Fractal and Non-fractal Structure with a Typical Scale and the Application to Personal Income Distribution

石川　温（金沢学院大学），穴澤　正宏（東北工大）
鈴木　忠雄（七尾短期大学），友寄　全志（琉球大学）

フラクタルとフラクタルが崩れている領域をあわせ持つ分布は現実世界に多数存在する。それらは一見関連性のない現象のいたる所に現れるので，個々の現象によらない統一した取り扱いが可能ではないかと考えられる。そのような分布に共通した性質を理解するには，個々の現象の微細構造にはよらない，ユニバーサルな捉え方が適しているであろう。我々は本研究で，フラクタルと非フラクタル領域を持つ分布に共通する性質を理解するために,「スケール不変な理論＋典型的スケール」という見方を提案する。

一般的にスケール不変な理論を考えれば，どのようなモデルを採用するかにかかわらずフラクタルを導出することが可能で，これはユニバーサルな性質だと考えられる。さらにスケール不変な理論にスケールを持った項を加えれば，ある領域でのスケール不変性を破ることが可能である。スケール不変な理論とスケールを持った項の選び方は色々あるが，我々はその一つの例として，R^2 項を持った 2 次元量子重力を紹介する。通常の 2 次元量子重力はスケールを持たない理論であり，2 次元面がフラクタル分布することが知られている。そこにスケールを持った R^2 項を加えて理論に典型的スケールを導入すると，そのスケール付近の領域は（フラクタルなベキ分布が崩れて）ワイブル分布で記述される。我々はこのモデルを「個人所得分布」と「論文の引用件数分布」に適用して，理論曲線がそれらの分布を巧く説明できることを示した。このモデルは現実世界の様々な分布を系統的に分析するツールとなる可能性があると考えられる。

Kawai-Nakayama の結果と MINBU 分析を組み合わせると，面積 A の 2 次元面に面積 B の MINBU （最小の境界を 1 つ持った単連結の 2 次元面）が存在する場合の数は,

$$n_A(B) \sim C_0\, A\, B^{\gamma_0-2} \exp\left[-\frac{2\pi}{m^2}\frac{1}{B}(1-h)^2\right] \quad \text{for} \quad 1 \ll B \ll \frac{2\pi}{m^2} \ll A\,, \tag{1}$$

$$\sim C_\infty\, A \left[\left(1-\frac{B}{A}\right)B\right]^{\gamma_\infty-2} \quad \text{for} \quad \frac{2\pi}{m^2} \ll B \leq A/2 \tag{2}$$

で与えられる。ここで C_0，C_∞ は比例定数，h は 2 次元面のハンドルの数，m は R^2 項により導入される結合定数であり，また $\gamma_0 = 2 + \frac{c-12}{6}(1-h)$，$\gamma_\infty = 2 + \frac{c-25-\sqrt{(25-c)(1-c)}}{12}(1-h)$

である（c は 2 次元面上の物質場の数)。典型的スケール $2\pi/m^2$ より大きな MINBU はベキ分布 (2) に従い，小さな MINBU はワイブル分布 (1) に従う。

1997 年，および 1998 年の日本の個人所得分布データ（Aoyama-Souma-Nagahara-Okazaki-Takayasu-Takayasu）に対して，また 1981 年に出版された科学雑誌に掲載された論文 (Institute for Scientific Information)，および Phys. Rev. D vol 11-50 に掲載された論文の引用件数（Render）に対して，ワイブル分布 (1) とベキ分布 (2) が巧くフィットすることを確認した。

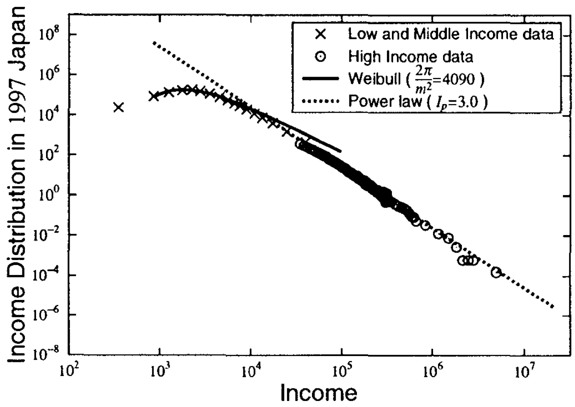

Figure 1: 1997 年日本の個人所得分布

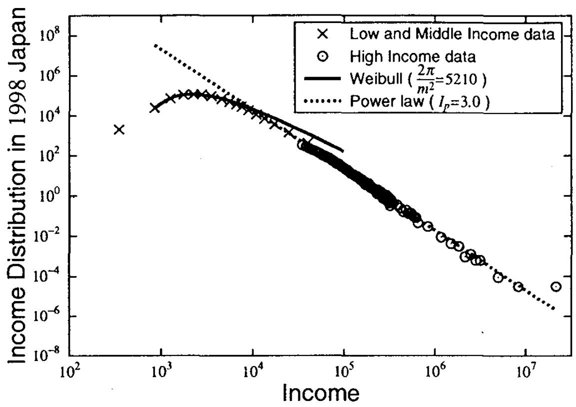

Figure 2: 1998 年日本の個人所得分布

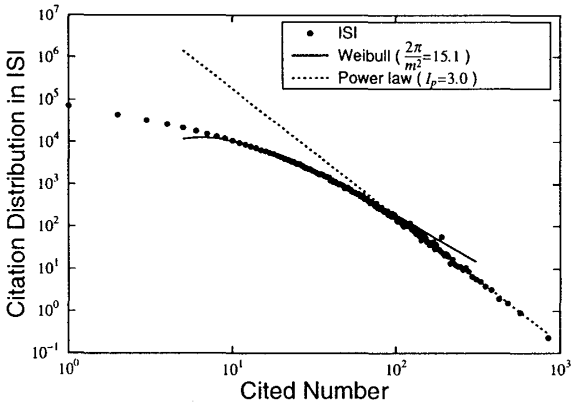

Figure 3: ISI の論文引用件数分布

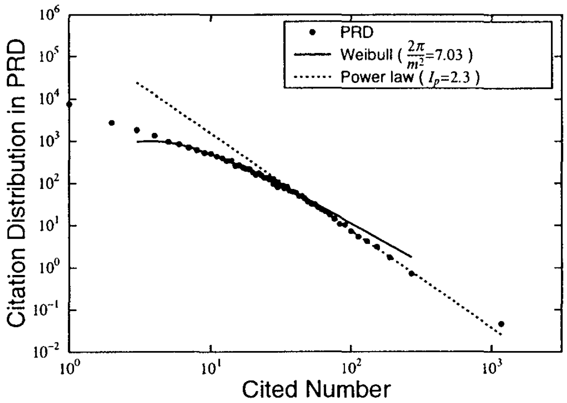

Figure 4: PRD の論文引用件数分布

我々は「スケール不変な理論＋典型的スケール」の例として，R^2 項を持った 2 次元量子重力を取り上げワイブル分布を導出したが，それがユニバーサルなのかは分からない。しかしどのようなモデルを考えたとしても，典型的スケールの見積もりに大きな差はでないと期待している。実際，ワイブル分布から見積もった典型的スケールは，個人所得分布や論文の引用件数分布において，フラクタルが崩れる辺りの値と巧く一致している。また典型的スケールは平均値ともオーダー的に一致しているが，平均値とは異なった概念である。典型的スケールを導入することにより，フラクタルと非フラクタル分布を統一的に理解することが可能となり，我々が提案したモデルも一つのツールとして使えると期待している。