

Macroscopic nature of Glass and FDT

東京大学 総合文化研究科 松尾美希¹

系に対して微小摂動を加えた時の系の状態の無限小変化は、系のゆらぎと密接に関係している、...、それが揺動散逸定理 (fluctuation dissipation theorem: FDT) の主張である。揺動散逸定理は系の巨視的変数のゆらぎに対する安定性の仮定のみから導き出され、極めて単純でありながら重要で神秘性すら感じられる性質である。なぜ重要か、ゆらぎとはその定義から系の詳細からセパレートした量なので、その大きさは巨視的にのみ決定される²。これがもし揺動散逸定理によって応答と重なるならば、系が摂動に対してどのように振舞うかは巨視的にのみ決定されることにほかならない。これは熱力学の仮説群の一つである揺動散逸定理はゆらぎを持つ系が熱力学的に振舞うに必要な一つの性質である

筆者が揺動散逸から話を始めたのはそれが「記憶」と密接に関わるからである。「記憶」現象は本研究会の主題である非平衡研究において、重要な概念として認識されているものの一つであるが、このような記憶現象は生物・無生物の文脈に限らず現れ、そのなかでも Glass 系は最もシンプルでかつ典型である。我々は今のところこのような記憶概念を形式化させるような体系を保有していない。筆者は記憶系を体系化する上で揺動散逸定理を離れなければならないと考えている。

ここで Glass の持つ履歴依存性について 2 つのタイプに分類したい。一つは弱い履歴依存性で、Glass の形成されたときの情報のみを記憶している³。もう一つは強い履歴依存性で、ガラス状態となって以降の情報も記憶の対象とする⁴。Glass の定義は長時間極限でも有限の相関 $\langle A(t)A(t') \rangle \sim q$ が残ることで定義され、これは初期状態をおよそ $q/\langle A^2 \rangle$ 覚えていることを意味する。(ここで $\langle A^2 \rangle$ は摂動に共役な熱力学変数の初期状態でのゆらぎである。) すなわち Glass はその定義からすでに弱い履歴依存性を満たしている。しかし強い履歴依存性はそうではない。この状態に対し微小摂動を加えた場合の応答は、もし揺動散逸が適用されるならば、Fisher relation

$$R \sim \langle A^2 \rangle - q \quad (1)$$

で応答する。さらに time translational invariance (TTI) を仮定するならば $\langle A^2 \rangle$ は plateau 状態での値に置き換えてよい⁵。 q 値が履歴依存性を完全にコードしていると考えると論理的な破綻を引

¹ E-mail: miki@jiro.c.u-tokyo.ac.jp

² Onsager の再帰仮説、平衡では臨界点近傍でなければ成立する。

³ Leutheusser, Götze のモデル、関本の構成方程式 (2000 年日本物理学会秋の分科会口頭) に相当。

⁴ 強い履歴依存性と弱い履歴依存性が必然的結び付きを持つか否かは不明な所である。近似として弱い履歴依存性のみを考える場合が多く、日常レベルではそれほど悪くはない。Fictive 変数による大雑把な記述の成功がその近似の保証人である。

⁵ Aging 現象を認知しているならば、揺動散逸はともかく TTI を仮定するのは奇異に思われるかも知れないが、再び我々の日常スケールでの近似としては悪くない。

き起こすので、これは q の補正がつく程度で、完全に熱力学的に振舞うことを意味する⁶。よって揺動散逸に寄って立つ場合、長時間極限での有限の相関が発生することと強い履歴依存性が発生することとは関係ない。こうして我々が強い履歴依存性を記述しようとするならば、我々は揺動散逸を離れなくてはならない。

揺動散逸定理を離れる上で踏まえなくてはならないのは、先に述べたとおり揺動散逸はゆらぎに対する安定性の単純な帰結だということである。我々は Glass が安定な存在であることを専門家でなくとも重々承知している⁷。よって Glass に対して揺動散逸が存在しないと主張するのは非常に危険極まりない。しかし揺動散逸を気にしていればいつまでも熱力学を離れられない⁸。こうしてジレンマに陥るわけだが、うまい具合に、安定性を保持しつつ揺動散逸を離れ、かつ現象論を構成する方法が存在する。揺動散逸を満たす裸の応答 $R \equiv \delta A / \delta h$ に対し、粗視化したよりマクロな応答

$$R'_h(t, t') = \frac{1}{\Delta h} \int_h^{h+\Delta h} dh R_h(t, t') \quad (2)$$

を定義する。ここで R' は揺動散逸を満たす必要はない。そのかわり粗視化 scale Δh に依存するのでは現象論の構成は不可能である。しかし幸運なことに、微視的スケール $\Delta h \sim l$ 以外に、 Δh に依存しない universal region が Glass ではどうやら存在するようである。それぞれの領域に対して R が揺動散逸を満たす一方で、 R' が揺動散逸を満たさないようになっている。これを直接に解釈するならば、Glass はゆらぎに対してはあくまで安定である。しかし巨視的スケールに対して十分小さくとも、ゆらぎに対して十分大きい摂動に対しては系は不安定で状態を保つことができない。この不安定性を介して履歴依存性が引き起こされる⁹。universal region の存在は非自明で不可解なものであるが、これまで全く理論にならなかった履歴依存を現象論のレベルで構成するための糸口になるのではないだろうか。

60年代の mode coupling theory (MCT) による動的臨界現象の解明には、幾分か揺動散逸定理の存在に寄っている。動的臨界状態は十分平衡状態に近いのでこの仮定は妥当である。一方、Glass は平衡から離れた系であり、揺動散逸定理の存在は保証されない。Leutheusser の Glass モデルは60年代 MCT の直接適用であるために、揺動散逸定理+相関のみで閉じた方程式系となっている。これは動的臨界現象の意味での相関の異常性を越えて、Glass 的な異常性までが MCT で記述できることを示したという意味で重要な仕事であるが、Glass の真の意味での巨視的性質すなわち状態の強い記憶能力はこれで解明されたとは言えない。これまで見て来たとおり、Glass の持つ記憶媒体としての性質は揺動散逸が破壊されてこそ起こり得るのである。

⁶ 操作をあくまで一変数のみの循環操作にした場合、履歴依存があるならば新しい q は前の q よりも大きい小さいかである。さらに循環操作を加えていくとさらに q は増えるか減るかだが (Weak Ergodicity)、 q は定義から $0 \leq q \leq \langle A^2 \rangle$ なので、いつか定常値に落ちる。すなわち、何回も繰り返せば可逆操作が実現する。しかし数値実験による結果は否。

⁷ Glass は何百年のスケールで見れば不安定な存在であり、中世ステンドグラスの白化現象は特に有名である。しかし熱力学系であっても何百年のスケールで見れば不安定なものは数ある (いわゆる準安定状態)。白化現象をもって Glass を非熱力学系とみるのは misleading である。

⁸ ここで使っている熱力学は平衡熱力学だけでなく、定常状態熱力学を含む熱力学体系全般である。変分原理によって大域的安定性を仮定するので記憶系とは相性が悪い (のではないか)。

⁹ この言明は Prigogine を想起させるが、単純な分岐に基づく記憶描像は universal region の存在を見出せないので現象論の構成ができない。大野は「多重安定性、ヒステリシスの理解はあまり斬新なアイデアを要求しない」と述べているが、Glass はこの主張に入らないはずだ。現象論の構成可能性がその分かれ目となる。