

## 博士論文解説

# 鉛直方向に加振した粉粒体薄層のパターン形成<sup>1</sup>

## Pattern formation of thin granular layer due to vertical vibration

東京農工大学工学研究科電子情報工学専攻 佐野研究室

鵜川 亜希子 (Akiko Ugawa)

(2003年4月15日受理)

第1章 序論	406
1.1 粉粒体とは	406
1.2 粉粒体の社会的需要	407
1.3 粉粒体の歴史的背景	407
1.4 粉粒体の振る舞い	408
1.4.1 静止した砂	408
1.4.2 流動化	410
1.4.3 加振による粉粒体の振る舞い	410
1.5 粉粒体薄層上におけるパターン形成 - 本研究の位置づけ -	413
第2章 目的	416
第3章 粉粒体の鉛直加振によるパターン形成	417
3.1 実験	417
3.2 粉粒体表面に出現する平面パターン	418
3.3 パターン分岐ダイアグラム	418
3.4 議論	422
3.5 第3章のまとめ	425

<sup>1</sup>本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

<b>第4章</b>	<b>鉛直に加振した粉粒体薄層における定在波断面</b>	<b>426</b>
4.1	目的	426
4.2	実験	426
4.3	結果	426
4.3.1	出現するパターン	426
4.3.2	ripple patterns の時間変化	427
4.3.3	分散関係	429
4.3.4	ripple patterns の始まり、波長の層厚依存性	430
4.3.5	議論	431
4.3.6	第4章のまとめ	433
<b>第5章</b>	<b>鉛直に加振した粉粒体薄層の座屈と曲げ波</b>	<b>434</b>
5.1	目的	434
5.2	実験	434
5.3	結果	435
5.3.1	出現するパターンのモード分類	435
5.3.2	undulation の時間変化	435
5.4	議論	439
5.4.1	粉粒体薄層上に生じる曲げ波と弾性板の曲げ波	439
5.4.2	undulation モードの外部振動条件依存性：底面からの力積と鉛直方向の散逸	442
5.4.3	undulation モードの外部振動条件依存性：アスペクト比と伝播速度	444
5.4.4	第5章のまとめ	445
<b>第6章</b>	<b>まとめと展望</b>	<b>447</b>

# 第1章 序論

## 1.1 粉粒体とは

砂、胡麻、ガラスビーズ等に代表される粉粒体の振る舞いの解明は、多くの化学プラントや製造工業における反応・製造過程や充填・輸送過程、あるいは地滑り・雪崩、液状化などの自然災害に現れる重要な課題であるが、固体とも液体とも異なる複雑な挙動を示すために、基礎的・系統的な研究はまだ十分とは言えない。

粉粒体とは通常、工学の分野では粒径  $10\mu\text{m}$  から数 mm 程度の粒子を指すが、物理分野では、集団サイズ  $\gg$  粒子サイズの巨視的な粒子からなる集団を指すのが普通である。このため、粉粒体の物理法則は、砂から小惑星群における個々の惑星の巨視的な運動にいたるまで適用され、対象となるものの大きさは  $10^{-3}\sim 10^6\text{mm}$  と少なくとも 9 桁に及ぶ。マクロな粒子から構成される集団なので、排除体積効果(斥力)が最も重要なファクターとなり、また内部自由度が大きく、摩擦や変形によるエネルギー散逸を伴っている。そのため、比熱や熱揺らぎが無視でき、気体のように激しく飛び回っている粉粒体集団があったとしても、通常の温度の概念は役には立たず、Brown 運動の影響は無視できる。例えば、大きさの異なる粒子の集団を混ぜようとして揺さぶると、偏析 (segregation) が起こり、粒子の大きさの違いによって分離してしまう。粒子間の引力がないことを考慮するとこの分離は一見、混合してエントロピーを増大させる熱力学第二法則と矛盾しているように思われるが、粉粒体では  $kT \simeq 0\text{J}^{-1}$  であるため動的な効果がエントロピーの効果をしので重要になる [1]。また、排除体積効果と摩擦による準平衡状態のため履歴が効く。

粒状体が示す複雑な挙動については古くから着目され、惑星・地球科学、化学工学、機械工学、土壌科学、土木工学、薬学、そして物理の分野において、さまざまな角度から研究が行われているがまだはっきりしたことは何一つ分かっていない。

そこで、本論文では、粉粒体について以下のように定義する。

- 1) 有限な大きさを持つ古典粒子からなる高数密度の集団
- 2) 粒子集団サイズ  $\gg$  粒子サイズ
- 3) 粒子間相互作用は非凝集的であり、非弾性衝突や摩擦などのエネルギー散逸を伴う

---

<sup>1</sup>直径  $d = 1\text{mm}$ 、密度  $\rho = 2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  とすると、重力加速度  $g$  の地上では粒子一個分の位置エネルギーは  $mgd = \pi\rho g d^4/6 \sim 10^{-8}\text{J}$  と見積もれる。室温での内部エネルギー  $10^{-21}\text{J}$  程度の  $10^{13}$  倍も大きい。

## 1.2 粉粒体の社会的需要

以下のデータは文献 [2] によるものである。

粉粒体物質は我々にとって日常的な物質であり、工業現場でもさまざまな粉粒体物質を頻繁に用いている。全世界で毎年生産されているさまざまな種類の粒子やその集合体は膨大なもので、おおよそ 100 億トンにも達する。セメントをはじめこの種の物質の加工に費やされているエネルギーは地球上で生産されている全てのエネルギーの約 10 %にもおよぶ。また、軽化学薬品合成や製薬産業においても粉粒体物質は一般的に扱われる。化粧品や薬剤の粉末は、しばしば高温や低温の焼結、接着、押し出し成形のような工程を経て出来ている。このような工程の物理はよく分かっていないが、多くの応用物理の実験室がこれらに大きな実際の利益のからむ問題を解くことに奮闘している。例えば、高速列車の電気モータのような最新の高性能用途の磁石の製造では、大きさが  $20\mu\text{m}$  から  $50\mu\text{m}$  の希土類化合物の粉の焼結が用いられている。

粉粒体物質を取り扱うための工業技術には、多くの工程が関わっている。まず、鉍石や砂、砂利などを採取するための浚渫、次は破碎で引き続き分離工程が来る。これら一連の技術は全て低付加価値材料に共通のものであり、19 世紀以前から技術開発が行われている。しかし、これらは原材料の価格が全体の 85% にも達しようとするので、これを改善しようとする努力はすすまなかった。他方、高付加価値材料を扱う分野、例えば高性能磁性材料、製薬製造や高強度コンクリート製造など、では洗練した技術が求められている。以上のように、粉粒体物質は我々の生活において、人間活動の中において水の次に重要性を持ち、非常に大きな経済効果をもたらすと言える。

## 1.3 粉粒体の歴史的背景

以下に、粉粒体の歴史的背景について、[2] の資料をもとに紹介する。この日常的に存在するが特異な振る舞いをする粉粒体の物理学に対する関心は、おおよそ 300 年前から始まる。粉粒体粒子について言及している記録は、古代ローマの詩人であり自然哲学者であるルクレティウス (Lucretius、紀元前 98-55 頃) に始まり、ルネサンス期にはレオナルド・ダ・ヴィンチらは砂山について研究をしている。しかし、粉粒体の物理学が確固とした基礎の上におかれたのは、18 世紀の終わりになってからであった。クーロン (Charles de Coulomb, 1736-1806) が土手の釣り合いや、石の建造物やその他大建造物の安定性について多くの実験を行い、「建設に関連する釣り合いのいくつかの問題に応用される最大と最小の法則についての小論」を書いたのが初めである。その後、1780 年にクラドニ (Ernest Chladni, 1756-1827) は、軽い粉末 (馬のたてがみから取られた毛) の振る舞いとそれより粗く重い粉粒体 (砂など) との振る舞いに多くの違いがあることに気づき、その後クラドニの相補図形として知られる成果を出すことになる。また、サバル (Felix Savart, 1791-1841) はクラドニの相補図形を用いて、音波の振動数

と波長を研究した。他方、ファラデー (Michael Faraday, 1791-1867) は、中央を固定した板の一端をバイオリンの弓で振動させ、その上に置いた粉粒体の作るパターンを観測した [3]。このパターンは水面波を振動させたときに現れるパターンに似ていて、粉粒体の不安定性の問題であり、こんにちでも未解決である。また、当時日本で初めて“粉体”という言葉を導入したのは寺田寅彦である [4]。

ランキン (William Rankine, 1820-1872) は、1857年に粉粒体物質における摩擦の影響の理論的考察をおこなった。彼は、クーロンの概念から出発して多くの原理を確立し、ランキンの受動および主動状態 (passive and active states) と呼ばれるものを定義し、今日でも正しいと認められている。また、サイロに蓄えられた粉粒体物質中の釣り合いの力の分布は、多くの研究者によって調べられ、現在も盛んに研究されている。20世紀に入り、バグノルド (Ralph A. Bagnold) は多くの重要な観察を行い、砂漠の砂の本 [5] を書き、その頃から、この分野の多くの科学の出版物が出され、世の中に少しずつ広まるようになってきた。しかし、あまりにも複雑な挙動を示すためなかなか統一的な結論には至らず物理の分野での研究は休止したように思われた。

しかし1980年代に入り、バック (P. Bak) らの提唱した概念、自然界には特に外部パラメタを臨界点に調整しなくても系が自ら臨界状態に発展していくような現象が多数存在する、という自己組織化臨界現象 (self-organized criticality) の具体例として、大小の雪崩を繰り返すことで臨界傾斜角度を保ちながら成長する砂山が取り上げられた [6]。その後の研究で、砂山の雪崩は自己組織化臨界現象の例として適さないことが明かとなった [7] が、彼らの論文をきっかけに再び粉粒体の振る舞いが注目を集めることになった。

## 1.4 粉粒体の振る舞い

### 1.4.1 静止した砂

静止した状態においても、粉粒体は複雑な振る舞いを示す。例えば、粉粒体を十分高く積み上げることを考える。通常の液体であれば、各位置での圧力は、それより上方にある液体の量に比例して大きくなるが、粉粒体の場合、圧力は高さに依存せず最大値に達する。これは、粉粒間の接触力と側壁との摩擦によって、残りの重量を支えているからである。粉粒体間の相互作用は直接接しあっている時のみ可能であり、粉粒体内部での力の伝搬も、直接接しあっている粒子間のみで行われる。もし、積み上げた粉粒体が全て同じ大きさを持つ球形の剛体粒子から構成され、結晶構造で配置されていたとすれば力の伝搬は均一に行われる。しかし、実際の粉粒体では大きさにばらつきがあり、またランダムに詰め込まれていることが通常である。そのような不均一さが存在すると、粒子間の摩擦や弾性変形による質量中心の変位などによる非線形相互作用によって、それらは増幅され、結局ごく一部の粒子集団に応力が集中することに

なる。図 1.1(a) は 3 次元に並んだ粒子の応力分布を表している。これより、応力は不均一に分布し、鎖状の領域に応力集中が起きていることがわかる。また、積み上げた粉粒体内部の力の分布について詳しく調べたものが図 1-(b) である。球を積み上げた円筒容器の底にカーボン紙を敷き、紙の上に残された跡の面積から個々の粒子に働く力を測定したもので、力の分布は  $c$ 、 $f_0$  を定数として  $P(f) = c \exp(-f/f_0)$  で表せられる。力のゆらぎは大きく、平均値そのものと同程度である。このような振る舞いは、格子状に分布した粒子がその質量を不均一かつランダムに下の層の粒子に分配するというモデルを用いて説明される [8]。

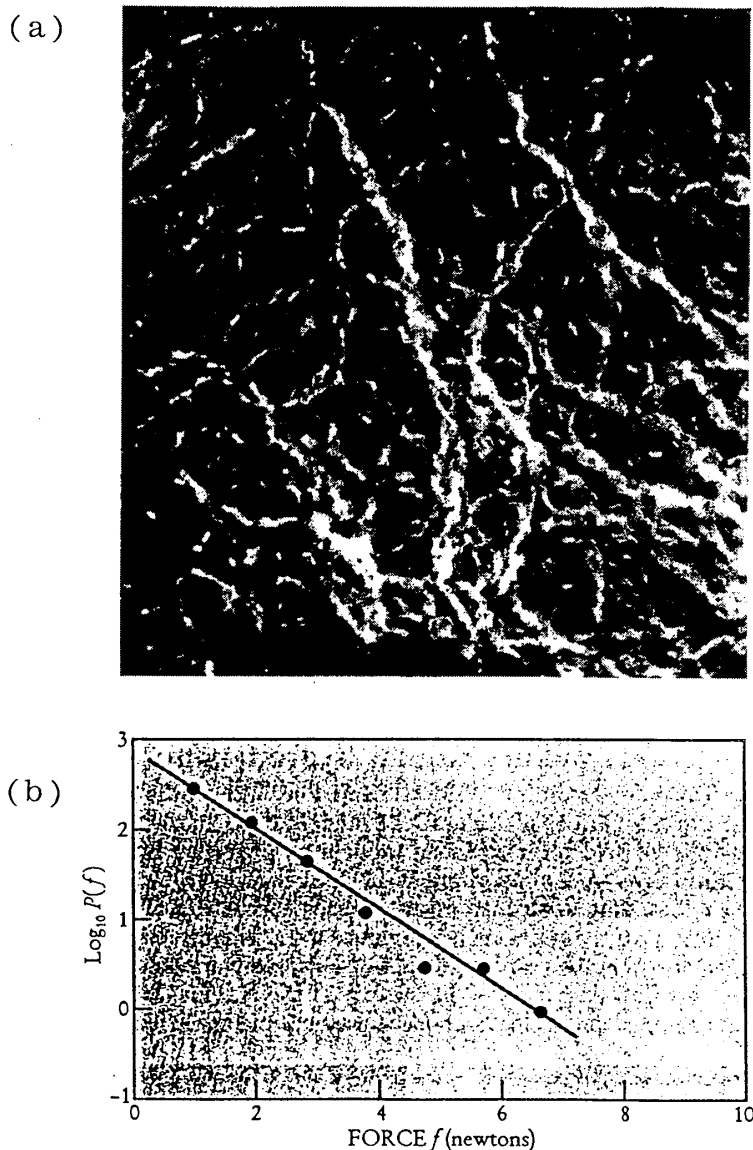


図 1.1: (a) ガラスと同じ屈折率にした水とグリセリンの混合液にパイレックス球を浸し、球の間に生じる力をみたもの。角度をつけた円偏光子を挟むことにより 3 次元的な集団を観測している。(b) 球が充填された円筒容器の底にカーボン紙を敷き、上から力を加える測定した実験。力の分布  $P(f)$  は力の増加に伴い指数関数的に減少する。曲線  $P(f) = c \exp(-f/f_0)$  で近似できる。 [8]

### 1.4.2 流動化

外から振動が加えられない限り粉粒体の山は静止を続ける。また多少であれば、傾けたり、揺すったり等の刺激を加えても、粉粒体の山は静止したままである。しかし、十分に大きな角度で傾けたり、振動を加えると雪崩や流動化が生じ、通常の固体や液体、気体の性質とは異なった振る舞いをする。つまり、粉粒体に変化するのには「十分」な振動を加える必要があり、しきい値や非線形、履歴効果などが問題となる。また、この系では粒子間の衝突におけるエネルギー散逸が大きいので、常に外部から仕事を与え続けなければ流動は止まってしまい、また仮に流動の起こる条件下でも系全体が一樣な平衡状態になることは考えにくい。また、乾燥した粉粒体の流れには、ナビエ-ストークスの方程式は適用されず、粉粒体をどのように励起するかで、液体・気体・固体のいずれと同様に振る舞うかが決まる。

ここでは、一例として十分に大きな角度で傾けられた粉粒体の自由表面の動的性質について述べる。砂山の雪崩に関する研究は、クーロンが最初である。18世紀に彼は当時の要塞建築の責任者をつとめ、傾斜角についてはじめて定量的に調べた。それによると、砂山の傾斜角 $\theta$ が少なくとも $\theta_m = \tan^{-1}(\mu_s)$ にならない限り隣り合う粉粒体の2層が互いにすべりあうことはない。なお、 $\mu_s$ は粉粒体層間の摩擦を特徴づける係数であり、個々の粉粒体間の摩擦とは異なる。しかし、一般に傾斜角 $\theta$ は砂山の雪崩が停止した後に残る角度である安息角 $\theta_r$ と雪崩が発生する角度 $\theta_m$ とも異なり、この二つの角度との関係は明らかにされなかった。

ここで、簡単な実験例を挙げてこの関係について説明する [2]。両端に透明な窓のある円筒形容器に半分細かい砂を詰める。次に図 1.2 のように、この円筒容器を水平にして対称軸の周りに回転させる。一秒間に 0.01 回転程度の非常にゆっくりとした速度で回転させると、砂の表面は水平線にたいして $\theta$ の角度を保つ。これを傾斜角と呼ぶ。しかし、よく調べてみると、この角度は始動角 (angle of movement) $\theta_m$  と呼ばれる特徴的角度まで増加し、その角度で小さな雪崩 (avalanche) が起こり、 $\theta$ は、 $\theta_m$  から、安息角 (angle of repose) $\theta_r$  と呼ばれるより小さい値へと戻っていく。両者の差 $\delta = \theta_m - \theta_r$ は緩和角 (relaxation angle) と呼ばれ、その値は乾いた粉粒体でおおよそ $2^\circ$ である。つまり、砂山は始動角と安息角間の任意の角度で静止状態をとることができ、その不安定性をもった角度を傾斜角と呼ぶ。

このような、雪崩を特徴づける巨視的な物理量がどのような物理的機構で決まるのかが粉粒体斜面流の最大の関心事であるが、いまだに未解決となっている。また、粉粒体の流動化は常に斜面付近だけで起こり、砂山内部は固体的状態のままである。このような、静止層と流動層の境界がいつ、どこで現れるかという問題も重要な未解決問題である。

### 1.4.3 加振による粉粒体の振る舞い

粉粒体を容器に入れて振動させることによっても流動化は生じる。ここでは、比較的厚い層

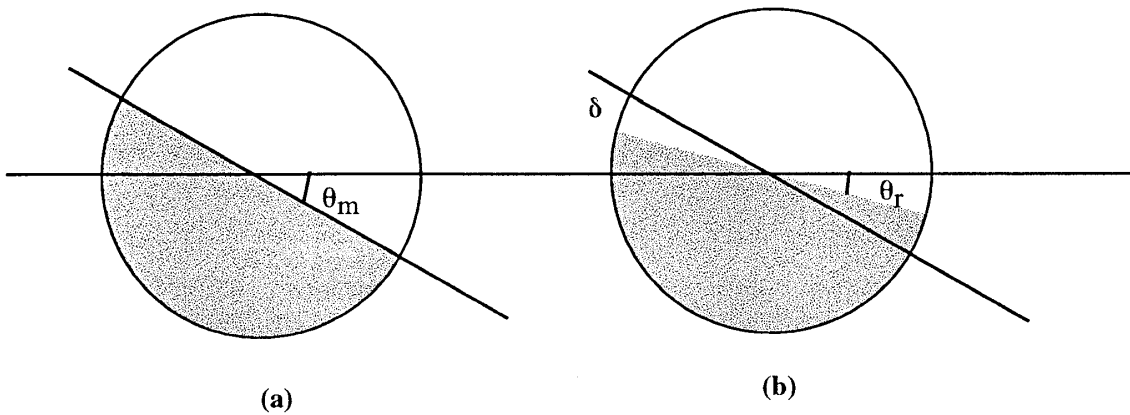


図 1.2: 始動角  $\theta_m$  と安息角  $\theta_r$  の定義 [2]。

両者の差  $\delta = \theta_m - \theta_r$  は緩和角と呼ばれ、その値はおよそ  $2^\circ$  である。

(a) 緩和直前の始動角、(b) 緩和後の安息角

を持った粉粒体層を鉛直方向に振動させたときに出現する対流について述べる。粉粒体層を容器ごと剛体的に  $z = a \sin(2\pi ft)$  で鉛直に振動させると、外部加振加速度  $a(2\pi f)^2$  と重力加速度  $g$  の比  $\Gamma = a(2\pi f)^2/g$  (これは、加速度振幅と呼ばれている。) が 1 より大きくなったときに動き始め、層内部に流動化を引き起こす。図 1.3 は層内に動きが生じる振動数  $f$  と振幅  $a$  を示したもので臨界値は  $\Gamma_c \approx 1.01 \pm 0.03$  である。 $\Gamma_c \approx 1$  の関係は、粒子の種類 (粒径  $d$ 、形) によらず成り立つことが確認されている [9]。

さらに加振の加速度を増加させていくと対流が発生する [10]。振動層の対流について提唱されているメカニズムを紹介する。まず、対流が発生する要因として第 1 に取り上げられたのは、容器の側壁と粉粒体の摩擦である。例えば数値計算 [11] では側壁の摩擦がゼロになると対流が逆転することが示され、また実験 [12] においても側壁を外側に傾けると対流の向きが逆転することが示された。第 2 に取り上げられたのは、対流や小山の形成に対する粉粒体層内部の空気の影響である。この空気による効果は、容器と側壁の摩擦の影響を小さくすると顕著に現れる。パック (H. K. Pak) らは狭い隙間を持つ同心二重円筒に粉粒体 (金属の球や楕円体、粗い砂や滑らかな砂、ガラス球) を入れ加振する実験を行い、自由表面で表面波が重力に逆らって上昇することを示した [13]。加振した際に現れる粉粒体の対流がつくる小山 (heap) は、空気、ヘリウムガス、プロパンガスのいずれに対しても 10 torr まで減圧しても持続されるが、それ以下に下げると小山の高さは小さくなり、圧力 1 torr 以下で小山は消える。つまり、対流が引き起こす小山の形成は粉粒体を囲む気体の粘性ではなく、容器と粉粒層の間の気体の流れが要因となっていることが明らかになった。ただし、これは直径 1 mm 以下の粒子の場合に適用され、振幅が大きくなるに従いその流れの効果は顕著になる。また、これらの対流現象は、粒子衝突時に粘弾性相互作用を考慮した離散要素法 [14] による数値計算でも再現されている [15]。



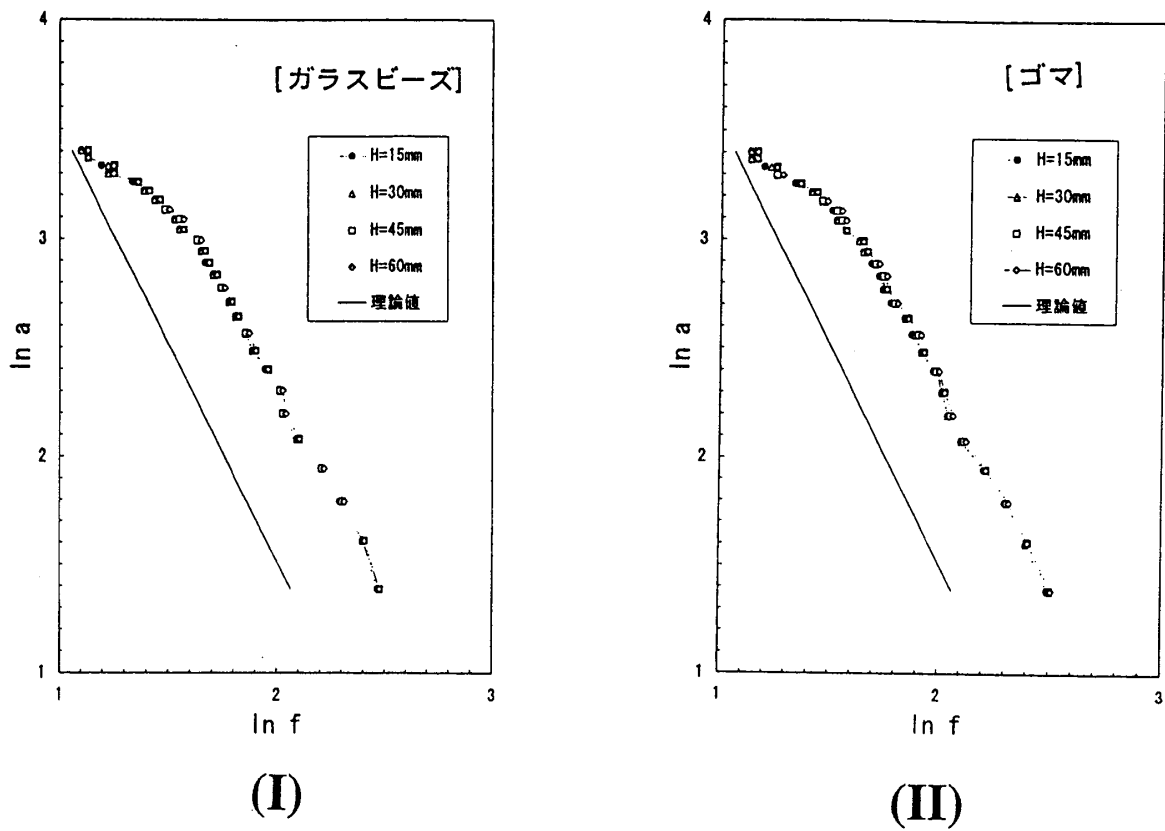


図 1.3: 臨界流動化曲線 [9]

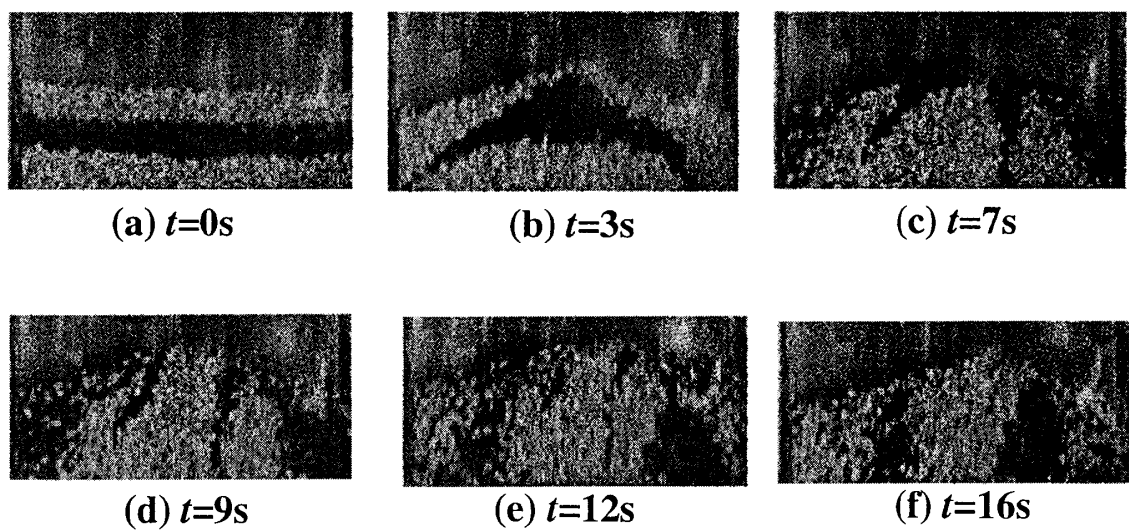


図 1.4: 胡麻の対流 [9]

## 1.5 粉粒体薄層上におけるパターン形成 - 本研究の位置づけ -

前章で紹介してきた対流などの現象は、粉粒体と容器壁との相互作用が重要なパラメタとなっている。ここでは、面積が層厚より十分に広い面積を持った場合について紹介する。粉粒体を鉛直方向へ振動させた実験は、古くは 1831 年 M. Faraday [3] に始まる。水平な扁平容器へ乾燥した粉粒体を入れ上下に加振すると、縞 (stripes)、格子模様 (squares)、六角形 (hexagons) 等の多様なセル状パターンが、粉粒体表面上に観測される。このパターンは、一点を支えた板の表面に砂を撒き周辺部をバイオリンの弓でこすって振動を与え節線に砂が集まって出来るクラドニックなパターンとは異なり、板が変形せず上下に振動している場合に自発的に現れるパターンである。

1994 年にこのパターンについて初めて系統的に調べたのが F. Melo ら [16] である。彼らは、直径  $d=0.2\text{mm}$  のブロンズ球からなる粉粒体薄層を鉛直方向へ  $z = a \sin(2\pi ft)$  で振動させ、平坦な状態 (flat) から外部振動周期の 2 倍の周期を持つ格子模様 (squares), 無秩序 (disordered), 縞状 (stripes) 等の平面パターンの遷移を確認した。また、その表面に出現するパターンについて振動数と無次元加速度  $\Gamma \equiv a(2\pi f)^2/g$  ( $g$ : 重力加速度) をコントロールパラメタとして調べた。

この粉粒体薄層表面に出現する平面パターンと、加振した際に出現する粉粒体の対流が作る小山 (heap) の違いを明らかにするために、直径  $d=1\text{mm}$  以下の粒子を用い粉粒体外部を取り囲む大気圧を下げて空気の影響を調べたのが Pak ら [13] である。彼らは、対流による heap は大気圧を 10Torr まで下げても持続するが、それ以下に下げると heap の高さが減少することを明らかにした。

Melo らは平面パターンを示した翌年、加振した際に粉粒体を作る heap が出来ないようにするため、真空中 (0.1 Torr) で側壁の摩擦を無くした円筒形容器 (127mm $\phi$ , 90mmH) に粒径  $d=0.15 \sim 0.18\text{mm}$  の粉粒層を 7 層敷き詰め鉛直方向に加振する実験を行った [17]。彼らは、新たに六角形パターン (hexagons) を確認し、また加振条件のヒステリシスが出現パターンにどう依存するかを調べた。それによると squares への遷移過程においてヒステリシスが存在し、特に、squares/stripes の遷移は  $f_* \equiv f\sqrt{h/g} \approx 0.33$  で起こり、層厚  $h$  に依存することが明らかにされた。

他方、数値計算ではコンピュータの演算速度や記憶容量の増加により、多数の非弾性剛体球の衝突を追跡し、粉粒体粒子系の多体問題を捉えることが可能となった。またこの方法でいくつかの研究がなされ実験類似のパターンを再現している [18] ~ [21]。これらの数値計算から、粒子同士の非弾性相互作用により粉粒体振動層を記述できることが明らかになり、かつ実験室での実験では測定が困難な物理量を推定することも可能となった。しかし、モデルから粉粒体振動層力学の一般的な特性を明らかにするに至っていない。また、連続体近似からアプローチした数値計算も同時に行われている [22]。ここでは、squares から stripes への遷移など振動層

における重要な振る舞いが捉えられている。しかし、この数値モデルと実際の粉粒体振動層を結びつけることが出来ず、実験との直接的な比較は難しい。このように、粉粒体振動層は個別に様々な研究が行われているが、計算上のパラメタの選び方に任意性があり、また分岐現象そのものと粉粒体の運動とのつながりも明確ではなく、どれも統一的な記述には至っていない。

また、Umbanhowarらは heap が出来ない系で層厚を増加させていくと、単一の peak と crater のような孤立した励起状態が存在することを確認し、これを “oscillon” と命名した [23]。 “oscillon” は peak 時に大きさ 0.6mm 程の高さ (粒径の 3.33 倍) を持った円錐状をしていて、セル状パターンと同様に外部振動周期の 2 倍で peak と crater を繰り返す (図 1.5)。dipole, polymeric chain, triangular tetramer や square ionic lattice 等も確認され、固体の結晶が原子の周期配列から形成されるように、粉粒体パターンは “oscillon” が集まって形成されると提案されている。しかし、特殊な領域でのみ観測されるパターンなので一般性について議論が残されている。

また、セル状パターンを形成する波動のメカニズムを解明する一つの方法として、セルサイズ  $\lambda$  についての検討も平行して行われてきた。Meloらは、水面重力波とのアナロジーより  $\lambda = \lambda_{\min} + g_{\text{eff}}/f^2$  ( $\lambda_{\min} = 11d$  で  $g_{\text{eff}} \approx 310\text{cm/s}^2$ ) の関係を提案し、また高い振動数では粒子サイズによる  $\lambda_{\min}$  のカットオフが存在すること、容器サイズには依存しないことを示した。この波長  $\lambda$  が振動数  $f$  の-2 乗に比例するという結果は実験的には Clément [25] や Metcalf [26]、数値解析的には Aoki [18] ら他のグループによっても示されている。近年になって、この分散関係のべきについて他の可能性が提唱されるようになった。Sanoらは無次元量として粒径  $d$  を用いた  $f\sqrt{d/g}$  を導入し、

$$\frac{\lambda}{d} \propto (f\sqrt{\frac{d}{g}})^{\alpha} \quad (1.1)$$

の関係式において、低い振動数で  $\alpha \approx -2$ 、また高い振動数では  $\alpha \approx -2/3$ 、の関係を示した [27]。また、他方で Umbanhowarらは無次元化として層厚  $h$  を使い、 $f_* \equiv f\sqrt{(h/g)} < 0.4$  で

$$\frac{\lambda}{h} \propto \text{const} + (f\sqrt{\frac{h}{g}})^{\alpha} \quad (1.2)$$

$\alpha \approx -1.32 \pm 0.03$  となることを示した [28]。Umbanhowarらは、この分数のべきを説明するために、空気粘性、静電効果、境界壁との影響を唱えている。しかし、粒子が帯電しないようにして、大気圧のもとで行った実験 [26] から同じ様な分数のべきが出現しているため、空気粘性、静電効果などは、べきが分数になる理由とはならない。また境界壁の影響は、境界から数層分程度までしか現れていないため、これによって分数のべきを説明することも適当とは言えない。2002年 Ugawaらはこれに対して、粉粒体波動が連続性と粒子性の中間領域に位置すること、また層が厚くなった場合は粘性流体の重力浅水波の理論でこのべきの分数を説明出来ることを示した [29]。

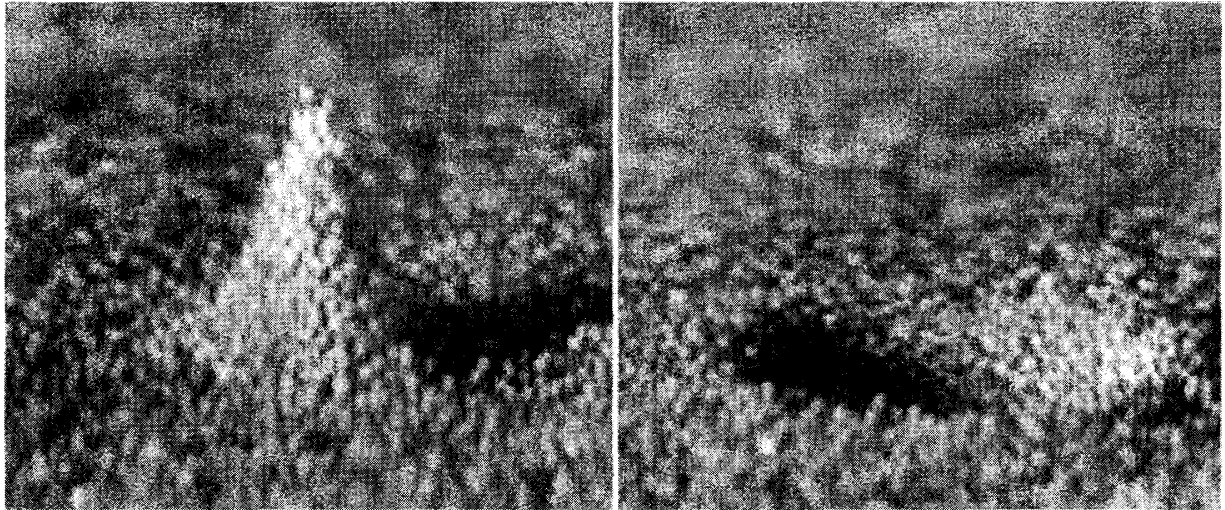


図 1.5: Oscillon : 横から撮影したもの [24]

以上のように、粉粒体振動層は様々な研究がなされているが、パターンが形成されるメカニズムは明かになっていない。本論文では、粉粒体振動層がもつ“連続性”と“粒子性”の2つに焦点をあてパターンが形成されるメカニズムの解明を目指している。

## 第2章 目的

第1章で述べてきたように、粉粒体が示す複雑な挙動については古くから様々な研究が進められているが、依然としてその挙動は解明出来ていない [16] ~ [33]。

粉粒体薄層を鉛直方向に振動させた時に現れるパターンは、ミクロに見ればその時間・空間スケールは粒子間の平均衝突時間や平均自由行程に関係するはずであるし、他方、マクロにみれば装置の大きさや外部攪乱の周期で決まるスケールをも持つ。両者の中間領域(メソ領域)で実現されているパターン形成の問題は、様々な粉粒体の挙動を解明する突破口となりうる可能性をもつ。

また、最近では粉粒体の分散関係のべきについて、また、それと関連して無次元化の方法について注目が集まっている。このべきは、粉粒体定在波の“粒子性”、“連続性”を特徴づけるものであり、粉粒体振動層を理解する上で非常に重要であるが、まだ未解決であり、無次元化の方法についても依然解決されていない。

そこで本研究では、マクロな流動化現象としての粉粒体薄層パターンについて振幅、振動数、層厚依存性を調べ、またミクロな挙動として、個々の軌道を追い、その両方の観点から特定の平面パターンが生じるメカニズム、条件とパターンサイズやその時間変化等を解明することを目的とする。

第3章では、層厚に対して十分な面積をもつ粉粒体薄層を加振したときに出現する平面パターンについて詳細に調べ、系統的な分類を行う。

第4章では、平面パターンを構成している粉粒層断面に相当する準二次元の粉粒層を用いて、波動形成のメカニズムを調べる。特に、分散関係、無次元化の方法に焦点をあて、粉粒層の粒子性や連続性と波動の関係を調べる。

第5章では、加振の影響が粉粒層に全体的に及ぶ場合と局所的に及ぶ場合の違いを調べる。特に、外部加振条件依存性、容器サイズ依存性を調べ、連続体モデルとの比較を行う。

## 第3章 粉粒体の鉛直加振によるパターン形成

粉粒体薄層を鉛直方向に振動させた際に見られるパターンは、Michael Faraday の実験 (1831 年) [3] 以来現在も様々な所で観測されている。このパターンは、一点を支えた板の表面に砂をまき周辺部をバイオリンの弓でこすって振動を与え節線に砂が集まってできる、クラドニ (Chladni) のパターンと似ている。しかし、粉粒体の場合は板が変形せず剛体的に上下振動している上でも、自発的に正方形、縞状、六角形などのパターンが現れる。以下に、粉粒体薄層を正弦波で振動させたときに見られるパターンについて述べる [34]。

### 3.1 実験

本実験で用いた実験装置概略図を図 3.1 に示す。粉粒体の層厚  $h$  に対して十分な面積をもった円筒容器 (直径 106mm、深さ 31mm) に粉粒体を 5 層~20 層入れ、加振器 (EMIC, 513-B) へ垂直に取り付け、ファンクションシンセサイザーとアンプで加振する。容器は剛体的に上下

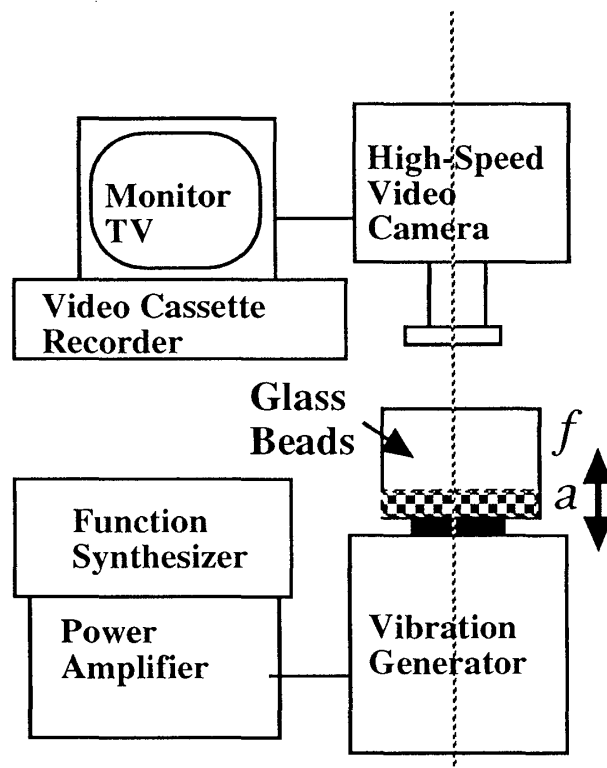


図 3.1: 実験装置概略図

振動し、その底面がクラドニのパターンを示すような固有振動状態にないことを予め確認した。粉粒体層の容器の上方から高速度ビデオカメラ (Photron, HVC-11B) を用いて撮影を行い、後に画像解析を行った。なお、本節で示す結果は粉粒体として直径  $d = 0.13 \pm 0.05 \text{mm}$  のガラスビーズを用い、大気圧のもとで実験を行ったものである。

### 3.2 粉粒体表面に出現する平面パターン

粉粒体薄層を鉛直方向へ加振した際に出現するパターンの例を図 3.2 に示す。鉛直方向へ加振を受けた粉粒体薄層は、重力加速度  $g$  と加振加速度  $a(2\pi f)^2$  の比  $\Gamma = a(2\pi f)^2/g$  が 1 を超えた付近から動き始める。そして、容器全体に均一に拡がっていた粉粒体は、 $\Gamma$  が 2 を超えると不規則に集まり、位置も大きさも不均一な扁平円錐の集合体 “spot” を形成する。さらに  $\Gamma$  を増加させていくと、ひとたび集まっていた粉粒体は容器底面全体に広がり、格子状 “squares” や縞状 “stripes” 等のセル状パターンを形成する。なお、この平面パターンは粒子が密に集合して盛り上がっている部分 “山” と粒子が無い部分 “谷” から形成されており、容器が一回上下すると、その “山” と “谷” が入れ替わる。したがって、パターンは外部振動周期の 2 倍の周期を持つ (図 3.3)。さらに  $\Gamma$  を増加させると、パターンは消滅し粉粒体自身の動きはあるが特徴的な長さを持たないパターン “flat” を形成し、 $\Gamma > 10$  の領域では外部振動周期の 4 倍の周期をもつ六角形 “hexagons” のパターンが出現する (図 3.4)。これらのパターンは、これまで知られたパターン形成 [16] [17] と定性的に一致している。また、先の研究で報告された “squares”、“stripes”、“hexagons” に加え、本研究では 8 回対称性をもった準結晶パターンを 2 次元フーリエ解析により確認した (図 3.5) [33]。

また、これらのセル状パターンは、フーリエ解析でも確認してきたように定在波の波数ベクトルが交差することにより実現していると考えられる。

### 3.3 パターン分岐ダイアグラム

§3.2 で述べたパターンについて縦軸を無次元加速度  $\Gamma$ 、横軸を無次元振動数  $f\sqrt{h/g}$  に取り、phase diagram を作ったものが図 3.6 である。粉粒体表面に出現する平面パターンは  $\Gamma$  のある範囲で観測されるが、出現するパターンの種類は  $\Gamma$  だけでは決定されないことがこの図から分かる。図 3.6 から、出現するパターンの種類は、主として外部振動数  $f$ 、外部振幅  $a$ 、粉粒層厚  $h$  で決定されることが分かった。

次に、境界壁の平面パターンへの影響を考える。一般に長方形容器に粉粒体を入れ加振する場合にはセルパターンの辺が容器壁と平行になる傾向があるが、円筒形容器の場合は、そのような特定の方向がない。図 3.7 は正方形セルが形成されている時の境界壁の影響を見たものである。左側の白い曲線が容器の側壁である。境界壁の影響は側壁から粒子径の数倍の距離まで

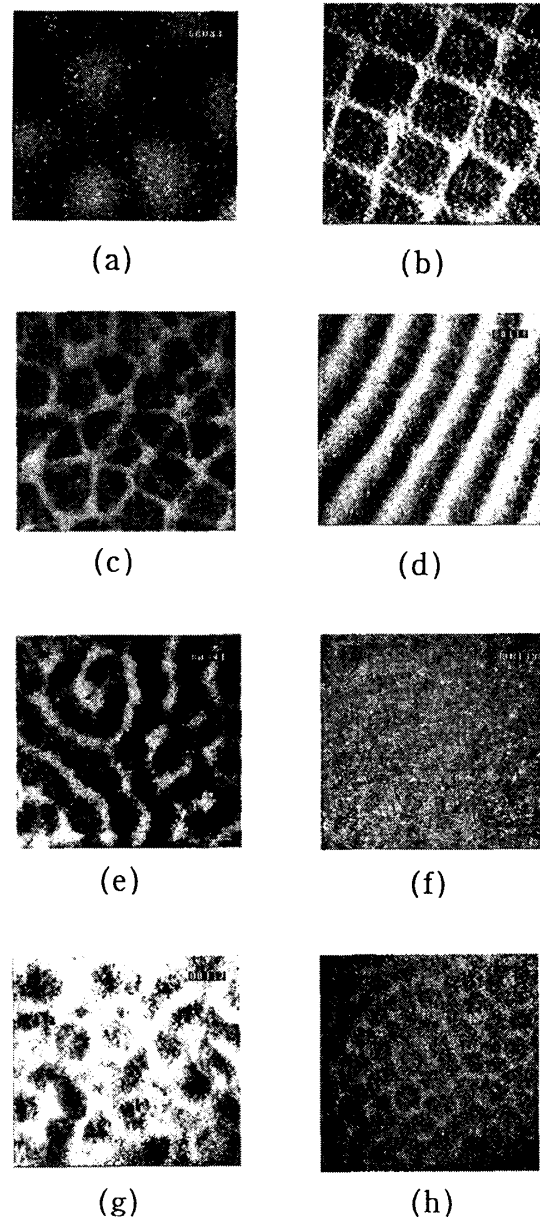


図 3.2: 粉粒体表面に出現する平面パターン.  
白い部分が粉粒層、黒い部分が容器の底である。

- (a) spots ( $f = 20\text{Hz}$ ,  $a = 0.80\text{mm}$ ),
- (b) squares ( $f/2$ ) ( $f = 25\text{Hz}$ ,  $a = 1.20\text{mm}$ ),
- (c) polygons ( $f/2$ ) ( $f = 30\text{Hz}$ ,  $a = 2.18\text{mm}$ ),
- (d) stripes ( $f/2$ ) ( $f = 45\text{Hz}$ ,  $a = 1.00\text{mm}$ ),
- (e) spirals ( $f/2$ ) ( $f = 45\text{Hz}$ ,  $a = 1.20\text{mm}$ ),
- (f) flat ( $f = 45\text{Hz}$ ,  $a = 1.60\text{mm}$ ),
- (g) hexagons ( $f/4$ ) ( $f = 60\text{Hz}$ ,  $a = 0.60\text{mm}$ ),
- (h) quasi-crystal pattern ( $f/4$ ) ( $f = 75\text{Hz}$ ,  $a = 1.00\text{mm}$ ).



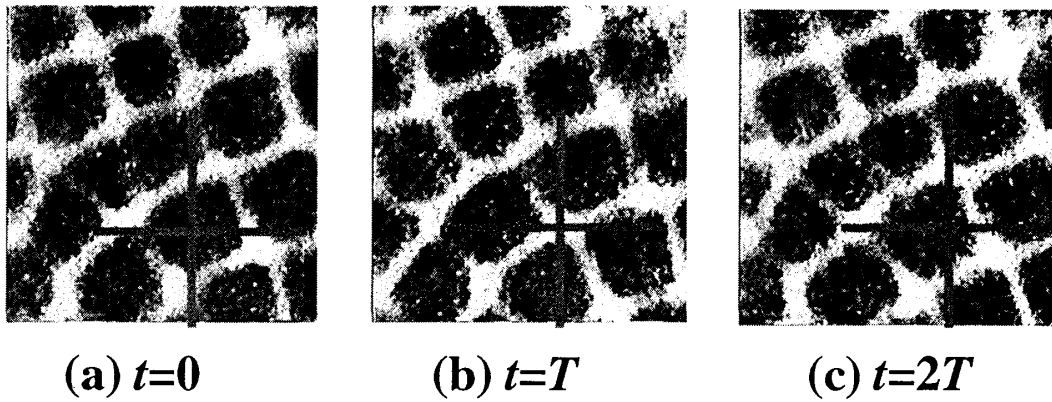


図 3.3: Square patterns( $f/2$ ) の時間変化 :  $f=35\text{Hz}$ ,  $a=1.4\text{mm}$ .

外部振動周期の 2 倍がパターンの周期となっている。  
(b) と (c) はそれぞれ、(a) のパターンの  $T$  と  $2T$  後のパターンである。  
なお、 $T$  は外部振動周期であり、図中の十字は同じ位置を指している。

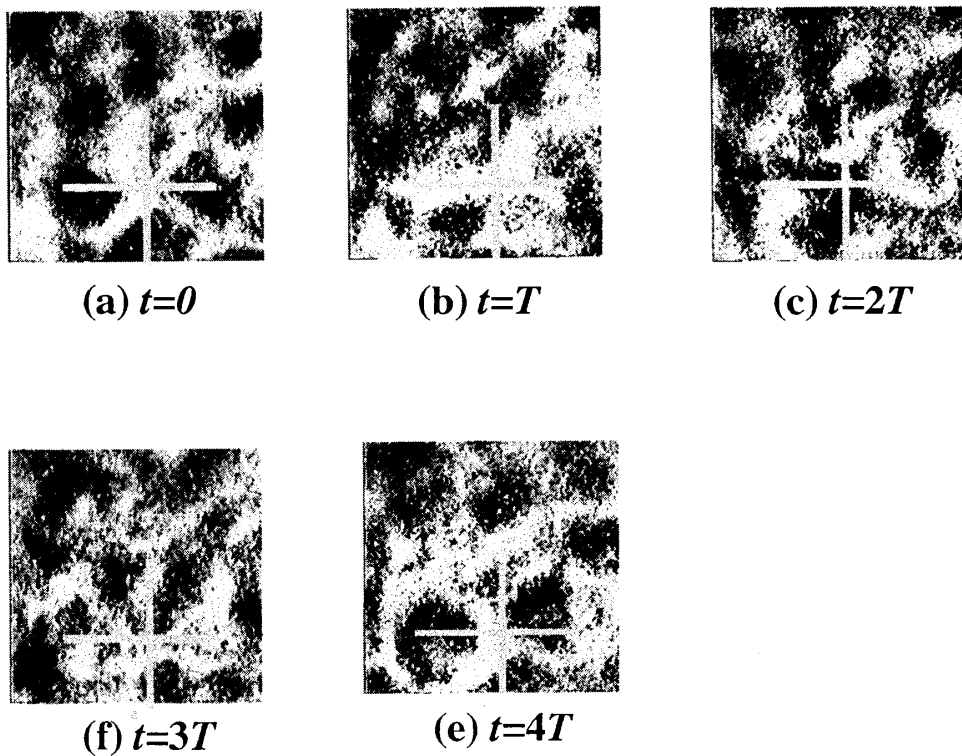


図 3.4: Square Pattern( $f/4$ ) の時間変化 :  $f=75\text{Hz}$ ,  $a=1.0\text{mm}$

外部振動周期の 4 倍がパターンの周期となっている。  
(a) のパターンの  $T$  後のパターン (b) では、粉粒体の山と谷は入れ替わらず、  
 $2T$  後の (c) で初めて入れ替わる。また、 $4T$  後に (a) と同じパターンが再び現れる。  
なお、 $T$  は外部振動周期であり、図中の十字は同じ位置を指している。

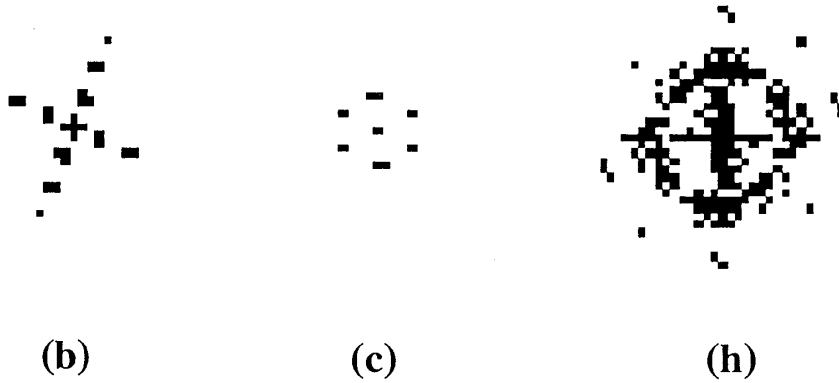


図 3.5: 図 3.2 (b)(c)(h) の 2次元フーリエ・イメージ  
 (b) の square pattern は 4 回対称、(c) の hexagon pattern は 6 回対称、  
 (h) の octagon pattern は 8 回対称となっている。

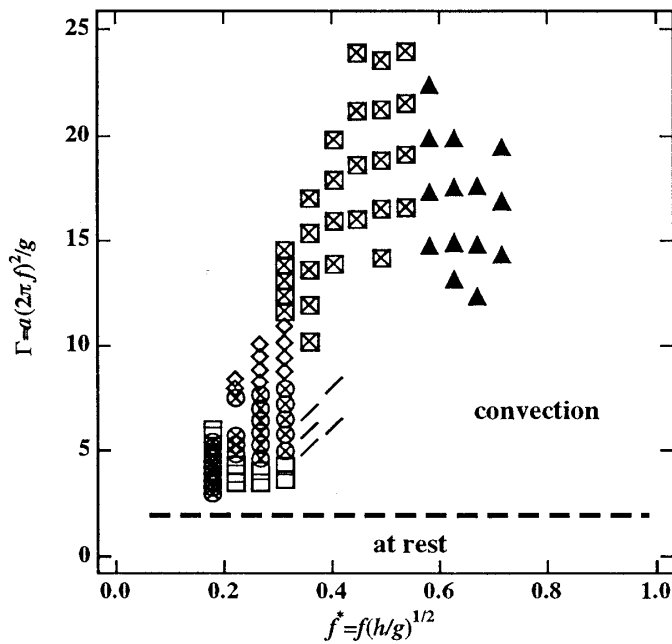


図 3.6: 平面パターン分岐ダイアグラム

- : squares ( $f/2$ ),
- ⊗: hexagons and triangles ( $f/2$ ),
- /: stripes ( $f/2$ ),
- ◇: squares ( $f/4$ ),
- ⊠: hexagons and triangles ( $f/4$ ),
- および ▲: octagons ( $f/4$ ).

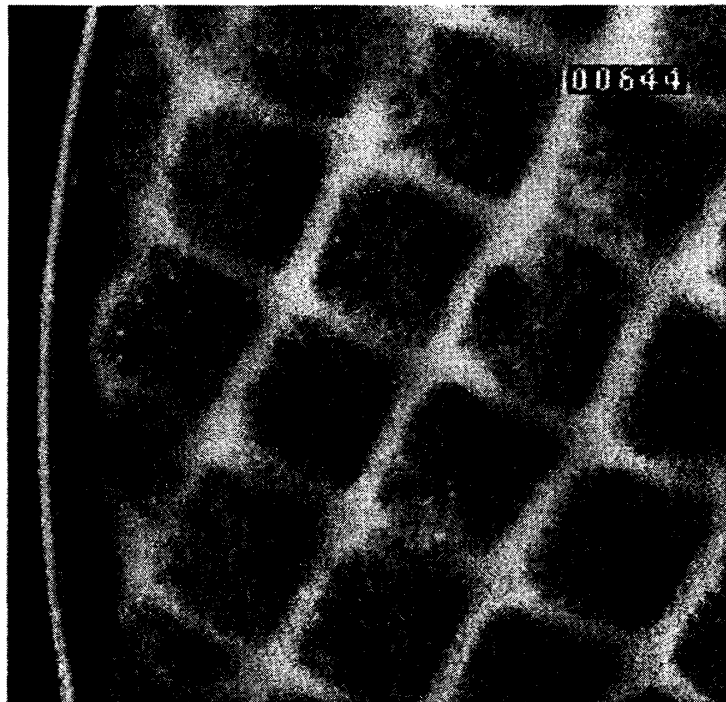


図 3.7: 平面パターンに対する境界壁の影響.  
 $f=27\text{Hz}$ ,  $a=1.59\text{mm}$ , glass beads  $d=0.13 \pm 0.05\text{mm}$

しか現れていないことが分かる。容器の中央にある大部分の正方形の辺の向きは何らかの偶然的要素で揃ってしまい、その向きは同一条件の実験を繰り返すたびに異なる。

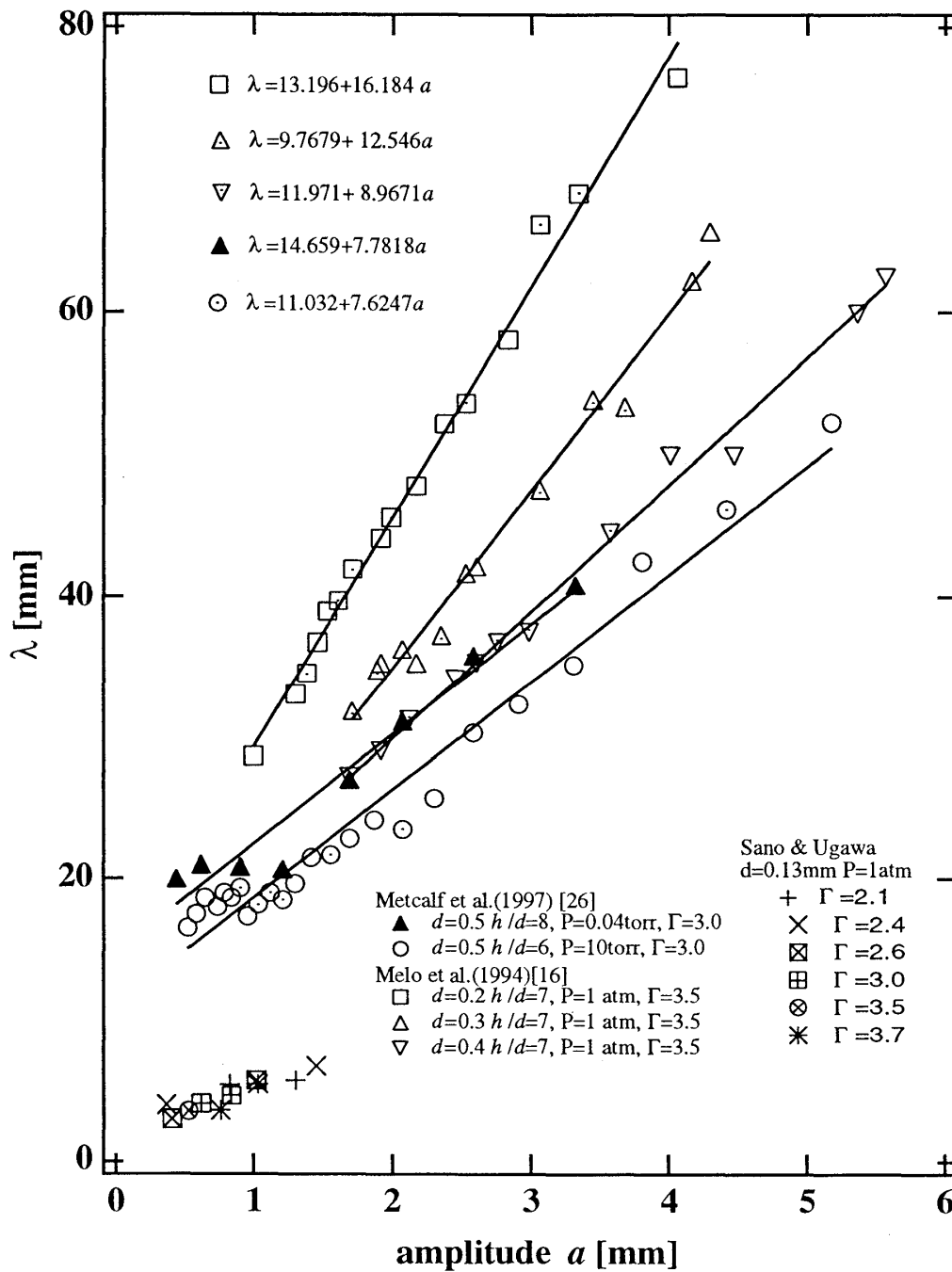
また、正弦波の波形に倍周期の波形を  $\epsilon$  の割合で加えた波形  $z = a[(1 - \epsilon) \sin(2\pi ft) + \epsilon \sin(2\pi ft/2)]$  を用いて §3.2 と同様の実験を行ったがほとんど異なった点は見られない。つまり、パターン形成は、摂動に対して安定であることが明らかになった。

### 3.4 議論

図 3.8 は、square pattern の辺の長さ  $\lambda$  を測定して外部振幅  $a$  依存性をみたものである。 $a$  が大きくなるに従って、 $\lambda$  が増加していることがわかる。

このセルサイズについて定性的な説明を行うために、粒子同士が完全弾性衝突し、どれだけ水平方向へ飛行するかを考えたモデルを考える。図 3.9 のように粒子 1 が粒子 2 に衝突し、初速  $v_0$ 、水平面からの角度  $\phi = \pi/2 - 2\theta$  の方向へ打ち出されると考える。これにより、粒子 1 は水平方向へ  $l = 2v_0^2 \sin 4\theta/g$  だけ飛行する。また、粒子 1 が粒子 2 を囲む半径  $x_0 \sim x_0 + dx$  の円環領域へ入り、衝突する確率は

$$2\pi x_0 dx_0 / (2b)^2 \pi \tag{3.1}$$

図 3.8: 正方形パターンセルサイズの外部振幅  $a$  依存性.

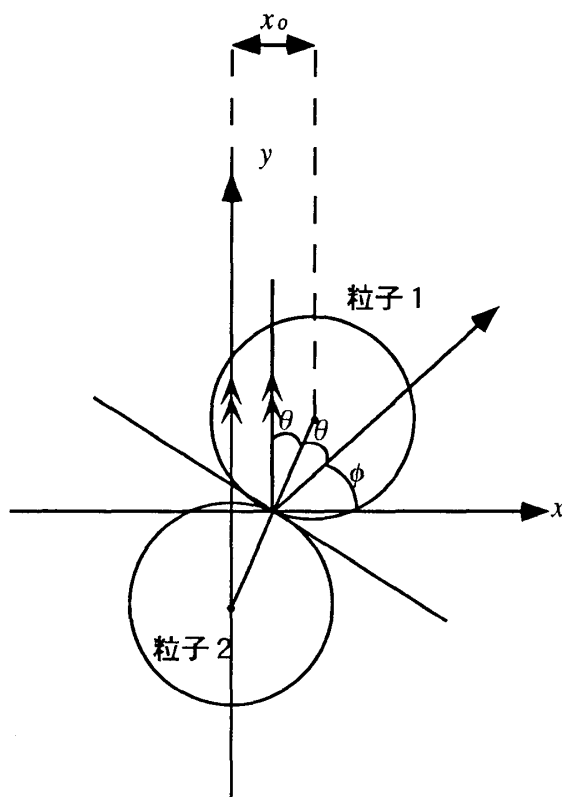


図 3.9: 粒子 1 と粒子 2 の衝突.

である (図 3.10)。従って、粒子 1 が水平方向へ飛ぶ距離は平均して

$$\sqrt{\langle l \rangle^2} = (4v_0^2/g) \left[ \int_0^1 t^2(1-2t^2)^2(1-t^2) dt \right]^{1/2} = 4v_0^2/(g\sqrt{30}) \quad (3.2)$$

と見積もれる。なお、 $t = \sin \theta = x_0/2b$  である。

また、容器から得た速度  $2\pi fa$  がそのまま粒子 1 が飛行する速度になると仮定する ( $v_0 = 2\pi fa$ )。外部振動周期の 2 倍の周期を持つ square pattern が観測されるのは  $\Gamma = 2 \sim 4$  の比較的狭い領域に限られているので、式 (3.3) を  $\Gamma$  と外部振幅  $a$  で書き直すと

$$\sqrt{\langle l \rangle^2} = (4/\sqrt{30})\Gamma a \quad (3.3)$$

となり、 $\Gamma$  が一定のとき  $\sqrt{\langle l \rangle^2}$  は振幅  $a$  に比例していることがわかる。式 (3.3) の比例係数は  $(4/\sqrt{30}) \sim 0.73$  となるが、 $\Gamma \approx 3$  とし、また  $a$  を mm 単位で表すと  $a$  の比例係数は  $\sim 22$  となる。これを図 3.8 の比例係数と比べると実験値の方が値が小さいが、オーダーは一致している。これより、セルサイズ  $\lambda$  は粒子の飛行距離でほぼ見積もれると考えられる。なお、定量的な違いは実際の粒子の非弾性衝突による速度の減衰や多重衝突、対流による効果などによるものと考えられる。

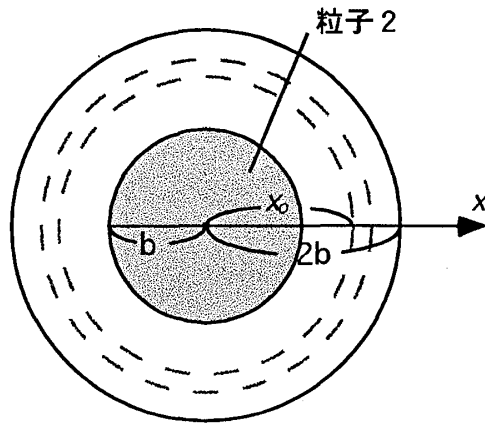


図 3.10: 粒子 1 が粒子 2 に衝突する範囲.

### 3.5 第 3 章のまとめ

層厚に対して十分に広い面積をもった粉粒体振動層を鉛直方向に剛体的に  $z = a \sin(2\pi ft)$  で振動させると、その表面には外部振動周期の 2 倍あるいは 4 倍の周期を持つ、四角形、縞状、六角形等のセル状パターンが出現する。これらのパターンを系統的に調べると、外部振動加速度  $a(2\pi f)^2$  と重力加速度  $g$  の比  $\Gamma = a(2\pi f)^2/g$  と層厚  $h$  で無次元化した振動数  $f\sqrt{h/g}$  でかなりの程度まで分類できることが分かった。また、従来知られていた 3 回、4 回、6 回対称軸を持つ周期パターンに加えて、8 回対称軸をもつ準結晶パターンを発見した。

## 第4章 鉛直に加振した粉粒体薄層における定在波断面

これまで、粉粒体平面パターンについて系統的に調べてきたが、依然としてそのパターンが生成されるメカニズムは不明である。そこで、この章では平面パターンを形成している定在波に焦点をあて、そのメカニズムを調べる。最近の研究では粉粒体定在波の分散関係のべきについて、また、それと関連して無次元化の方法について注目が集まっている。このべきは粉粒体定在波の“粒子性”と“連続性”を特徴づけるものであり、粉粒体振動層を理解する上で非常に重要であるが、まだ未解決であり、無次元化の方法についても十分解決されているとは言えない。

### 4.1 目的

本章では、3種類の異なった無次元量:  $h/d$ 、 $hf^2/g$ 、 $f\sqrt{h/g}$ を導入し、分散関係について調べる。また、特にそのべきについて考察を行う。

### 4.2 実験

薄型直方体容器(縦 91mm × 横 91mm × 奥行き 8mm)に粉粒体薄層を敷き、§§3.1で行った実験と同様の加振装置を用いて実験を行った。用いた粉粒体は乾燥した球形のガラスビーズ(粒径  $d=0.13 \pm 0.05$ 、 $0.34 \pm 0.08$ mm)で層厚は  $h=0.7\sim 12$ mm である。

### 4.3 結果

#### 4.3.1 出現するパターン

層厚  $h$  を固定し、加振加速度  $a(2\pi f)^2$  と重力加速度  $g$  との比  $\Gamma = a(2\pi f)^2/g$  を増加させていった時のパターンの移り変わりを図 4.1 に示す。最初平面だった粉粒層は  $\Gamma$  が 1 を超えたあたりから粉粒層全体が動き始め、 $\Gamma$  が 3 を超えると表面波を形成する。この波は外部振動周期の 2 倍の周期で山と谷を繰り返す(図 4.1-(a))。以下ではこれらのさざ波のようなパターンを ripple patterns と呼ぶ。さらに  $\Gamma$  を増加させていくと、ripple patterns はいったん消滅し(図 4.1-(b)) ふたたび出現する(図 4.1-(c))。ただし、消滅した後に出現する ripple patterns は外部振動周期の 4 倍の周期を持つ。またさらに  $\Gamma$  を大きくしていくと、山と山の谷間に鋭い

ピークをもつ spike patterns(図 4.1-(d)) あるいは、層厚が大きい場合にはうねりのパターン undulations(図 4.1-(e)) が観測される。この章では、外部振動周期の 2 倍の周期を持つ ripple patterns に焦点をあて議論を行なう。

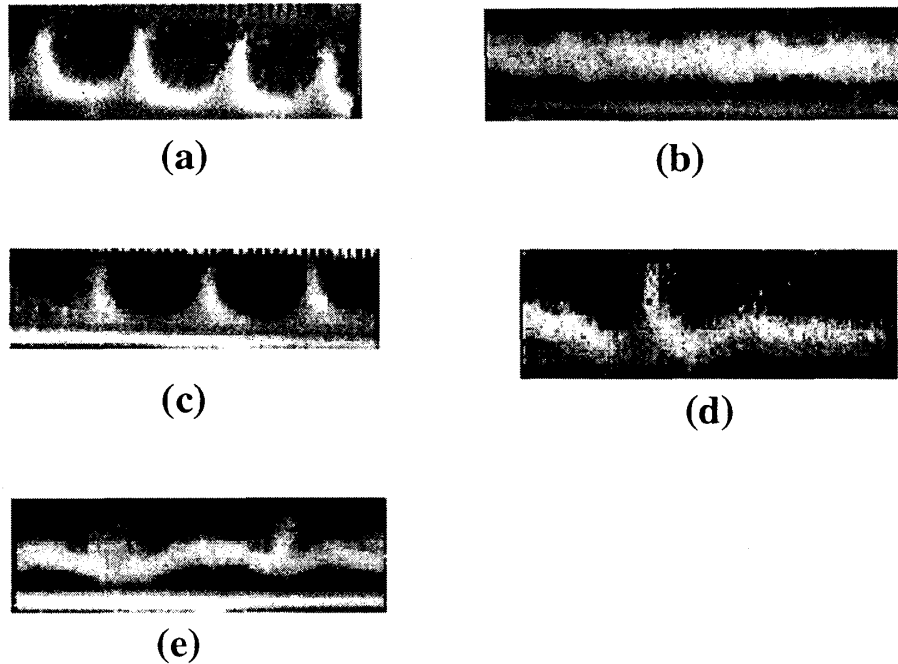


図 4.1: 粉粒体薄層を加振したときに見られるパターン (断面).

- (a)  $f/2$ -ripple ( $f=25\text{Hz}$ ,  $a=2.17\text{mm}$ ,  $\Gamma = 5.46$ ),
- (b) no wave ( $f=35\text{Hz}$ ,  $a=1.75\text{mm}$ ,  $\Gamma = 8.64$ ),
- (c)  $f/4$ -ripple ( $f=40\text{Hz}$ ,  $a=1.70\text{mm}$ ,  $\Gamma = 11.0$ ),
- (d) spike ( $f=45\text{Hz}$ ,  $a=1.55\text{mm}$ ,  $\Gamma = 12.6$ ),
- (e) undulation ( $f=55\text{Hz}$ ,  $a=1.30\text{mm}$ ,  $\Gamma = 15.8$ ).

#### 4.3.2 ripple patterns の時間変化

ripple patterns が出現する時の粉粒層底面と容器の位置関係を図 4.2 に示す。粉粒層は容器に押し上げられ  $+z$  の方向へ動き、その間 ripple の山は重力によって減衰する (図 4.2-(i)-(a))。次に粉粒層は容器を離れ自由飛行を行ない、“ripple”の山と谷の位置を入れ替える (図 4.2-(i)-(b)(c))。そして、粉粒層は、上昇している容器と衝突し押し上げられ、山のピークが最大になる。(a) から (e) の周期が外部振動周期一周期分  $T(=1/f)$  であり、次の周期 (e) から (f) の間に、山の位置が半波長分ずれた状態でこのプロセスが続く。つまり、パターンの周期は  $2T$  である。



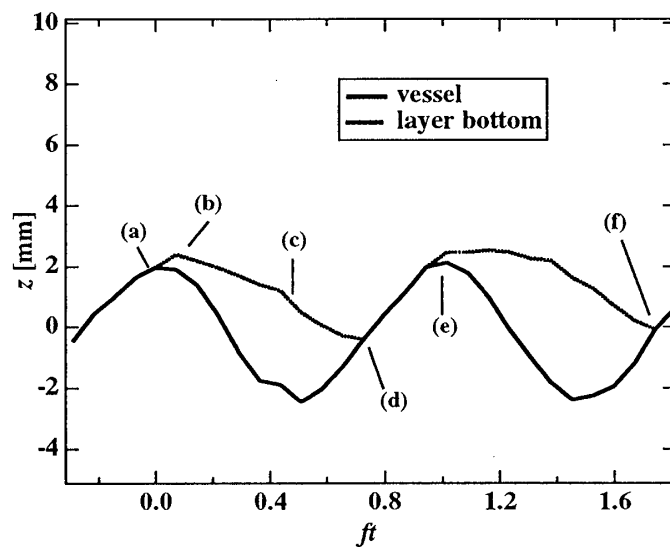
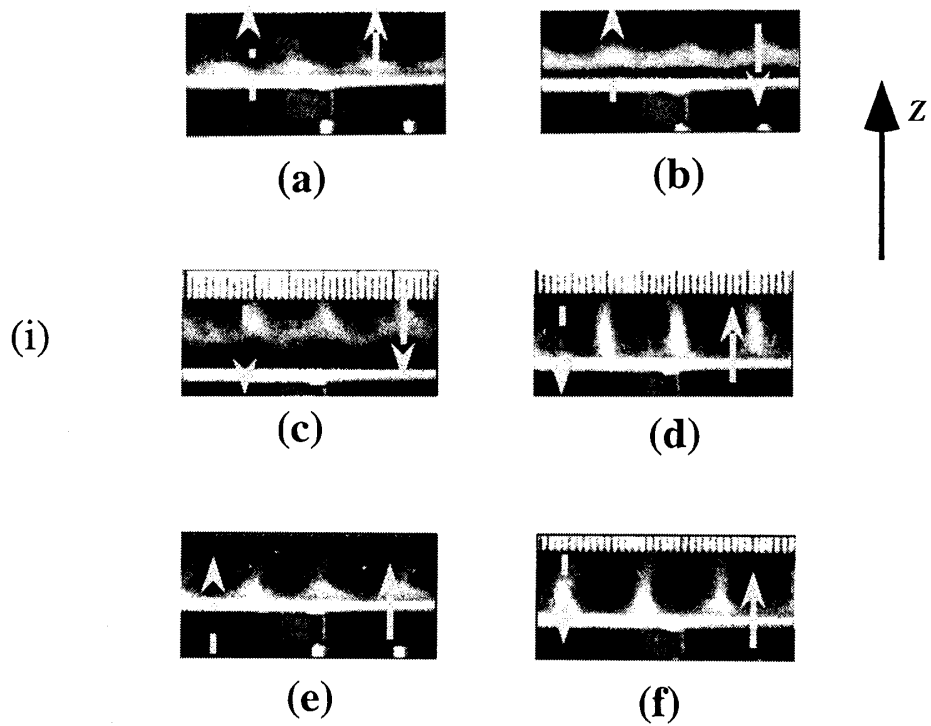


図 4.2: 粉粒体薄層が形成する ripple patterns の時間変化.

(i)  $f/2$ -ripples のスナップショット  $f = 27\text{Hz}$ ,  $a = 2.01\text{mm}$ ,  $d = 0.34\text{mm}$  and  $h = 1.70\text{mm}$ . 実線矢印は容器の方向を、点線の矢印は粉粒層底面の進行方向を表している。

(ii) 容器底面と粉粒層底面の関係 ; (a)-(f) はそれぞれ (a)  $ft = 0$ , (b)  $ft = 0.1$ , (c)  $ft = 0.5$ , (d)  $ft = 0.75$ , (e)  $ft = 1$ , (f)  $ft = 1.75$  に対応している。

なお、rippleが形成されるためには、粉粒層が自由飛行する時間 $t_g$ が $t_g \gtrsim T/2$ であることが、他のパターンとの比較により明らかとなった。

### 4.3.3 分散関係

ripple patternsの波長は振動数 $f$ 、振幅 $a$ 、層厚 $h$ に依存する。異なる粒径のガラスビーズに対して ripple patternsの振動数依存性を調べたものが図4.3ある。縦軸、横軸はそれぞれ層厚 $h$ で無次元化した波長 $\lambda^* \equiv \lambda/h$ と振動数 $f^* \equiv f\sqrt{h/g}$ である。これによると $0.11 < f^* < 0.64$ で $\lambda^* \propto f^{*\alpha}$  ( $\alpha \approx -1.47$ )の関係があること、また $0.64 < f^*$ で $\lambda^*$ は飽和することが分かった。なお、この分散関係のべき $\alpha$ は無次元加振加速度 $\Gamma$ に依存する(図4.4)。図4.4中の $|\alpha|$ の小さい方の値は、図4.3の $0.64 < f^*$ のデータに対応する。

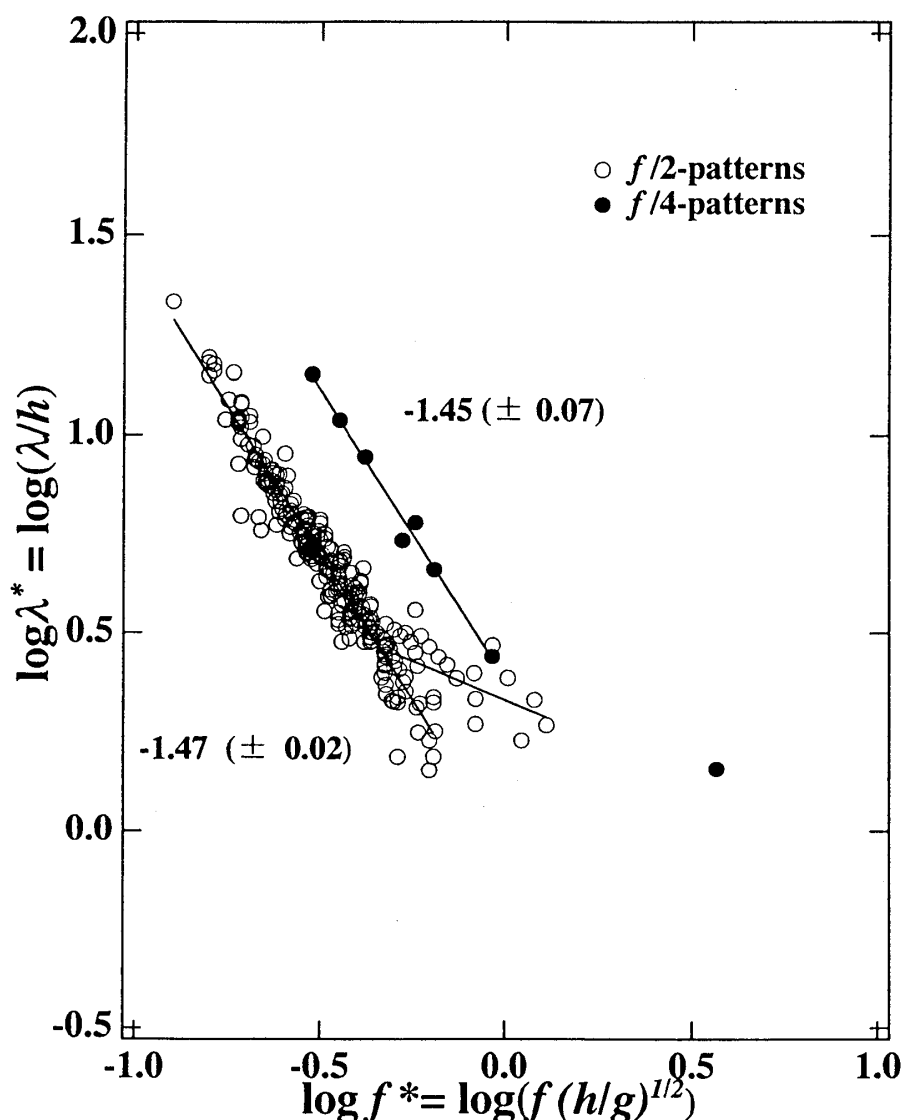


図 4.3: 分散関係.

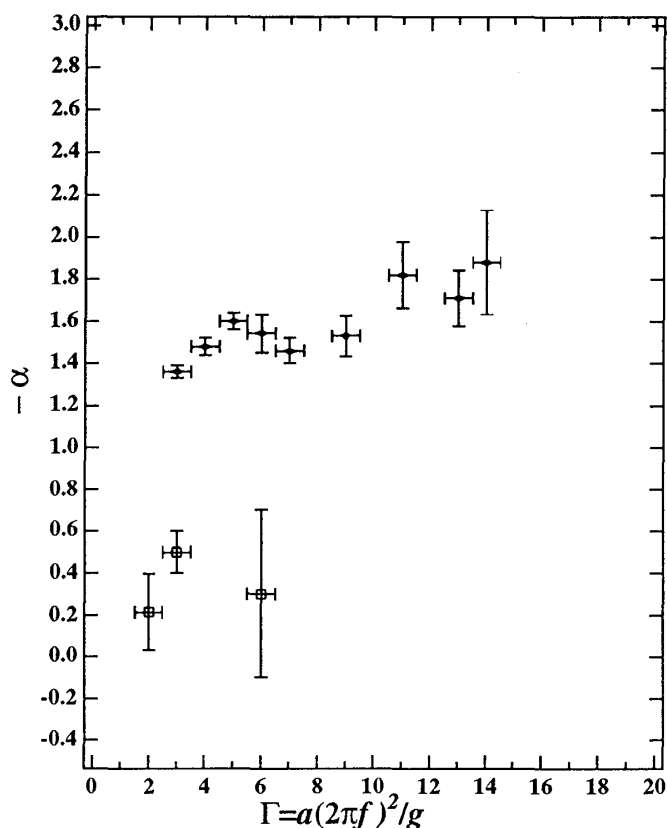


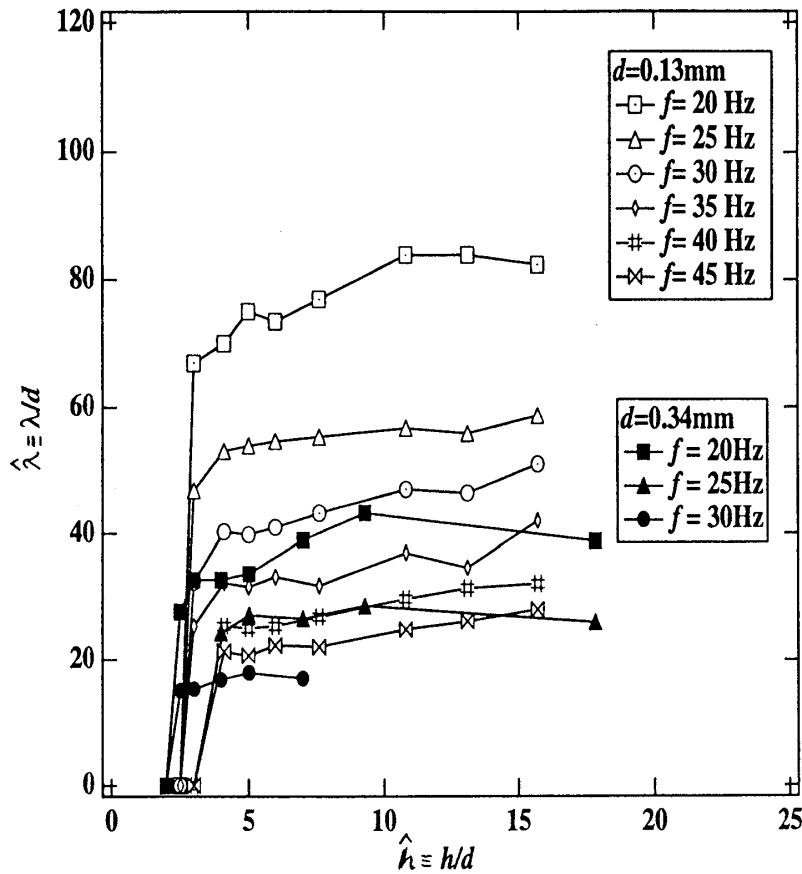
図 4.4: ベキ  $\alpha$  の無次元加速度  $\Gamma$  依存性.

#### 4.3.4 ripple patterns の始まり、波長の層厚依存性

§§4.3.3 で述べたように、波長  $\lambda^*$  は  $f^*$  の高い領域で飽和している。この過程を明らかにするために、波長の層厚依存性について調べる。この節では、図 4.3 で用いたデータを粒径  $d$ 、粉粒層の自由落下距離  $g/f^2$  で無次元化し、その振る舞いを記述する近似式を導入した。

粒径  $d$  で無次元化を行ったグラフが図 4.5 で、縦軸は  $\hat{\lambda} \equiv \lambda/d$ 、横軸は  $\hat{h} \equiv h/d$  である。これによると、 $\hat{\lambda}$  は  $\hat{h}$  に対して急速に飽和していることが分かる。これは上層部の近くにある 5 ~ 6 層の粉粒層のみが、波の形成に寄与していることを示している。また、波が形成される臨界層厚  $\hat{h}_c$  は粒径によらず  $\hat{h}_c \approx 2 \sim 3$  である。このことから、層厚  $h$  そのものではなく粉粒層が何層あるかが、ripple の発生を決定づけていることが分かる。それぞれの条件下での実験データに対する近似式を  $\hat{\lambda} = C_1(\hat{h} - \hat{h}_c)^\delta$  とした。なお、 $C_1$  は振動数  $f$  と粒径  $d$  に依存し、 $\hat{h}_c = \text{const}(\approx 3)$  である。

次に、自由落下距離  $g/f^2$  で無次元化を行った層厚依存性のグラフが図 4.6 である。なお縦軸は  $\tilde{\lambda} \equiv \lambda f^2/g$ 、横軸は  $\tilde{h} \equiv h f^2/g$  となる。図 4.5 のデータは波が形成される臨界層厚付近をのぞき、一本の曲線に乗る。これは、波が十分に発達した領域では  $f^2/g$  の無次元化が適当であることを示している。また、この曲線に対しては、 $\tilde{\lambda} = C_0 + C_2 \tilde{h}^\epsilon$  を導入する。この近似式

図 4.5: 波長の層厚依存性 粒径  $d$  での無次元化.

での  $C_0$  は波の発生点付近で波長のカットオフがあることに対応している。

#### 4.3.5 議論

ここでは、ripple patterns の波長  $\lambda$  の無次元化について議論を行い、そのメカニズムについて考察する。§§§4.3.4 において粒径  $d$  と粉粒層の自由落下距離  $g/f^2$  の二つを用いて無次元化を導入してきたが、この“粒子性”と“マクロスコピック”な振る舞いの二つを合わせて

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_m + C_1(\tilde{h} - \tilde{h}_c)^\delta + C_2\tilde{h}^\epsilon, \quad (4.1)$$

あるいは、

$$\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_m + C_1 \left( \frac{g}{f^2 d} \right)^{1-\delta} (\hat{h} - \hat{h}_c)^\delta + C_2 \left( \frac{g}{f^2 d} \right)^{1-\epsilon} \hat{h}^\epsilon, \quad (4.2)$$

と表現する。なお、 $\tilde{\lambda} = \lambda f^2 / g$ 、 $\tilde{h} = h f^2 / g$ 、 $\hat{\lambda} = \lambda / d$ 、 $\hat{h} = h / d$ 、 $\hat{\lambda}_m = g \tilde{\lambda}_m / f^2 d$ 、 $\hat{h}_c = g \tilde{h}_c / f^2 d$  である。他方、無次元化  $\lambda^* = \lambda / h$  と  $f^* = f \sqrt{h/g} (= \sqrt{\tilde{h}})$  を用いれば、これは

$$\lambda^* = \frac{\tilde{\lambda}_m}{f^{*2}} + C_1 \frac{1}{f^{*2}} (f^{*2} - \tilde{h}_c)^\delta + \frac{C_2}{f^{*2(1-\epsilon)}}, \quad (4.3)$$

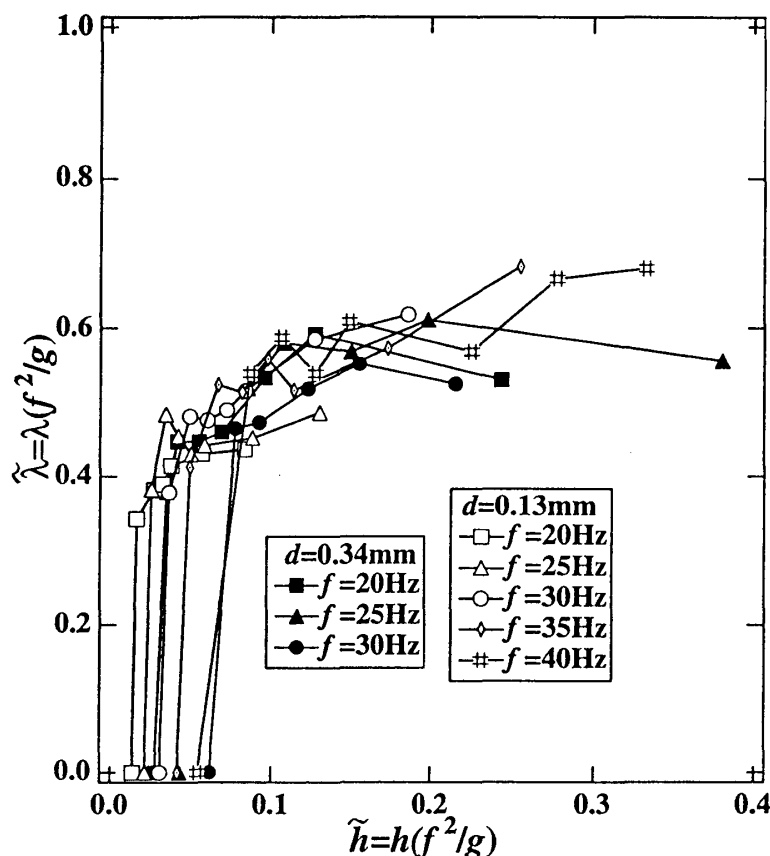


図 4.6: 波長の層厚依存性 層の自由落下距離  $g/f^2$  での無次元化.

となる。式 (4.2) で図 4.5 を表現するために、 $0 < \delta < \epsilon < 1$  かつ  $\hat{h}_c = constant$  とする。 $\hat{h}_c = constant$  は、波の発生が主として層が何層あるかによって定められるという“粒子性”の表れである。

ここで、 $\hat{h}_c = constant$  であることと、 $\tilde{\lambda}_m$  が  $f$  にほとんど依存しないことを考慮すると、波が形成された後の  $\hat{\lambda}$  が  $d$ 、 $f$  の増加に伴い減少していることと (図 4.5)、 $\tilde{h}_c$  が  $d$  と  $f$  に依存して増加すること (図 4.6) が矛盾なく説明出来る。

粉粒層の層厚がある臨界を超えると、波長  $\tilde{\lambda}$  は最初  $\tilde{h}^\delta$  で増加し、次に  $\tilde{h}^\epsilon$  に依存して増加する。この二つのべきの遷移点は明かではないが、式 (4.3) と図 4.3 を比べると、“tail region” (図 4.3 において  $f^* > 0.64$  でべきが小さい領域) が、第 3 項に対応していることが分かる。この領域では  $\alpha \approx -0.5$  であるから  $\epsilon = (\alpha + 2)/2 \approx 0.75$  となる。これは、厚い粉粒層でのマクロスコピクな振る舞いに対応している。流体力学における非粘性浅水波の分散関係ではこのべきが  $1/2$  である。この  $\epsilon$  の違いは、粉粒層における“実効層厚”に依るものと考えられる。他方、式 (4.3) の第一項、 $1/f^2$  の領域は図 4.3 中に見出すことができない。これは、この領域は粉粒層が非常に薄いところに相当しており、そこでは、個々の粒子の跳躍が非常に大

きい為、集団的な振る舞いである ripple patterns を形成できないことに依るものと考えられる。そして、図 4.3 の  $0.11 < f^* < 0.64$  において ripple patterns が形成される領域では、粒子一つ一つの運動が反映する“ミクロスコピック”な振る舞いと、集団的な“マクロスコピック”な振る舞いが、べき法則の中に現れている。この領域を特徴づけるべきを実験的に求めると、図 4.3 と式 (4.3) の比較から  $\alpha \approx -1.47$  で  $\delta = (\alpha + 2)/2 \approx 0.27$  となる。

“tail region”でのべき  $\alpha \approx -0.5$  を、次の流体モデルで解釈する。粒子系ではエネルギー散逸が無視できないことを考慮して、この粉粒層を深さ  $h$ 、動粘性率  $\nu$  の粘性流体と考える。自由表面の変位  $\zeta$  および  $x$  方向の速度  $u$  を満たす方程式は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.5)$$

となる。ここでは容器に固定した座標軸 ( $x, z$  座標) を用いるため、単位体積当たりの粉粒層に鉛直方向へ働く力  $\mathbf{F}$  は  $-\nabla U = -\rho(2\pi f)^2 a \sin(2\pi ft)$  ( $\rho$  は粉粒層の密度) となり、外力は圧力項に加えられる。この力は運動方程式の  $x$  成分には影響せず、粉粒層の波を定常的に保つことのみに取り入れられると考える。この系での分散関係は  $\omega = 2\pi f$  として、

$$k^2 = \frac{\omega^2}{gh - i\nu\omega} \quad (4.6)$$

となる。これより、 $f^*(\equiv f\sqrt{h/g}) \ll 1$  の時  $k^2 \approx \omega^2/(gh)$ 、すなわち  $\lambda^*(\equiv \lambda/h) \propto 1/f^*$ 。また  $f^* \gg 1$  の時  $k^2 \propto i\omega/\nu$ 、すなわち  $\lambda \propto 1/\sqrt{f^*}$  となり、図 4.3 の“tail region”のべきと非常に近い値を取る。つまり、粉粒層が厚くなった場合、その上方の層が形成する“ripple patterns”は、粘性流体の波動と類似した動きをしていると考えられる。

#### 4.3.6 第4章のまとめ

以下にこの章で示したことをまとめる。

- 粉粒体定在波に関して3つの無次元化を行い、次のような結論を得た。
  - ・ 波が発生するかしないかは粒径  $d$  による無次元化が適当である。
  - ・ 波が安定して形成されている時は、層厚  $h$  或いは粉粒層の自由落下距離  $g/f^2$  が適当である。
- 層厚が大きい時、ripple の形成に関与するのは層の上方の部分だけであり、その下は固体的な振る舞いをする。
- 分散関係はべき法則を示しており、またそのべきは、外部加振加速度に依存している。

## 第5章 鉛直に加振した粉粒体薄層の座屈と曲げ波

この章では、第4章で観測された undulation patterns (図 4.1- (e)) について調べる。

### 5.1 目的

粉粒体薄層を鉛直に加振すると、さざ波のようなパターンの他に弾性板の両端から中央に向けて力をかけた時に見られる bending に似た現象が現れる。このパターンについて外部加振条件依存性、容器サイズ依存性を調べ、連続体モデルとの比較を行う。

### 5.2 実験

§§3.1 と同様の実験装置で実験を行う。ただし、今回は粉粒層として

- ガラスビーズ 粒径  $d=0.2\text{mm}\sim 0.5\text{mm}$
- 胡麻  $2.7\text{mm} \times 1.6\text{mm} \times 1.0\text{mm}$
- アルミニウムビーズ 粒径  $d=0.11\text{mm}$

を用いた。容器は奥行き  $W=8\text{mm}$ , 高さ  $H=91\text{mm}$ , 横幅  $L=146, 91, 60, 45, 30\text{mm}$  の5種類の薄型直方体容器(図 5.1)を使用した。

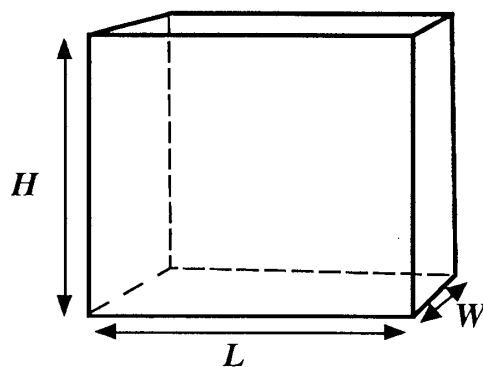


図 5.1: 薄型直方体容器.

## 5.3 結果

### 5.3.1 出現するパターンのモード分類

観測結果は以下の通りである。(i) 無次元加速度  $\Gamma_0 = a(2\pi f)^2/g \approx 2$  以下では容器に対する粉粒層の相対的な動きは観測されない。(ii)  $\Gamma = \Gamma_0 \sim \Gamma_1 \approx 4$  で粉粒層は浮遊状態を取り始め、粉粒層全体に対流を引き起こす。なお、この  $\Gamma_1$  は層厚  $h$  とともに増加する。(iii)  $\Gamma \approx \Gamma_1$  では、粉粒層表面にうねりが生じ始めるが、層全体としては対流の動きも認められる。(iv)  $\Gamma > \Gamma_1$  になると、粉粒層は ripple patterns 図 4.1-(a) を引き起こす。(v)  $\Gamma$  をさらに増加させると、粉粒層全体がうねり、図 5.2 のような undulation patterns を引き起こす。これらの undulation に対して  $A_n, S_n$  とパターンを分類した。ここで、 $A$  および  $S$  は層の中心に対して変形が反対称型および対称型であることを示し、添字の  $n$  はうねりの個数を表す。

### 5.3.2 undulation の時間変化

図 5.3 は、層厚  $h=6.8\text{mm}$  の胡麻の粉粒層を横幅  $L=91\text{mm}$  の容器へ入れ、 $f = 30\text{Hz}$ ,  $a = 2.2\text{mm}$  で加振したときの undulation のスナップショットである。(a)-(c) までは外部振動周期の 2 周期分で、その間に undulation の腹の部分と節の部分を入れ替えている。つまり、undulation は外部振動周期の 2 倍の周期を持つ。

次に、undulation が出現するときの粉粒層底面と容器底面の位置を図 5.4 に示す。undulation の腹の部分が自由落下している間、節の部分は容器と一体となって押し上げられ、その間 ( $\phi < t < \phi + T/2$ ) に容器から運動量を得る。次に、運動量を得た節の部分は自由飛行し undulation の腹となり、他方、自由落下した腹の部分は容器と非弾性衝突をして節となる。図 5.4 の (c) から (f) が外部振動周期の一周期分で、(f) から (i) の間に、節と腹の位置が半波長ずれた状態で同様のプロセスが続く。また、谷と山の間で水平方向の移動がある ripple に対して、undulation では水平方向の移動がほとんど観測されない。

なお、ripple patterns が生じている場合は、層が容器に押し上げられる時間  $t_r$  は  $T/2 < t_r$  である。



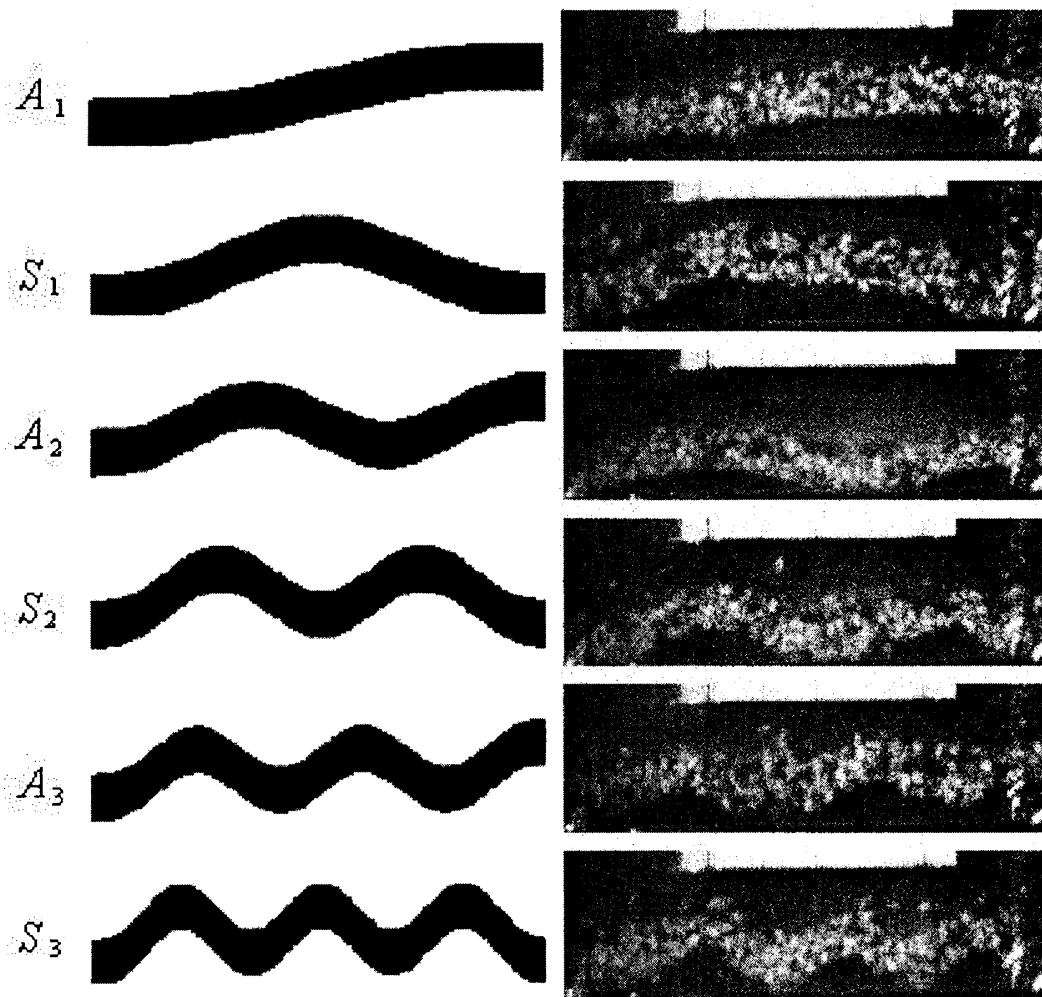


図 5.2: 曲げ波のモード分類.

右欄は胡麻の粉粒層（層厚  $h = 6.8\text{mm}$ ）を加振した時の観測結果:  
 $(A_1)f = 20\text{Hz}$ ,  $a = 2.60\text{mm}$ ,  $\Gamma = 4.18$ ;  $(S_1)f = 27\text{Hz}$ ,  $a = 2.52\text{mm}$ ,  
 $\Gamma = 7.41$ ;  $(A_2)f = 30\text{Hz}$ ,  $a = 1.40\text{mm}$ ,  $\Gamma = 5.07$ ;  $(S_2)f = 30\text{Hz}$ ,  
 $a = 2.02\text{mm}$ ,  $\Gamma = 7.32$ ;  $(A_3)f = 30\text{Hz}$ ,  $a = 2.33\text{mm}$ ,  $\Gamma = 8.44$ ;  
 $(S_3)f = 30\text{Hz}$ ,  $a = 2.64\text{mm}$ ,  $\Gamma = 9.56$ . Mode  $S_0$  は曲げが生じない  
 で層が全体として上下運動しているものに対応する。

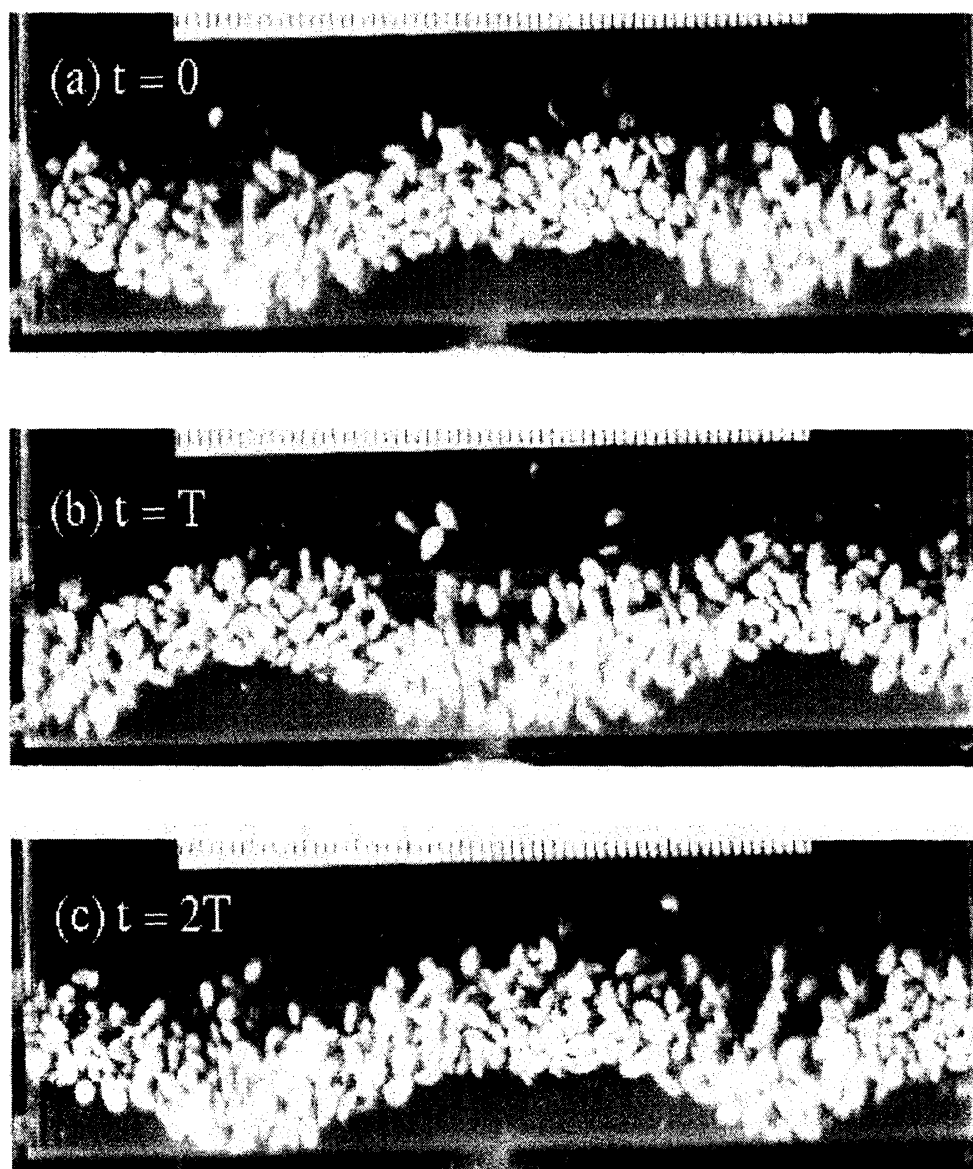


図 5.3: undulation のスナップショット.

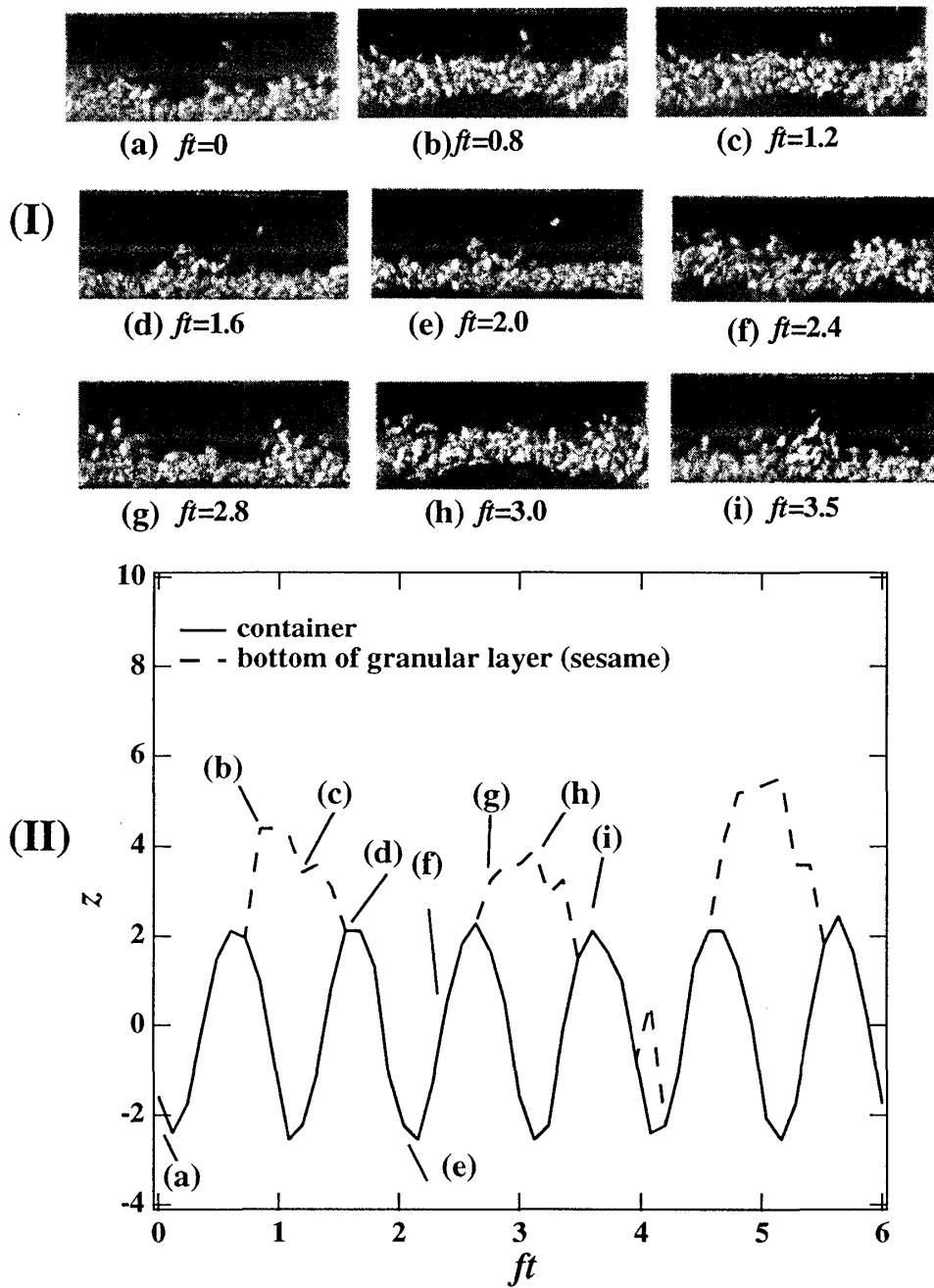


図 5.4: undulation の腹と容器の関係.

(I) 胡麻の粉粒層を  $h=4.0\text{mm}$ ,  $f=30\text{Hz}$ ,  $a=2.3\text{mm}$  で加振した時に現れる undulation のスナップショット。

(II) 容器底面と粉粒層の位置関係。

図中の (a) から (i) はスナップショット (I) に対応した時間である。

## 5.4 議論

### 5.4.1 粉粒体薄層上に生じる曲げ波と弾性板の曲げ波

ある程度の厚みを持った粉粒体振動層の挙動と、弾性板の挙動 [35] にはアナロジーが認められる。そこで、粉粒体振動層に対してヤング率  $E$  に相当する量を導入する。粉粒体のような離散系はゴムや金属に見られるようなマイクロなバネによる弾性とは異なるので、ヤング率の解釈に注意が必要であるが、加振を受けた粉粒層は、構成粒子の相対的な動きや、球形でない粒子からなる粉粒層の場合は粒子の配向変化が、粉粒層内部で圧縮/膨張となって現れ、密度波という弾性体特有の性質を示す。その密度波が粉粒層を伝わり弾性的な挙動を示すと思われるので、ここでも形式的に弾性定数としてヤング率を導入する。

粉粒振動層を、横幅  $L$ 、奥行き長さ  $W$ 、厚さ  $h$ 、密度  $\rho$ 、ヤング率  $E$  の弾性板と考える。なお、 $h$ 、 $\rho$ 、 $E$  は一定とする。このとき、粉粒層に生じる波は以下のように記述できる。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{EI}{S} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (5.1)$$

なお、 $u$  は板の変位 (小さいとする)、 $I = (h^3 W / 12)$  は弾性体の幾何学的慣性モーメント、 $S$  は断面積  $hW$  である。undulation の観測結果によると、容器の両端  $x = \pm L/2$  において粉粒層は容器壁に対して垂直で、モーメントが働かないので境界条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (5.3)$$

となる。

以上を解くと、反対称型の解

$$u_n^A = a_n \cos(\omega_n t + \phi) \left\{ \sinh\left(\frac{\alpha_n L}{2}\right) \sin(\alpha_n L x) + \sin\left(\frac{\alpha_n L}{2}\right) \sinh(\alpha_n L x) \right\}, \quad (5.4)$$

と対称型の解

$$u_n^S = b_n \cos(\omega_n t + \phi) \left\{ \cosh\left(\frac{\beta_n L}{2}\right) \cos(\beta_n L x) + \cos\left(\frac{\beta_n L}{2}\right) \cosh(\beta_n L x) \right\}, \quad (5.5)$$

を得る。ここで、 $\alpha_n, \beta_n = (12\rho\omega_n^2/Eh^2)^{1/4}$  であり、 $a_n$  と  $b_n$  は任意定数である。また振動の固有値は  $\alpha_n L = 4.7300407, 10.9956079, 17.2787597, \dots$ 、 $\beta_n L = 7.8532049, 14.1371655, 20.4203522, \dots$  である。弾性体の曲げ波の例を図 5.2 の左欄に示す。

5 種類の容器 ( $L=30\text{mm}, 46\text{mm}, 60\text{mm}, 91\text{mm}, 146\text{mm}$ ) に 3 種類の粉粒体 (ガラスビーズ、アルミニウムビーズ、胡麻) をそれぞれ入れて加振し、undulation を観測した。それら全てのデータを、縦軸に undulation の波数  $L/\lambda$ 、横軸に弾性板中に生じる圧縮波  $v_c \equiv \sqrt{E/\rho}$  と容器

から受ける速度  $v_i \equiv 2\pi fa$  の比  $v_c/v_i$  をとったものが図 5.5 である。これによると、容器サイズ  $L$  や層を構成している粒子が異なるにも関わらず、全てのデータがほぼ  $L/\lambda \propto (v_c/v_i)^{-1/2}$  の関係式に従っていることがわかる。つまり、出現する undulation のタイプは容器サイズ  $L$  と  $v_c/v_i$  で決定されている。

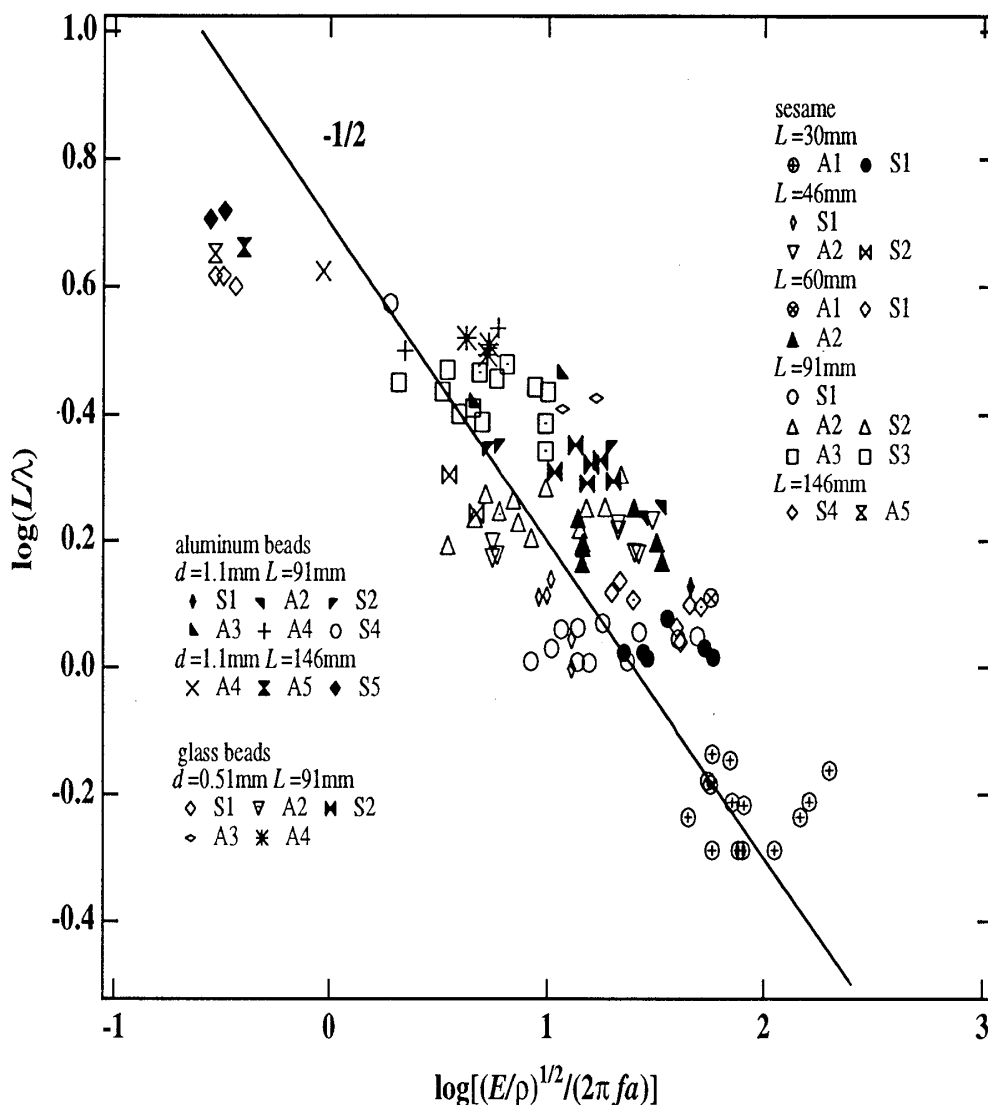


図 5.5: Undulation のモードマップ.

以上の結果に対して、定性的な説明を試みる。容器から速度  $v_i$  を得た粉粒層は、鉛直方向 ( $u$  方向) および水平方向 ( $x$  方向) へ膨張する。しかし、粉粒層の自由表面は上層部だけであり、横方向への広がりには容器の境界壁によって遮られ、圧縮されることになる。もし、圧縮波の速度  $v_c$  が外部から得る速度  $v_i$  よりも非常に大きく、容器サイズ  $L$  が小さければ、圧縮波  $v_c$  はすぐに粉粒層全体に広がり、 $A_1$  や  $S_1$  タイプの undulation を形成する。なお、臨界圧縮波速度は  $v_{cj} = 2\sqrt{3}fL^2/(hC_j^2)(C_j(=\alpha_jL$  あるいは  $\beta_jL)$  は前述した固有値) である。それぞれのタイプ

の bending pattern およびそれによって励起される undulation patterns が出現するために必要な速度  $v_c$  は固有値  $C_j$  の二乗に反比例し、容器サイズ  $L$  の二乗に比例している。 $S_1$  や  $A_1$  タイプに対応する固有値は  $S_n$ 、 $A_n$  ( $n > 2$ ) タイプのそれよりも小さいので、大きな容器では  $A_1$  や  $S_1$  タイプの undulation の形成に必要な臨界速度は非常に大きくなる。これが、水平方向に大きな長さを持つ容器で  $A_1$  や  $S_1$  タイプの undulation が観測できない理由と思われる。一例を挙げると、我々の行った実験では、容器サイズ  $L=90\text{mm}$ 、 $f \approx 30\text{Hz}$ 、 $a \approx 2.0\text{mm}$  の加振条件で  $S_1$  タイプの undulation が出現する。 $S_1$  タイプの undulation は容器中央部に位置する節の部分が容器から運動量を得て、中央部から両サイドへ圧縮波を伝える。つまり、圧縮波が伝播する速度は  $v_c \approx L/(2T) \approx 2.7\text{m/s}$  である。他方、鉛直方向へ伝わる速度は  $v_i \approx 2\pi a f \approx 0.4\text{m/s}$  である。つまり、undulation が出現する範囲では圧縮波が伝播する速度が、鉛直方向へ伝わる速度を大きくしている ( $v_i \ll v_c$ )。また、ここで求めた圧縮波の速度  $v_c$  から undulation が出現するときの粉粒層のヤング率を求めると、 $E = \rho v_c^2 \approx 2 \times 10^4 [\text{Pa}]$  となる。この値は、鉄 ( $E \approx 2 \times 10^{11} [\text{Pa}]$ ) やゴム ( $E \approx 3 \times 10^6 [\text{Pa}]$ ) の値 (理科年表より) に比べて小さい値であり弾性体の振る舞いをする粉粒体振動層は非常に柔らかい弾性体であることが確認できた。

次に先に述べた弾性板の座屈現象を参照しながら、図 5.5 のベキについて考察を行う。弾性板の両端に板に平行で互いに逆向きの力を加えると、その大きさがある臨界値を超えた時に板はたわみ座屈を生じる。板の変形が小さい場合、この変形を決める方程式は

$$-EI \frac{d^2 u}{dx^2} = Fu \quad (5.6)$$

で与えられる。境界条件  $u'(\pm L/2) = 0$  を課してこの方程式を解くと、

$$u = u_0 \sin \sqrt{\frac{F_n}{EI}} x \quad (5.7)$$

となる。なお、 $F_n = EI((2n+1)\pi/L)^2$  で、 $n$  は弾性板に生じる曲げ波の個数、 $u_0$  は任意定数である。それゆえ、臨界応力  $\tau_n$  は

$$\tau_n = \frac{F_n}{S} = \frac{E}{12} \left( \frac{(2n+1)\pi h}{L} \right)^2 \quad (5.8)$$

と表される。気体分子運動論とのアナロジーより、鉛直方向に振動する容器からのエネルギー供給にがあると粉粒体全体は  $\delta L = \alpha T^* L$  だけ膨張すると考えられる。また、“粉体温度”  $T^*$  は  $1/2 \rho v_i^2 = 3/2 k^* T^*$  と表され、 $\alpha$  は膨張係数、 $k^*$  はある定数である。これより、応力  $\tau$  は

$$\tau = E \frac{\delta L}{L} = E \alpha T^* = E \alpha \frac{\rho v_i^2}{3k^*} \quad (5.9)$$

で与えられる。

他方、弾性板の曲げの曲率半径を  $R$ 、中心角を  $\Theta$  とした時、波長  $\lambda \approx R\Theta$  である (図 5.6)。両端から板の中央に向かって  $\tau S$  の力で押された弾性板には、板の中心部が  $\delta u \approx R(\Theta^2/8)$  上

昇し、モーメント  $M = \delta u \tau S = EI/R = (R\Theta^2/8)\tau S$  が働く。それゆえ

$$\frac{2}{3}Eh^2 = \tau\lambda^2 \quad (5.10)$$

となる。また、粒子が運動する速度  $v_p$  と応力  $\tau$  の関係、 $v_p = \tau/\sqrt{E\rho}$  を用いて

$$\frac{v_c}{v_p} = 12 \left[ \frac{1}{(2n+1)\pi} \right]^2 \frac{L^2}{h^2} \quad (5.11)$$

を得る。以上の式 (5.8)~式 (5.11) をまとめると

$$\frac{L}{\lambda} = \sqrt{\frac{\alpha E}{24k^*}} \pi(2n+1) \sqrt{\frac{v_p}{v_c}} \propto \left( \frac{\sqrt{E/\rho}}{2\pi f a} \right)^{-1/2} \quad (5.12)$$

となる、なお  $v_p \approx v_i$  とした。これが、図 5.5 のベキを表していると思われる。なお、 $v_i$  が非常に大きくなると応力が高まり、粉粒層のうねりの数も増加する。それに伴って粉粒層の長さが増加し、凸部では粒子間隔が広がって連続体近似が成り立たなくなってくる。この状態では着目するモードの波数に対応する  $v_c/v_i$  が小さくなると考えられる。これが図 5.5 の  $S_4, S_5, A_5$  などのデータが関係式 (5.12) からはずれてくる理由と思われる。

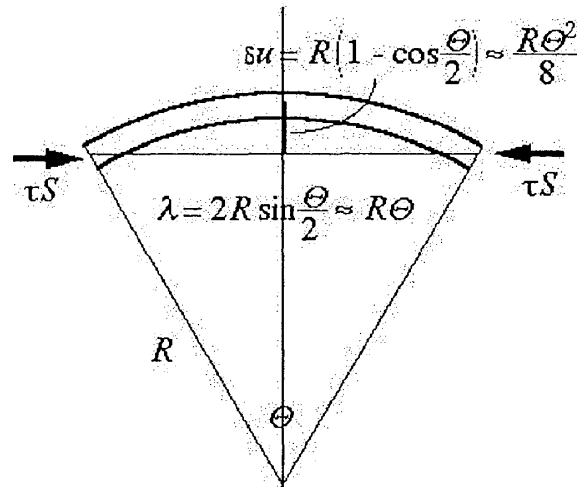


図 5.6: 座屈 (buckling) の模式図.

#### 5.4.2 undulation モードの外部振動条件依存性：底面からの力積と鉛直方向の散逸

undulation patterns が発生するメカニズムはまだ不明であるが、パターン分岐ダイアグラムについては定性的に解釈することが可能である。そのために、横軸を  $f^2(h/g)$ 、縦軸を  $\Gamma$  としプロットしたもの (図 5.7) を考える。この図は、パターン分岐ダイアグラムの  $a-h$  平面を見たものに相当する。ここで、考える単位体積の粉粒層が容器から得る力積を見積もる。§§4.2

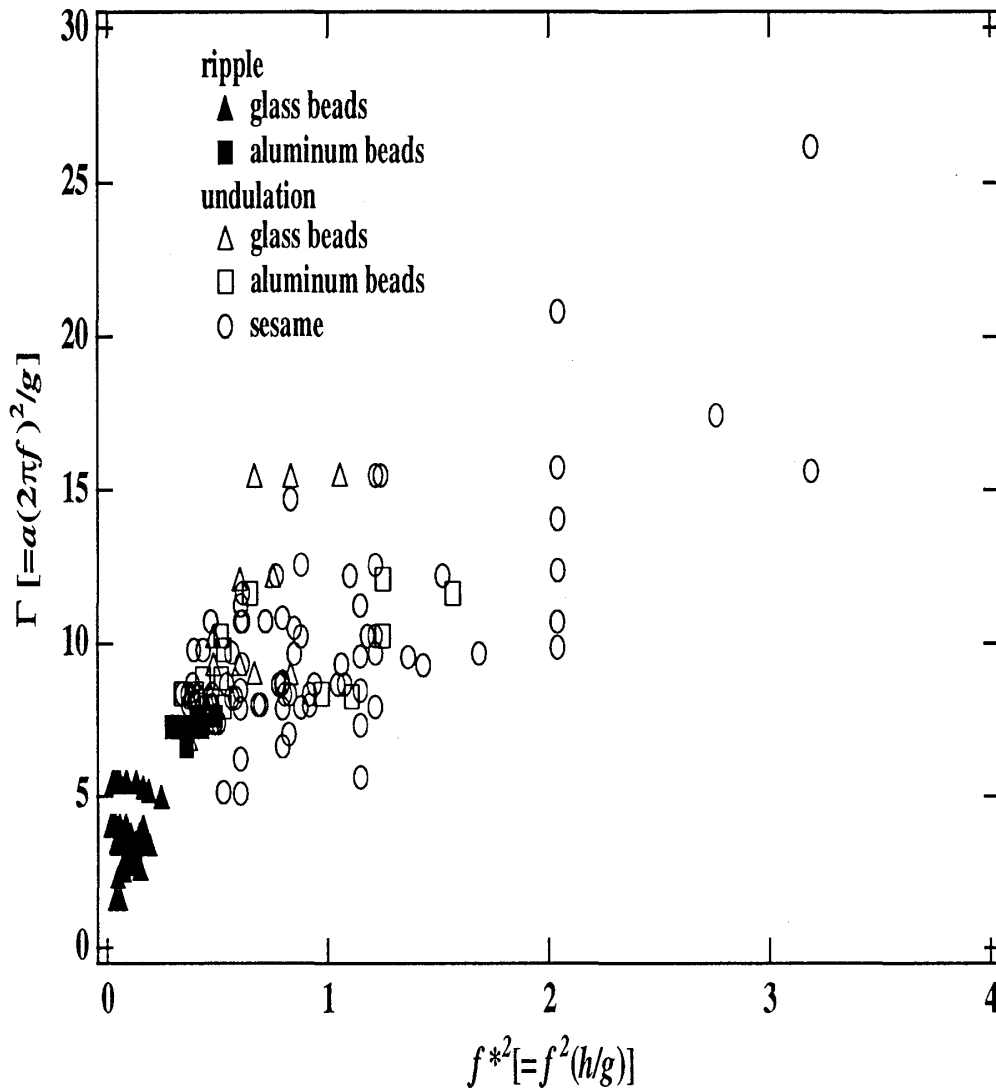


図 5.7: パターン分岐ダイアグラム: 振幅  $a$  - 層厚  $h$  平面.

より、undulation の節の部分は容器から  $\phi < t < \phi + T/2$  の間押し上げられた後自由飛行し腹の部分となるので、粉粒層が容器から得る力積は  $\rho \int_{\phi}^{\phi+T/2} (2\pi fa) \sin(2\pi ft) dt \propto a$  である。つまり、図 5.7 は容器から得る力積の層厚依存性を見ていることになる。他方、力積を得た粉粒層は非弾性衝突をしながら運動量を上層部へ伝えるので、粉粒層の層厚は鉛直方向の散逸の程度を示すパラメタとなる。図 5.7 は、ripple patterns と undulations の出現領域の境界が、アルミニウムのデータを除いて  $f^{*2} \approx 0.3$ ,  $\Gamma \approx 5.5$  であることを示している。

以上に基づくと、図 5.7 は次のように解釈できる。まず、層厚がある臨界値よりも小さく力積も適当な値であれば、粉粒層上層は変形することが可能となり、粉粒層に局所的な変形をもたらす ripple patterns を形成する。他方、層厚が大きければ、力積が大きくても上層は変形できず、粉粒層全体にわたって変形が生じ undulation patterns を形成する。



### 5.4.3 undulation モードの外部振動条件依存性：アスペクト比と伝播速度

第4章において ripple patterns の発生は、層数  $h/d$  で決まると述べてきた。この章ではもう一つの長さスケール  $L$  あるいは、 $\gamma \equiv L/h$  について論じる。

鉛直方向の加振を受けた粉粒層は、鉛直方向だけでなく水平方向へも衝撃を伝える。図 5.8 はパターン分岐ダイアグラムの  $\gamma - f^*$  平面を見たものである。縦軸は層の水平方向の長さ  $L$  と鉛直方向の長さ  $h$  のアスペクト比、横軸  $f^*$  は外部振動の一周期の間に、水平方向へ波の変形が伝わる距離  $\sqrt{gh}T = \sqrt{gh}/f$  を層厚  $h$  で無次元化した値である。また、図中の曲線は  $\gamma = 4.059/f^* + 26.8589$  であり、係数はフィッティングパラメータである。図 5.8 によると、 $f^* > 0.5, \gamma < 37$  で undulation、 $f^* < 0.5, \gamma > 37$  で ripple patterns が出現している。

undulation の出現領域に対して以下のような解釈ができる。容器が一回振動する間に容器から得た衝撃力の波が層内を水平方向に容器幅  $L$  を何往復かし、かつ、鉛直方向には粒子同士の非弾性衝突のため、上層部まで伝わらず上層が変形出来ない時、容器幅に関係した全体的なパターンである undulation が出現する。つまり、 $\sqrt{gh}/f > constant \times L$ 、すなわち  $\gamma < constant/f^*$  の時 undulation が形成されると考えられる。他方、粉粒層内を非弾性衝突して伝播する衝撃力が上層を動かす程大きく、また水平方向へは容器幅全体まで衝撃力が伝わらなければ、層内の局所的な変化が生じ ripple patterns が形成される。このような状態は  $\gamma > \gamma_c$  かつ  $\gamma > 1/f^*$  を導く。実際我々の系では、ripple が観測される典型的な加振条件は  $f \approx 30\text{Hz}$ 、 $h \approx 2\text{mm}$ 、 $L \approx 90\text{mm}$  である。この条件では、 $\gamma \approx 45$ 、 $1/f^* \approx 2.3$  となり前途した条件を満たす。

アルミニウムによる ripple が出現する領域は、undulation が出現する領域に移動している。これは層厚が大きい領域で ripple が出現しているということにあたる。第4章で述べたように、ripple が出現するためには、粒子の集団的運動が、個別運動を卓越する必要がある、この臨界層数は  $h/d \approx 2 \sim 3$  である。そのため、粒径 1.1mm のアルミニウムで ripple が出現するための臨界層厚は約 3mm となり、今回用いたガラスビーズの臨界層厚の 2~5 倍にあたる。これが、アルミニウムによる ripple 領域が undulation 領域と重なる理由と考えられる。

また、アルミニウムでは ripples と undulations の領域が部分的に重なり、明確な領域の分離が見られなかった。その理由の一つとして粒径の一様性が考えられる。ガラスビーズでは粒径分布の標準偏差がほぼ 17% であるのに対して、アルミニウムの粒径分布の標準偏差は 4% 以下である。均一に揃った粉粒体では結晶化が起きやすく、その場合には粒子同士の相互作用が遠方まで伝わって、undulation のようなサイズの大きいパターンが出来やすい。2つのパターン領域の重なりは結晶化の有無と関係していると推測される。

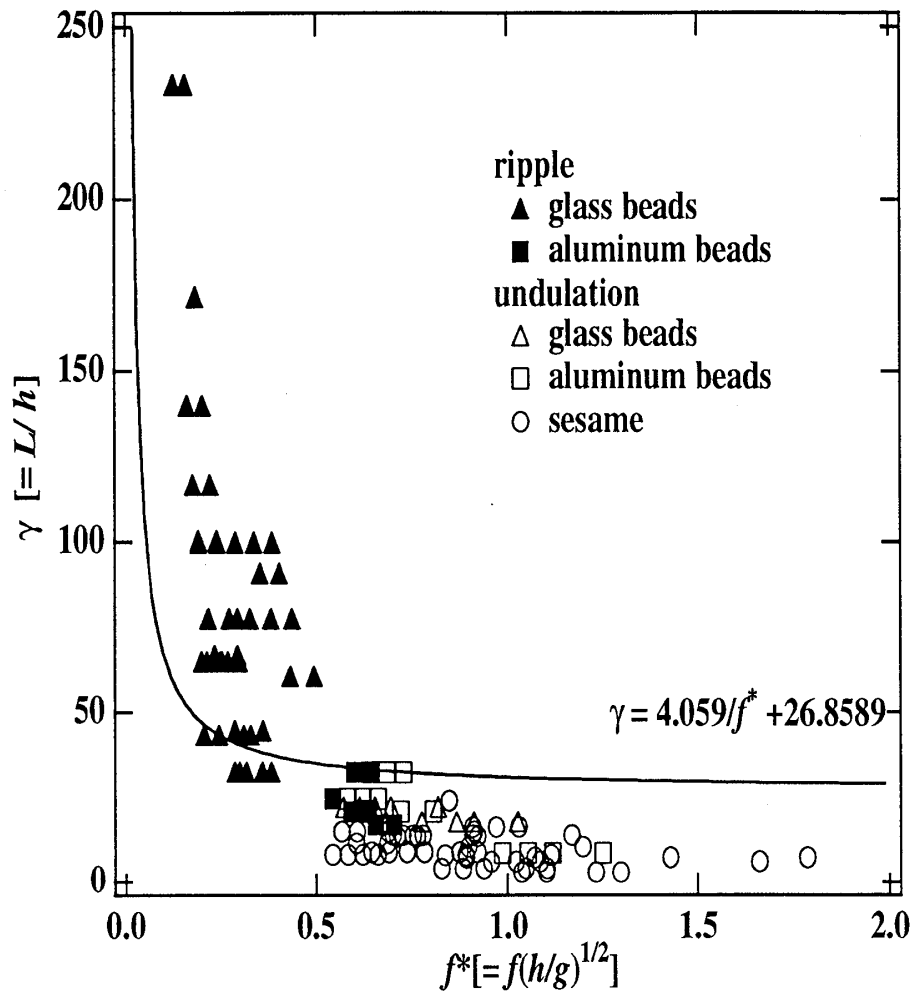


図 5.8: パターン分岐ダイアグラム :  $\gamma$ - $f^*$  平面.

#### 5.4.4 第 5 章のまとめ

排除体積効果や摩擦などにより容器から得た衝撃は、粉粒層内に鉛直方向だけでなく水平方向にも伝播する。また、粉粒層内の粒子同士は非弾性衝突をするため、鉛直方向の散逸は層厚に依存する。鉛直方向への伝播速度を  $v_i \equiv 2\pi fa$ 、水平方向への伝播速度を  $v_c \equiv \sqrt{E/\rho}$ 、また粉粒体が形成する波の変形が伝わる速度を  $\sqrt{gh}$  とする。なお、混乱をさけるために、粉粒体層内を伝播する速度を“速度波”、粉粒体層が形成する変形を“変形波”と定義する。以上を考慮すると、以下のことが言える。

- “変形波”が容器壁まで伝わる時、容器壁に依存した global patterns が生じる。また、山と谷の入れ替えは重力加速度による落下および容器底面と粒子が衝突することによって生じる。その時の波の変形は容器が 1 回振動する間に容器壁まで届き、容器壁によって押し戻され圧縮波となり、容器壁から層全体が押される。容器壁によって押された粉粒

体は、弾性板における座屈現象に似た現象を示す。なお、生じる圧縮波の速度の大きさによって undulation のモードが分類される。なお、各モード  $n$  に対応した圧縮波の速度を  $v_c^{(n)}$  とする。

- ・  $\sqrt{gh} < L/T \longleftrightarrow$  波の変形が容器壁まで伝わる。
- ・  $v_c \gg \sqrt{gh} \rightarrow$  容器壁まで伝播した速度が、容器壁に押されて座屈現象が粉粒体内で生じる。

すなわち、

$$v_c^{(1)} > \dots > v_c^{(n)} > \sqrt{gh} > L/T = Lf \propto L \frac{v_i}{a} \quad (5.13)$$

の時、global pattern である undulation が出現する。また、 $n \gg 1$  で連続性が崩れる。

- 容器が 1 回振動する間に “変形波” が容器壁まで伝わらないとき、容器壁に依存しない local pattern が生じる。また、その時鉛直方向へ伝わる速度  $v_i$  は容器が 1 回振動する間に層上面を変形させる。水平方向へ伝播する速度  $v_c$  は、ripple pattern の交互に繰り返される山と谷の間の局所的な流動運動に変換されてしまい、容器壁まで伝わらない。

- ・  $\sqrt{gh} < L/T \propto L \frac{v_i}{a} \longleftrightarrow$  波の変形が容器壁まで伝わらない。

## 第6章 まとめと展望

第3章から第5章までの結果をまとめ、加振を受けた粉粒体薄層上に出現するパターンについて考察する。

まず、第3章では層厚に対して十分に広い面積をもった粉粒体薄層を加振したときに見られる平面パターンについて系統的に調べた。従来知られていた3回、4回、6回の対称軸を持つ周期パターンに加えて、8回、12回などの対称性を持つ準結晶パターンの存在を明かにした。

次に、第4章、第5章ではどのようにして波長や波数ベクトルが決まるのかを調べるために、奥行き方向に狭い容器へ粉粒体を入れ、パターンの断面に相当する準2次元系を作り加振実験を行った。鉛直方向に加振を受けた粉粒層は、鉛直方向と水平方向へ衝撃を伝える。rippleやundulation等のパターンが現れるためには粒子同士がばらばらに運動するのではなく非弾性衝突による協調的な集団運動をする必要がある。まず、パターンが発生するためには少なくとも層数 $h/d$ が2~3層必要である。集団的な振る舞いをするのに十分な層数 $h$ になると、容器から得た衝撃は鉛直方向へ伝わり、上層部を変形させ ripple patternsを生じる。ripple patternsの波長は層厚 $h$ と振動数 $f$ に依存しており、層がある程度厚くなった場合、ripple patternsの形成に関与するのは層の上層部のみである。また、分散関係より ripple patternsは集団的でマクロな振る舞いと発生時の粒子的でミクロな振る舞いの間の“メソスコピック”な領域に出現していることが明らかになった。

層厚が臨界値より小さい場合、水平方向へ伝わる衝撃力は ripple patternsの交互に繰り返される山と谷の間の局所的な流動運動に変換されてしまい、容器サイズの影響が無いことが明らかになった。他方、層厚が大きいと鉛直方向へ伝わる衝撃力は粒子同士の非弾性衝突によって減衰してしまい、上層部を変形させることができなくなる。これによって、外部から与えられた衝撃は上方の運動として解放されずに、層全体の圧縮という形で残される。水平方向へ伝わる衝撃力は ripple patternsの山と谷に閉じこめられることなく層全体に伝わり undulationを形成する。さらに undulationは弾性板を両端から中央に向けて力を掛けたときに見られる bucklingや bendingに非常によく似ていて、そのモードマップは弾性体のモデルで分類することが出来る。これは、上層部が変形出来なくなった時に衝撃により膨張した層が容器の両壁に押され、圧縮力が働いたためと考えられる。また、このモデルから得られるヤング率は  $E \approx 2 \times 10^4$  [Pa] で、鉄 ( $E \approx 2 \times 10^{11}$  [Pa]) やゴム ( $E \approx 3 \times 10^6$  [Pa]) に比べて非常に小さい値であり、弱い弾性を示す。なお非凝集系にも関わらず、弾性体モデルによる分類が可能であるということは、非凝集系の粉粒体間に何らかの“弾性”が存在すると考えることができ、これは粒子間、あるいは容器壁との接触摩擦によるものであると考えられる。

以上の研究よりこのような粉粒体薄層は“粒子的”、“流体的”、“弾性体的”な様相が共存するために複雑な系であることが改めて浮き彫りにされた。

ところで、これまでに明かになっている、undulation の特徴は、

- 水平方向の粒子の移動がほとんどない (第 5.3.2 節)
- 底面から得る力積によって、undulation の腹の部分が持ち上げられる (第 5.4.2 節)
- 粉粒体間内部に生じる圧縮波によって undulation のアーチ構造が形成される (第 5.4.3 節)

である。しかし、

- buckling, bending model では、容器底面を考慮に入れていない。

従って、今後はこれら 4 つの要素をあわせた理論解析が課題となる。

実験における今後の課題は、これまでの実験観測を精密化するために個々の粒子運動を追い、粉粒層内部のミクロな動きを調べることである。具体的には、マーカー粒子を粉粒層に入れその軌跡を追うだけでなく、層全体の速度分布を調べ内部での動きと定在波の動きの関係を見る。さらには、ここで明らかになったパターンの断面内の定在波の形成メカニズムに基づいて、平面パターンの波数ベクトルの空間分布や時間変動を明らかにし、格子模様や縞、六角形などのセル状平面パターンや準結晶パターンの形成過程の解明とその制御技術を確立することが考えられる。

## 謝辞

本研究に関して、度重なる議論及び指導をして下さった佐野理教授、有用な意見を下さった高木隆司教授、江村恒夫教授、岡田利男教授、三沢和彦教授に深く感謝致します。

また、様々な面で協力して下さい下さった佐野研究室の皆様に感謝致します。

## 関連図書

- [1] H. M. Jaeger, S. R. Nagel & R. P. Behringer : *Physics Today* **49** (1994) 32.
- [2] J. Duran (訳 中西秀, 奥村剛) : 粉粒体の物理学, 吉岡書店 (2002).
- [3] M. Faraday : *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **52** (1831) 299.
- [4] 寺田寅彦 : “自然界の縞模様”『科学』 **3** (1933) 77.
- [5] R. A. Bagnold(訳 金崎 肇) : 飛び砂と砂丘の理論, 創造社 (1963).
- [6] P. Bak, C. Tang & K. Wiesenfeld : *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 381 ; *Phys. Rev. A* **38** (1988) 364.
- [7] H. M. Jaeger, C.-h. Liu & S. R. Nagel : *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 40 ; H. M. Jaeger & S. R. Nagel : *Science* **255** (1992) 1523.
- [8] C. H. Liu, S. R. Nagel, D. A. Schecter, S. N. Coppersmith, S. Mjundar, O. Narayan & T. A. Witten : *Science* **269** (1995) 513.
- [9] 佐野 理 : 表面 **36** (1998) 43.
- [10] P. Evesque & J. Rajchenbach : *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 44.
- [11] J. A. C. Gallas, H. J. Hermann & S. Sokolowski : *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1371.
- [12] J. B. Knight, H. M. Jager & S. R. Nagel : *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 3728.
- [13] H. K. Pak & R. P. Behringer : *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1832.
- [14] 早川 尚夫, 那須野 悟 : 現代物理学最前線 1 “粉体の物理” 共立出版 (2000) 57.
- [15] Y. H. Taguchi : *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1367.
- [16] F. Melo, P. Umbanhowar and H. L. Swinney : *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 172.
- [17] F. Melo, P. Umbanhowar and H. L. Swinney : *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3838.
- [18] K. M. Aoki & T. Akiyama : *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 4166.

- [19] C. Bizon, M. D. Shattuck, J. B. Swift, W. D. McCormick & H. L. Swinney : *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 57.
- [20] C. Bizon, M. D. Shattuck, J. B. Swift : *Phys. Rev. E* **60** (1999) 7210.
- [21] Sung Joon Moon, M. D. Shattuck, C. Bizon, Daniel I. Goldman, J. B. Swift, & H. L. Swinney : *Phys. Rev. E* **65** (2002) 011301.
- [22] L. S. Tsimring & I. S. Aranson : *Phys. Rev. Lett* **79** (1997) 213.
- [23] F. Melo, P. Umbanhowar and H. L. Swinney : *Nature* **382** (1996) 793.
- [24] <http://nplab.usach.cl/html/research/granular1.html>
- [25] E. Clément, L. Vanel, J. Rajchenbach & J. Duran : *Phys. Rev. E* **53** (1996) 2972.
- [26] T. H. Metcalf, J. B. Knight & H. M. Jaeger : *Physica* **A236** (1997) 202.
- [27] O. Sano, A. Ugawa & K. Suzuki : *Forma* **14** (1999) 321.
- [28] P. B. Umbanhowar & H. L. Swinney: *Physica* **A288** (2000) 344.
- [29] A. Ugawa, O. Sano : *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** (2002) 2815.
- [30] S. Douady, S. Fauve & C. Laroche : *Europhys. Lett.* **8** (1989) 621.
- [31] W. S. Edwards & S. Fauve : *J. Fluid Mech.* **278** (1994) 123.
- [32] P. B. Umbanhowar, F. Melo & H. L. Swinney : *Physica* **A249** (1998) 1.
- [33] A. Ugawa, K. Suzuki & O. Sano : *Proc. 4th Inter. Conf. Micromech. Granular Media* (2001) 537.
- [34] 鶴川 亜希子 : 東京農工大学 修士論文, 2000 年
- [35] S. Timoshenko & J. N. Goodier : *Theory of Elasticity* (McGraw-Hill, New York, 1951)