量子 KAM トーラスについて

東京都立大学大学院理学研究科物理　齋藤　暁[1]
入澤　学[2]
川口　弘[3]

古典力学における「完全可積分系」は Arnold のトーラス上の運動として明確に記述される。そしてその軌道が安定に存在し続けるか、それともカオスに崩壊するかは KAM の定理によって判定できる。量子系についても、同時対角化可能な演算子が自由度の数だけ在れば、系の状態を完全に決定することが出来る。しかし量子論的な KAM の定理はあるのだろうか？前回は Gallavotti 等の仕事を参照しながら、場の理論的手法が量子系の KAM の定理を導く可能性について考察した [1]。今回は具体的に Feynman 則を得たので報告する。

1　KAM トーラスの量子化

摂動項を ϵV として d 自由度の力学系

$$H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{J}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J} + \epsilon V(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{J}) \tag{1}$$

を考えよう。$\epsilon = 0$ のとき、作用変数 $\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, \cdots, J_d)$、角変数 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d)$ は $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\omega} = \text{const.}$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}t + \text{const.}$ となり、与えられた初期値ごとに半径 $\sqrt{2J_k}$, $k = 1, 2, \cdots, d$ のトーラス T^d 上に一つの軌道を描く。摂動が在るときにこの軌道は変形を受ける。

量子系においても完全可積分系が摂動によってどのように振舞いを変えるかを知ることは重要な問題である。しかし系が量子論に従う場合、位相空間上の明確な軌道と言うものは存在しない。従ってその変形した軌道の振るまいを議論することは出来ない。軌道に代る量子論的な物理量は位相空間における座標の期待値である。非摂動トーラス T^d 上の点を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\omega}t + \text{const.} \in T^d$ で表そう。摂動効果を見るために

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\omega})$$

により、トーラス上の場 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ を定義する。特に $\lim_{\epsilon\to 0}\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = 0$, $\int_{T^d}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0$ である。この場に対する量子効果を知りたい。

[1]E-mail: saito@phys.metro-u.ac.jp
[2]E-mail: irisawa@kiso.phys.metro-u.ac.jp
[3]E-mail: kawaguti-hirosi@c.metro-u.ac.jp

この系を量子化する方法として我々は Feynman 径路積分の方法を採ろう。その為に先ず作用積分と特性関数を導入する。

$$
\begin{aligned}
S &:= -\int_{T^d} d\boldsymbol{x}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{J}\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} + \epsilon V(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{J})\right) \\
&= -\frac{\boldsymbol{\omega}^2}{2} - \int_{T^d} d\boldsymbol{x}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^\dagger G_0^{-1}\boldsymbol{\varphi} - \epsilon V\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\varphi}^\dagger(\boldsymbol{x})\right)\right) \\
Z(\boldsymbol{\eta}) &:= \int \mathcal{D}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \exp\left[\frac{i}{\hbar}S + \frac{i}{2}\int_{T^d} d\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{\varphi}^\dagger\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^\dagger\boldsymbol{\varphi})\right]
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})$ は外場であり、Green 関数は

$$
G_0^{-1} := \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\partial}_x \\ -\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\partial}_x & 1 \end{pmatrix}
$$

で与えられる。

このレポートの目的は、Feynman 則を決めることであるから、場の摂動論の通常の手法に従って特性関数を

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left[\frac{i\epsilon}{\hbar}\int_{T^d} d\boldsymbol{x}\ V\left(\boldsymbol{x},\frac{2\delta}{i\delta\boldsymbol{\eta}^\dagger},\frac{2\delta}{i\delta\boldsymbol{\eta}}\right)\right] \\
&\qquad \times\int \mathcal{D}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \exp\left[i\int_{T^d} d\boldsymbol{x}\left(-\frac{1}{2\hbar}\boldsymbol{\varphi}^\dagger G_0^{-1}\boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varphi}^\dagger\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^\dagger\boldsymbol{\varphi}\right)\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{i\epsilon}{\hbar}\int_{T^d} d\boldsymbol{x}\ V\left(\boldsymbol{x},\frac{2\delta}{i\delta\boldsymbol{\eta}^\dagger},\frac{2\delta}{i\delta\boldsymbol{\eta}}\right)\right]\exp\left[\frac{\hbar}{2i}\int_{T^d} d\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{\eta}^\dagger G_0\boldsymbol{\eta}\right]
\end{aligned}
$$

のように表示するのが便利である。

よく知られている場の量子論のモデルでは、相互作用項は場の冪乗であるのに対し、いま議論している系では特にそれを指定していない。しかし、相互作用を摂動として扱う立場から、それを $\boldsymbol{\varphi}=0$ において滑らかな関数とし、そこで Taylor 級数に展開出来るとしよう。このとき各場の Fourier 変換を ~ で表わせば特性関数は

$$
Z(\tilde{\boldsymbol{\eta}},\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger) = \exp\left[i\tilde{V}X\right]\exp\left[\frac{\hbar}{2i}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger\tilde{G}_0\tilde{\boldsymbol{\eta}})\right]
$$

のように与えられる。ただし vertex operator および propagator はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}X &:= \frac{\epsilon}{\hbar}\sum_{r,s=0}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}'}\tilde{V}_{r,s}(\boldsymbol{q}_0)\delta(\boldsymbol{q}_0+\boldsymbol{q}_1+\cdots+\boldsymbol{q}_r-\boldsymbol{q}'_1-\cdots-\boldsymbol{q}'_s) \\
&\qquad \times\frac{2^{r+s}\delta^{r+s}}{i\delta\tilde{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{q}_1)\cdots i\delta\tilde{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{q}_r)i\delta\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger(\boldsymbol{q}'_1)\cdots i\delta\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger(\boldsymbol{q}'_s)} \qquad (2) \\
(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger\tilde{G}_0\tilde{\boldsymbol{\eta}}) &:= \sum_{\boldsymbol{q}}\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger(-\boldsymbol{q})\begin{pmatrix} -(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q})^{-2} & i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q})^{-1} \\ -i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q})^{-1} & 0 \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{q})
\end{aligned}
$$

である。これから相関関数、特に 1 点関数は

$$
\langle\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{q})\rangle := \frac{1}{Z(0)}\frac{\delta Z(\tilde{\boldsymbol{\eta}},\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger)}{i\delta\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger(\boldsymbol{q})}\bigg|_{\tilde{\boldsymbol{\eta}},\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger=0}
$$

を計算して求められる。

2 Feynman 則

vertex 演算子の表示 (2) から明らかなように、場の間には無限個のタイプの相互作用が可能であり、それらをどのように整理して摂動計算を行うかが問題となる。我々は式を過不足なく図形に対応させる Feynman 則を見出したのでそれを示そう。

n 点相関関数への ϵ の m 次の寄与を考える。

1. 紙面に $m+1$ 個の点を取り、そのうちの m 個を内点、1 個を外点と呼ぶ。各内点に r_i 個の運動量が出て行き s_i 個が入る vertex $(\epsilon/\hbar)\tilde{V}_{r_i,s_i}$, $i=1,2,...,m$ を対応させる。外点には指定された $r=r_0$ 個の運動量が出て行き $s=s_0=n-r_0$ 個が入るとする。

2. i 番目の点から出て j 番目の点に入る運動量の流れを矢印付きの線で表わし、その線の数を χ_{ij} とする。ただし $\chi_{00}=0$ とし、これらは

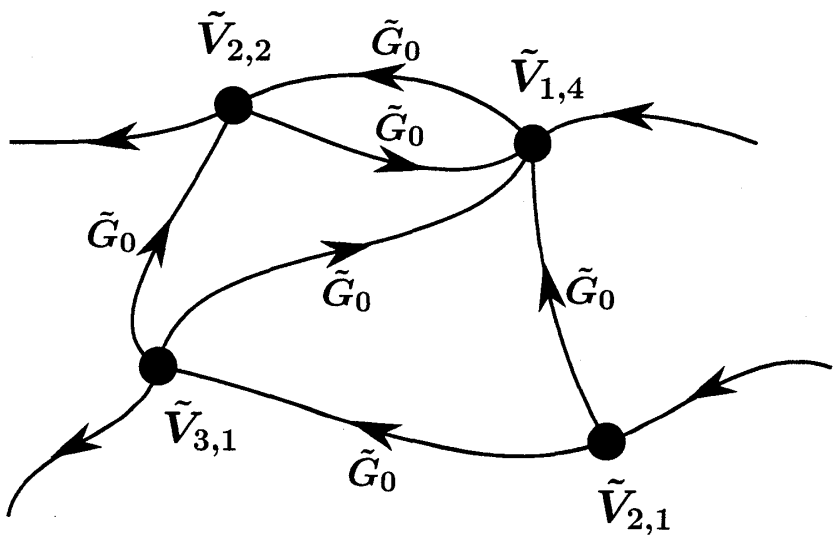
$$r_i=\sum_{j=0}^{m}\chi_{ij} \quad s_i=\sum_{j=0}^{m}\chi_{ji}, \qquad i=0,1,...,m$$

を満たすものとする。

3. 内線を結ぶ各線には運動量 $\boldsymbol{q}$ が矢印の方向に向かう propagator $\hbar\tilde{G}_0(\boldsymbol{q})/2i$ を対応させ、外点も含めた各点で運動量の和はゼロになるようにする。

4. 全ての可能な $\{\chi_{ij}\}$ について重み 1 で加え合わせ、loop に付いては運動量の無限和を取る。

Feynman 図の例を示そう。この例では $r_0=s_0=2$ であり、外線は外点で結ばれているとする。



3　くり込み群

Gallavotti (1994) は、古典論における KAM の定理の証明に Eliasson (1988) が用いた絶対収束級数列は、場の理論におけるくり込み操作に同値であることを示した。アイデアはこうである。

$\rho < 1$ として $|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q}|$ の領域を

$$\rho^k \le |\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q}| \le \rho^{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots, N$$

に従って分割し各領域について $\tilde{G}_k$ と $\tilde{K}_k$ を

$$\tilde{G}_k \;=\; \tilde{K}_k + \tilde{G}_{k+1}, \quad \begin{cases} \tilde{G}_k(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q}) \ne 0, & |\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q}| \le \rho^k, \\ \tilde{K}_k \ne 0, & \rho^{k+1} \le |\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q}| \le \rho^k, \end{cases}$$

によって定義する。propagator からの loop 和への寄与の内、$|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q}| > \rho$ の領域からの分、即ち K_0 の寄与を vertex にくり込めば、propagator は $|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q}| < \rho$ からの寄与だけになる。この領域を更に分けて $\rho^2 < |\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q}| < \rho$ からの寄与を vertex にくり込む。このくり込み操作を続ければ、和へ propagator $\tilde{G}_0$ から寄与する領域は $|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q}| = 0$ を満たす整数の組みに限られるので測度がゼロになる。

このくり込み操作を一度する毎に、vertex 演算子はどのように変換されるか見てみよう。k 回目の操作で得られる vertex を $\tilde{V}^{(k)}_{r,s}$ と表わすことにすると

$$\begin{aligned} e^{i\tilde{V}D}e^{\hbar(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger\tilde{G}_0\tilde{\boldsymbol{\eta}})/2i} &= e^{i\tilde{V}D}e^{\hbar(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger(\tilde{K}_0+\tilde{G}_1)\tilde{\boldsymbol{\eta}})/2i} \\ &= e^{\hbar(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger\tilde{K}_0\tilde{\boldsymbol{\eta}})/2i}e^{i\tilde{V}^{(1)}D}e^{\hbar(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger\tilde{G}_1\tilde{\boldsymbol{\eta}})/2i} \\ &= \cdots \\ &= \left(\prod_{p=0}^{n-1} e^{\hbar(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger\tilde{K}_p\tilde{\boldsymbol{\eta}})/2i}\right) e^{i\tilde{V}^{(n)}D}e^{\hbar(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger\tilde{G}_n\tilde{\boldsymbol{\eta}})/2i} \\ &\sim e^{i\tilde{V}^{(n)}D}e^{\hbar(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger\tilde{G}_n\tilde{\boldsymbol{\eta}})/2i} \end{aligned}$$

により (() の因子は計算の後で $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger = 0$ とするので無視できる)

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{(k+1)}_{r,s}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \;=\; & \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{i\hbar^\ell}{2^\ell}\sum_{\substack{u,v=0\\u+v=\ell}}^{\ell}\frac{\ell!(r+u)!(s+v)!}{u!v!r!s!(\ell-u)!(\ell-v)!} \\ & \times\tilde{K}_k^{u+v-\ell}(\tilde{K}_k\tilde{\boldsymbol{\eta}})^{\ell-u}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger\tilde{K}_k)^{\ell-v}\tilde{V}^{(k)}_{r+u,s+v}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \end{aligned}$$

と云う結果を得る。以上の操作は古典論に限らず量子系についても成り立つことは云うまでもない。

参考文献

[1] 齋藤　暁,　「物性研究」 **80-1** (2003) p32.