

# ノイマンの経済成長モデルについて<sup>1</sup>

## — 森嶋通夫の貢献の紹介と生態系への応用の試み —

東京大学 総合文化研究科 安富 歩<sup>2</sup>

### 1 はじめに

ノイマン・ヤーノシュ(John von Neumann)は1927年に経済成長を論じるためのモデルを提唱した[11]。その基本的特徴は、(1)企業ではなく生産過程を利潤率計算の単位とすること、(2)結合生産の導入、(3)不等式の使用、(4)価格と活動水準が相互に調整しあう「二重交差調整 dual cross adjustment」と呼ばれる機構を含むこと、(5)生産にタイムラグのあること、という諸点にある。このモデルはその後、主として森嶋通夫によって様々の方向に拡張された。本稿ではその概略を説明し、生態系への応用の可能性を論じる。

### 2 ノイマン・モデル

本節では主として森嶋[2, 4]に依拠し、ノイマン・モデルとは如何なるものかを概説する。

いまここに財が  $n$  種類あるとする。また経済には  $m$  種類の生産過程がある。生産過程とは何らかの財を投入して、別の財に変化させる方法のことであり、たとえば、

(卵 1, フライパン 1, ガスコンロ 1, 塩少々, コショウ少々, 労働 3 分)  
→ (目玉焼 1, 少し古くなったフライパン 1, 少し古くなったガスコンロ 1)

などのことである。企業の生産過程全体ではなく、より細かい過程を単位生産過程とするのがノイマン・モデルの特徴である。

ノイマンは全ての生産過程が同じ時間で完結すると過程する。勿論、一般に生産過程ごとの生産時間は互いに異なっている。目玉焼は3分でできるが、コンソメスープなら5時間かかる、という具合である。この問題を回避するためにノイマンは、経済に存在する全生産過程の生産時間の最小公約数を単位時間とし、全ての生産過程を単位時間の過程にまで分割する。たとえば単位時間が3分であるなら、1時間かかる生産過程は20個の過程に分割される。こうすることで、生産の同期化の問題を解決するのがノイマンのアイデア(1)である。

<sup>1</sup> 本稿作成にあたっては、池上高志氏(東京大学)、時田恵一郎氏(大阪大学)、巖佐庸氏(九州大学)より貴重なコメントを頂いた。

<sup>2</sup> E-mail: yasutomi@ask.c.u-tokyo.ac.jp

また、上の目玉焼の生産過程においては、産出の側に複数の財が現われているが、これは上述の「(2) 結合生産を許す」というアイデアの反映である。こうすることで、減価償却問題を回避するのが狙いである。上の例では、目玉焼と一緒に古くなったフライパンとガスコンロが産出されるフライパン・ガスコンロとは別の財として扱われる。

第1番目の生産過程では、第1財を  $a_{11}$  単位、第2財を  $a_{12}$  単位、… 第  $n$  財を  $a_{1n}$  単位使用して、第1財、…、第  $n$  財を  $b_{11}$  単位、 $b_{12}$  単位、…、 $b_{1n}$  単位それぞれ生産する。ある財 ( $k$ ) がこの過程に投入されないなら、 $a_{1k} = 0$  であり、この財が産出されないなら  $b_{1k} = 0$  となる。第2～第  $m$  番目の過程についても同様であり、一般に、第  $l$  番目の過程について、

$$(a_{l1}, \dots, a_{ln}) \rightarrow (b_{l1}, \dots, b_{ln}),$$

と表記される。行列の形にまとめて書けば、投入行列  $A$ 、産出行列を  $B$  として、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ および } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

と書くことができる。各財の価格を、

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$$

各生産過程の活動水準を、

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$$

とあらわす。

経済全体における各財の投入量は、

$$qA = \left( \sum_{i=1}^m q_i a_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^m q_i a_{in} \right),$$

各財の産出量は、

$$qB = \left( \sum_{i=1}^m q_i b_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^m q_i b_{in} \right),$$

となる。このとき注意すべきは、ある期に利用可能な財はその前の期に産出されたものに限られる点である。これは上述の「(5) 生産にタイムラグがある」という設定を反映する。それゆえ需給関係は、前期の各財の産出量と今期の各財の投入量の大小によって決まる。それゆえ、期を表現するように活動水準  $q$  と価格  $q$  を  $q(t)$  および  $p(t)$  と書く。ここに需給関係は「(3) 不等式の使用」というアイデアに従って、

$$q(t)B \geq q(t+1)A, \quad (1)$$

と表現される。尚、生産技術は不変とするので、行列  $A, B$  は変化しない。

価格関係は、各生産過程の利潤率を  $\pi_i^*(t)$ ，そのうち最大のものを  $\pi(t)$  とする。

$$\pi_i(t) = \frac{\{\sum_{j=1}^n b_{ij}p_j(t+1) - \sum_{j=1}^n a_{ij}p_j(t)\}}{\sum_{j=1}^n a_{ij}p_j(t)}$$

であるから、これら  $m$  個の利潤率のうち最大のもの  $\pi(t)$  は、

$$\pi(t) \geq \frac{\{\sum_{j=1}^n b_{ij}p_j(t+1) - \sum_{j=1}^n a_{ij}p_j(t)\}}{\sum_{j=1}^n a_{ij}p_j(t)}$$

を満たす。ここに、 $\beta(t) = 1 + \pi(t)$  と書けば、

$$Bp(t+1) \leq \beta(t)Ap(t), \quad (2)$$

となる。

上述 (4) の「二重交差調整」のアイデアにより、全ての財は価格関係によって需給関係が調節され、需給関係によって価格関係が調節されることになるが、これは具体的に自由財ルールと利潤性ルールと呼ばれる二つのルールによって表現される。

自由財ルール 超過供給→価格下落→需要増大→…→均衡価格 という調整が行なわれるが、はなはだしく超過供給がある場合には、価格はゼロとなる。価格がゼロの財は自由財と呼ばれる。均衡において式 (1) が  $>$  で維持されている財は自由財となるので価格はゼロである。よって、

$$q(t)Bp(t+1) = q(t+1)Ap(t+1). \quad (3)$$

利潤性ルール ある過程  $i$  の利潤率  $\pi_i(t)$  が最大利潤率  $\pi(t)$  より低ければ、企業家はそのような過程の操業をやめて最大利潤率に等しい利潤率を享受できる過程にシフトするので、式 (3) を均衡において  $<$  で満たす過程の操業度  $q_i(t)$  はゼロになる。よって、

$$q(t)Bp(t+1) = \beta(t)q(t)Ap(t). \quad (4)$$

ノイマンはこのような四本の式で表現される体系を考え、経済成長を論じた。尚、このモデルでは、労働力は移民等の手段により、その需要量に柔軟に対応して増減すると仮定する。それゆえ労働力の価格は一定であり、需給関係はモデルに表われない。

ノイマンがこの体系について論じた問題は、

各生産過程の活動水準がある時期から次の時期への一斉に同じ比率で拡大（あるいは縮小）するような長期均衡経路が存在するや否や、

というものである。この場合、成長率を  $\alpha$  として、 $q(t+1) = \alpha q(t)$  であるから、

$$x_i(t) = \frac{q_i}{\sum q_i(t)}$$

とすれば、

$$x(t+1) = x(t) = \text{一定},$$

である。ゆえに  $t$  を外して  $x$  と表記する。また、価格も一定となるので相対価格を、

$$y_j = \frac{p_j(t)}{\sum p_j(t)},$$

と書ける。価格が一定であるから、利潤率も一定であり、 $\pi(t)$  および  $\beta(t)$  はそれぞれ  $\pi$ ,  $\beta$  となる。長期均衡経路上のノイマン体系は、

$$xB \geq \alpha xA, \quad (5)$$

$$By \leq \beta By, \quad (6)$$

$$xB y = \alpha xA y, \quad (7)$$

$$xB y = \beta xA y, \quad (8)$$

と表現される。

ノイマンは、

$$A \geq 0, B \geq 0, \quad (9)$$

$$A + B > 0 \quad (10)$$

という仮定の下で上の体系に長期均衡過程の存在することを証明した。

しかし仮定 (10) の経済的意味は「如何なる過程においてもあらゆる財が産出か投入かのどちらかにあらわれる」ということであり、これはあまりにも強い仮定である。たとえばコンピュータの生産過程において、納豆は投入にも産出にもあらわれない。また、ノイマンは経済活動が有意義かどうかを示す、

$$xB y > 0, \quad (11)$$

という条件が満たされるかどうかを無視している。もしこの条件が破られると、全ての財が産出されないか価格がゼロかのどちらか、ということになる。

これらの問題を回避するために、ケメニー、モルゲンステルン、トンプソンはその共同論文 [1] において、条件 (11) を追加した上に、ノイマンの仮定 (10) を放棄して、

$$\begin{aligned} & A \text{ を構成するどの行ベクトルをとっても,} \\ & \text{それらはプラスの値の要素を少なくとも一つ持っている,} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & B \text{ を構成するどの列ベクトルをとっても,} \\ & \text{それらはプラスの値の要素を少なくとも一つ持っている,} \end{aligned} \quad (13)$$

という二つの仮定に置き換えた。前者は「どの生産過程も何らかの財を使用する」、後者は「どの財も少なくとも一つの生産過程によって産出される」ということを意味する。言うまでもなくこれらは経済的に意味がある。彼等はこの体系においてノイマン型長期均衡の存在することを証明した。

### 3 森嶋通夫による発展

森嶋通夫はノイマン・モデルを基礎に、経済学の様々のモデルをこのプラットフォームの上に再構築した。ノイマンの論文は十数頁に過ぎないが、森嶋はノイマン型のモデルについて少なくとも7冊の書物と膨大な数の論文を書いている。そこでは様々な問題が議論されているが、その主要論点のいくつかを下に列挙する。

森嶋はまずノイマンのモデルをより経済らしくするための改訂に取り組んだ。ノイマン・モデルは労働者や資本家の存在をほとんど考慮しておらず、所得はすべて資本家に帰属し、資本家はそれを自動的に投資することになっている。そこで各生産過程の投入に物的な財のみならず、労働も含まれるように改訂し、さらに労働者と資本家の消費を明示的に導入した。この他に労働者や資本家の貯蓄性向を導入したモデルを構築し、これらのモデルにおけるノイマン長期均衡経路の存在を証明している。[2]

森嶋は同様のモデルについて、労働の需要に対応するものとして、労働の供給を決定する人口成長率が実質賃金率の函数となっている場合の賃金率の決定問題を考察した。後にこれはマルクスの産業予備軍論の定式化に用いられ、「失業を伴った均衡」という概念へと発展した。[2, 9]

森嶋はノイマン長期均衡経路が経済発展の実際の経路のモデルとするにはあまりに非現実的であると批判し、より現実的な経路としてヒックス流の一時均衡の系列を導入した。すなわち、第 $t$ 期において第 $t+1$ 期の価格を予想する方法をモデルに加えることで、所与の初期状態からの発展経路を論じることが可能となる。このタイプのモデルを駆使し、多部門モデルにおける最適成長経路やターンパイク定理の再定式化に成功した。[4]

1960年代に森嶋はマルクスの『資本論』に取り組み、その成長モデルの数理モデルへの移植を行なった。この過程でマルクスのモデルが価値と価格の二つの集計方法を持つシステムであることを指摘し、有名なマルクスの基本定理（搾取なければ利潤なし）の証明に成功した。この定理では、ある経済について価格体系における利潤率が正となるのは、価値体系における搾取率が正である場合、その場合に限られることが示される。[5]

森嶋が最初にマルクスの基本定理を証明したモデルは等式体系であり、別に構築した不等式によるマルクス＝ノイマン・モデルではこの基本定理が成立しないとしていた。しかし後にこのモデルにおいても、ノイマン経路における価格と価値について考えるなら、この定理の維持しうることを証明した。[9]

次に森嶋はワルラスの『純粹経済学要論』の成長モデルを題材とし、そのノイマン・モデルへの移植を行なった。そのモデルにおいて経済学説史上の利子理論を統一的に定式化し、その相互関係を解明した。また、ケインズ型投資函数の導入によって非自発的失業の問題を方程式（不等式）体系の過剰決定問題として定式化し、セー法則と不完全雇用の関係を明らかにした。[6]

更にリカード『経済学および課税の原理』のモデルのノイマン・モデルへの移植を行ない、瞬間生産と有時間生産の並存する経済モデルを構築した。このモデルにより、マルクスの基本定理がより一般的な場合に成立することを示し、またリカード成長論の本質を明らかにした。[7]

こういった古典派経済学者の書物との対話の末に、森嶋は新しい一般均衡論の構築に着手し、そ

ここでは瞬間生産と有時間生産が並存し、しかも有時間生産のうち自己資本部分と他人資本部分に分割され、更に他人資本部分に対応する金融市場モデルを構成し、生産部門と金融部門を利子率を通じて合体させたモデルを構築した。このモデルにより、企業家を支援する銀行家を含むようなシュムペータ流のノイマン型一般均衡理論が定式化された。[8]

ノイマン・モデルは1950年代～60年代に盛んに議論されたが、やがて経済学の主流からは忘れられていった。森嶋通夫の一連の研究はその偉大な例外である。忘れられた理由は不明と言わざるを得ない。多部門成長モデルを主張するイギリスのケンブリッジ学派と、1部門あるいは2部門成長モデルを愛好するアメリカの経済学者との間で論争が行なわれ、理論的には前者が勝利したとされる（ケンブリッジ・ケンブリッジ資本論争）。ところが敗者のモデルがその後の主流となったという経緯があり、この事情とノイマン・モデルの衰退は無関係ではなからう。

森嶋によれば、経済全体をモデル化し、そのモデルの性質を様々な方面から検討する一般均衡論の手法は、リカード以来経済学の巨匠達によって採用された伝統的なものである、という。これらは人工世界を構築してその運動を考察する最近のコンピュータ・シミュレーションによる生命や社会の研究の先駆と考えることができる。ワルラス、マルクス、マーシャル、ヒックス、シュムペータらの主要著作はその代表的な例である。森嶋の一般均衡論はノイマン流の定式化とヒックス流の一時均衡の系列という枠組を駆使し、主要な経済学者の議論を一度解体し、その要素を独自の枠組で再構成しつつ新たな問題に挑むという性質のものであった。

しかしこのような一般均衡論の伝統は現在ではほぼ途絶えている。森嶋通夫の著作はこの伝統の最後を飾るものと言うことができる。クラシック音楽の世界ではハイドンの出現以降に交響曲が隆盛し、20世紀に衰退したが、その最後を飾る巨匠がショスタコービッチであった。ショスタコービッチの特徴のひとつは音楽史上の様々な要素を現代的な手法によって交響曲という枠組のなかに統合する点にあった（諸井[10]）。一般均衡論の伝統の最後を飾る巨匠と言ふべき森嶋通夫が同様の特徴を持っていることは興味深い。

#### 4 数理生物学への応用の可能性

ノイマン・モデルは抽象的で単純なものであり、一定の変更を加えれば生態系や生命のモデルに変換できる可能性がある。そのために一つの例を示そう。ここでは個体数動学に定番のキツネとウサギの個体数変動を考える。ウサギには無制限の食糧が存在し、一定時間毎に個体数が一定比率で増大し、キツネはウサギを補食できなければ一定比率で減少し、ウサギを補食できれば一定比率で増加するものとする。ノイマン流に表現すれば、

$$\begin{aligned} (\text{キツネ}, \text{ウサギ}) &\rightarrow (\text{キツネ増加}, \text{ウサギ減少}) \\ (\text{キツネのみ}) &\rightarrow (\text{キツネ減少}) \\ (\text{ウサギ}) &\rightarrow (\text{ウサギ増加}) \end{aligned}$$

となる。より具体的にはたとえば、

$$(\text{キツネ } 1.0, \text{ウサギ } 4.0) \rightarrow (\text{キツネ } 1.2, \text{ウサギ } 0.0)$$

(キツネ 1.0) → (キツネ 0.8)

(ウサギ 1.0) → (ウサギ 2.0)

とする。

第  $t$  期のキツネとウサギの個体数  $(x(t), y(t))$  が与えられた場合、

$$z = \log \frac{x}{4y},$$

とし、

$$\xi = 0.5 + \frac{\tanh(\alpha z)}{2},$$

を考える。キツネの個体数  $x(t)$  に  $\xi$  を掛けた値が第 1 番目の生産過程の、 $1 - \xi$  を掛けた値が第 2 番目の生産過程の活動水準になるとしよう。その意味は、キツネ一匹当りのウサギの個体数が少ないと、多くのキツネは補食できずに徐々に死亡し（第 2 の生産過程）、逆にウサギが多くなると繁殖するものが多くなる（第 1 の生産過程）、ということである。3 番目の生産過程の活動水準は  $y(t) - 4\xi x(t)$  とする。これは、第 1 番目の生産過程でキツネに補食されなかったウサギのみが繁殖する、ということの意味する。

このシステムの運動はパラメータ  $\alpha$  によって変化し、たとえば  $\alpha = 1$  は定常解、 $\alpha = 3$  は周期解（周期 2）、 $\alpha = 6$  は周期解（周期 4）、 $\alpha = 5$  はカオスとなる（図 1）。このダイナミクスのパラメータ  $\alpha$  への依存の様相は図 2 に表示されている。

著者は今のところウサギとキツネの場合しか調査しえていないが、ノイマン・モデルのメリットは、この場合ではあまり発揮されていない。その特徴を発揮させる一つの方法は、選択を受ける単位が「種」ではなく「プロセス」となっている問題を考えることである。たとえばランダムな「プロセス」のスープを考え、そこから閉じた再生産ループたる「種」が如何に生成するか、という問題である。あるいはその再生産ループが、ある生産過程の於いて別のループと相互作用するようになった場合の変化を考える問題も興味深い。

また、生物相互の関係だけではなく、それをとりまく物質との相互関係が明示的にはいない問題も相応しい。その例として次のような問題が考えられる。ここで、密閉された硝子の容器のなかに水・空気・土・水草・魚・プランクトンを封じ込めたものを考えよう。そこにはたとえば、

水草, 二酸化炭素, 有機物 → 水草の増加, 酸素

水草 → 水草の減少

魚, 酸素, プランクトン → 魚の増加, 二酸化炭素, 有機物

魚 → 魚の減少

バクテリア, 有機物 → 増加したバクテリア, 有機物

バクテリア → バクテリアの減少

プランクトン, 二酸化炭素 → プランクトンの増加, 酸素

プランクトン → プランクトンの減少

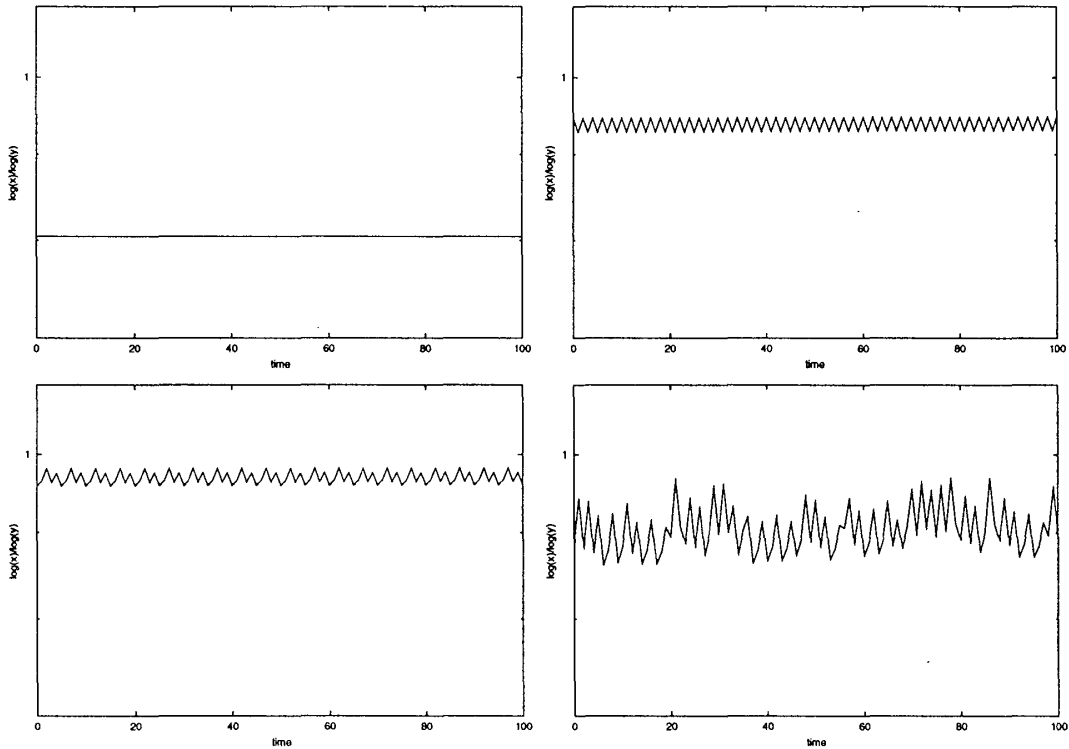


図 1: キツネ (x) とウサギ (y) の個体数の比率の変動 ( $\log(x)/\log(y)$  を表示). 左上が  $\alpha=1$ , 右上が  $\alpha=3$ , 左下が  $\alpha=6$ , 右下が  $\alpha=9$  の場合.

という八つの「生産過程」が見られる. それぞれの生産過程の「活動水準」はそのまま解釈できる.

問題は生物の個体数から各生産過程の活動水準をどのように決定するかである. ひとつの方法は上のウサギ-キツネ問題で試みたような方法で, 必要な投入物とその生産過程を主催する生物との比率によって, それぞれ増加・減少をもたらす生産過程に振り分ける方法である. しかしこれにこだわる必要はなく, 何らかの方法で (個体数)  $\rightarrow$  (活動水準) を決めるための合理的で現実の特徴を反映する方法を導入すれば良い.

このようにして問題を定式化できれば, この生物と物質を含んだ閉じた生態系がどのような条件の下でノイマン均衡経路を実現しうるか, あるいは生態系全体として長期的にどのような振舞を見せるか, を考えることができる. 手頃な問題として, いわゆるデイジー・ワールドのようなものを構築して, ガイア理論のミニマムなモデルを作ることもできよう.

また個体数があまりにも小さくなった生物を排除することで, 実行不可能となる生産過程の出る場合の生態系全体への影響を議論することも可能である. 更には, ある条件下で生産過程に変異を加えて新たな生産過程が次々に導入されるような, 新種の出現する超長期的な生態系の進化ダイナミクスを論じるためのプラットフォームとすることもできる.



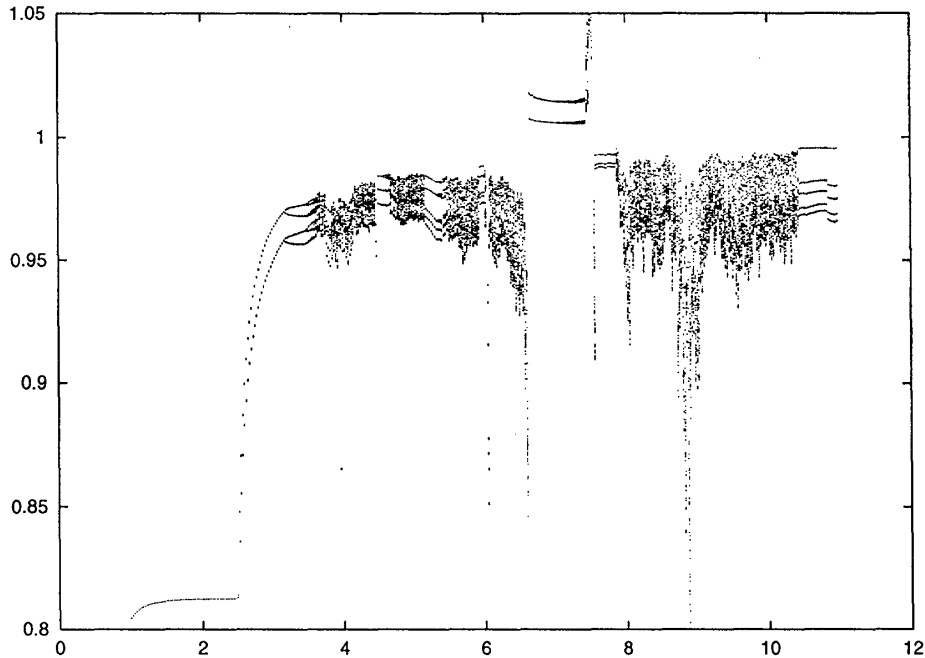


図 2: キツネ ( $x$ ) とウサギ ( $y$ ) の個体数の比率の変動 ( $\log(x)/\log(y)$  を表示) の  $\alpha$  への依存.

更に現代的意義が高い問題は、人間の経済活動と生態系の関係を論じることである。このタイプのモデルで経済過程と生態系を共に表現することに成功すれば、今度は、双方の運動を容易に連結することができる。ノイマン・モデルは恐らく、この目的のために利用しうる最も単純な枠組であろう。

## 5 おわりに

これまで論じたように、ノイマン・モデルは様々な拡張の可能性を持っている。著者自身、このモデルの可能性の発掘を開始したばかりであり、それがどのような意義と限界を持つか明瞭には理解していない。経済や生態系に関心のある数理科学者に関心を持っていただき、共に考えていただければと願っている。<sup>3</sup>

<sup>3</sup> ノイマン・モデルを発展させてきた森嶋通夫の著作のほとんどが日本語で書かれるか、日本語に翻訳されている。現時点で翻訳のない森嶋 [3, 4] も、岩波書店が現在企画中の森嶋通夫著作集のなかで翻訳されることが決まっている。

## 参考文献

- [1] Kemmeny, John G., Osker Morgenstern and Gerald L. Thompson, "A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy", *Econometrica*, Vol. 24, 1956, pp.115-135.
- [2] 森嶋通夫,「均衡成長の多部門理論 —ノイマン理論の学説史的発展—」, 森嶋他編,「新しい経済分析」, 1960年, 3-60頁.
- [3] Morishima Michio, 1964, *Equilibrium, Stability and Growth*, Clarendon Press, Oxford.
- [4] Morishima Michio, *Theory of Economic Growth*, Second impression, Oxford University Press, 1970.
- [5] Morishima Michio, 1973, *Marx's Economics*, Cambridge University Press. (森嶋通夫「マルクスの経済学」高須賀義博訳、東洋経済新報社、1974年。)
- [6] Morishima Michio, 1977, *Walras' Economics*, Cambridge University Press. (森嶋通夫「ワルラスの経済学」西村和雄訳、東洋経済新報社1983年。)
- [7] Morishima Michio, 1989, *Ricardo's Economics*, Cambridge University Press. (森嶋通夫「リカードの経済学」高増明・堂目卓生・吉田雅明訳、東洋経済新報社1991年。)
- [8] Morishima Michio, *Capital and Credit — A new formulation of general equilibrium theory*, Cambridge University Press, (森嶋通夫「新しい一般均衡論 — 資本と信用の経済学」安富歩訳, 創文社1994年。)
- [9] Morishima Michio and Catephores, G. 1978, *Value, Exploitation and Growth*, McGraw-Hill(UK). (森嶋通夫・カテフォレス「価値・搾取・成長」高須賀義博・池尾和人訳、創文社1980年。)
- [10] 諸井誠,「交響曲名曲名盤100」, 音楽之友社, 1979年.
- [11] von Neumann, John, "A Model of General Economic Equilibrium", *Review of Economic Studies*, Vol. 31, 1945-6, pp.1-9.