はそれぞれの ω にたいして成立する" 揺動散逸定理の局所化版" を与える.

この式（１２）から次の二つの基本的な関係式

$$\frac{2}{\pi}\frac{\hbar\omega}{2}\left[1+\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right]R(\omega)=\hbar\int_0^\infty dE\,\rho(E)f(E)\rho(E+\hbar\omega)|\langle E+\hbar\omega|Q|E\rangle|^2 \tag{13}$$

および

$$\frac{2}{\pi}\frac{\hbar\omega}{2}\left[\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right]R(\omega)=\hbar\int_0^{\infty}dE\,\rho(E)f(E)\rho(E-\hbar\omega)|\langle E-\hbar\omega|Q|E\rangle|^2 \quad (14)$$

が導かれる. ただし $\beta=1/kT$ である.

これらの表式（１３）と（１４）は、もし $R(\omega)$ の温度依存性が考えている温度領域では無視できるとすると, 実に注目すべき内容をもっている：これらの式の右辺では最低次の摂動計算を Fermi の黄金律を用いて行った. 他方,（１３）の左辺は第二量子化された（有効的な）振動子の媒質中への自発的放出と誘導放出を表し,（１４）の左辺は標準的な（誘導）吸収を表している. しかも、これらの 有効的な振動子のスペクトルは散逸係数 $R(\omega)$ で特徴づけられる. 換言すれば、ゼロでない散逸係数 $R(\omega)$ が存在することは必然的に $R(\omega)$ により特徴づけられる（有効的な）振動子が媒質中に存在することになる. これらの（有効的な）振動子は有限温度では真空の揺らぎと熱的な揺らぎを持ち,このことを表現するのが（２）の揺動散逸定理である. これらの性質は, 連続的対称性が自発的に破れた時には必然的に質量ゼロの粒子（振動子）が現れるという Nambu- Goldstone の定理を想起させ, その類似物と見なされる [4].

これらの表式はまた, Feynman と Vernon および Caldeira と Leggett[5] による散逸媒体を無限個の振動子で近似するという考えを、実際に振動子を導入せずに表現していることにもなっている. 上記の表式は詳細つりあい（detailed balance）をみたしている. 無限個の振動子を, 手で入れずに基本的な原理から上式で導いたことは、真空の揺らぎの項の物理的な意味といった微妙な問題を議論するときには, 理論的な基礎がより明確になると思われる.

まず上記の二つの表式（１３）と（１４）を足して２で割り ω に関して積分すると通常の揺動散逸定理（２）が得られる. 特に（１３）の第一項の自発的な放出に対応する項は,（２）の真空の揺らぎの項を与える. 次に,（１３）および（１４）の表式と因果律あるいは分散関係式（dispersion relation）を組み合わせることにより、 Caldeira-Leggett の模型を用いた摩擦のあるトンネル効果の公式を導くことができる [4]. 特に, 温度ゼロの極限では（１３）の第一項の媒質中への（有効的な）振動子の自発的な放出の項のみが効き,Ohmic な摩擦によるトンネル効果の抑制の効果を出す. すなわち、現在の context では揺動散逸定理（２）の真空の揺らぎの項は原理的に測定可能であり、物理的に意味のある効果を産み出すことが結論される.

次に, 揺動散逸定理の原型である（１３）と（１４）式の Fermion 的な摩擦および揺らぎへの一般化を議論したい [4]. Grassmann 数を用いた注意深い

考察を行うと,

$$\frac{2}{\pi}\frac{\hbar\omega}{2}[1-\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}+1}]R_f(\omega) \;=\; \hbar\int_0^\infty dE\,\rho(E)f(E)\rho(E+\hbar\omega)|\langle E+\hbar\omega|Q^\dagger|E\rangle|^2 \tag{15}$$

$$\frac{2}{\pi}\frac{\hbar\omega}{2}[\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}+1}]R_f(\omega) \;=\; \hbar\int_0^\infty dE\,\rho(E)f(E)\rho(E-\hbar\omega)|\langle E+\hbar\omega|Q|E\rangle|^2 \tag{16}$$

が得られる. (15) の左辺は Fermion 的な（有効）振動子の自発的な放出と誘導放出（むしろ抑制）を表しており、二つの項の相対的なマイナス符合は Pauli の排他律を正しく表現している. （１６）の左辺は Fermion 的な振動子の（誘導）吸収を表している.

搖動散逸定理は

$$\frac{1}{2}\langle Q^\dagger Q - QQ^\dagger\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega\; E_f(\omega,T)\;[\frac{R_f(\omega)-\bar{R}_f(-\omega)}{2}], \tag{17}$$

の形に書かれる. ここで、

$$E_f(\omega,T) = -\frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}+1}. \tag{18}$$

を定義した. Fermion 的な演算子 Q が非エルミート的であることに伴って二種類現れることになる Fermion 的な散逸係数 $R_f(\omega)$ および $\bar{R}_f(-\omega)$ の符合は、$R_f(\omega)\geq 0$ および $\bar{R}_f(-\omega)\geq 0$ となるように選んだ. 物性系では Fermion である電子が主役であるが, 一般に測定される量が Bose 的な電流とか電圧なので Fermion 的な散逸とか搖動散逸定理は過去において議論されてこなかったが、将来純粋に量子論的な概念である Fermion 的な搖動とか散逸が測定され議論されることが期待される.

最後に, 分数量子 Hall 効果における anyonic な統計との関連で言えば, そのような統計を明確に取り入れた搖動散逸定理を書くことができ, またそれに基づいて anyonic な統計が実際に測定できれたとすれば非常におもしろいと思われる. われわれは現在のところそのような例への定理の一般化に成功していない.

References

[1] L. Saminadayer et al., Phys. Rev. Lett. **79**(1997)2526.
R. de-Picciotto et al., Nature **389**(1997)162.

[2] H. B. Callen and T. A. Welton, Phys. Rev. **83**, (1951) 34.

[3] R.A. Webb and also Y. Imry, Talks given at ISQM-98, Hatoyama, Saitama, August, 1998.

[4] K. Fujikawa, Phys. Rev. **E57**(1998)5023.
K. Fujikawa and H. Terashima, Phys. Rev. **E58**(1998)7063.

[5] R. P. Feynman and F. L. Vernon, Ann. of Phys.(N.Y.)**24** (1963) 118.
A.O. Caldeira and A.J. Leggett, Ann. of Phys. (N.Y.) , **149** (1983) 374.