数理解析研究所講究録
523巻 1984年 96-107

R(K)における表現測度

早大教育　和田淳蔵 (Junzo Wada)

R(K)における表現測度、とくにArens-Singer測度とJensen測度について考える。これらの特徴付けと、その間の関係について、最近の結果を紹介することを中心にして、論じたい。

1. Xをコンパクト Hausdorff 空間とし、AをX上の関数環とする。M_AをAの極大イデアル空間とする。

$M_A \ni p$, σをX上の確率測度とする。

σをAにおけるpのArens-Singer測度であるとは

$$\log|f(p)| = \int \log|f|\,d\sigma \quad (f \in A^{-1})$$

となることをいう。ここで$A^{-1} = \{f \in A ; f^{-1} \in A\}$。

またσがAにおけるpのJensen測度であるとは

$$\log|f(p)| \leqq \int \log|f|\,d\sigma \quad (f \in A)$$

となることである。pのJensen測度は、pのArens-Singer

測度で、かつこの2つとも、Aにおける p の表現測度となる。すなわち

$$f(p) = \int f\,d\sigma \qquad (f \in A)$$

$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$、Aを Γ 上の disk 環のとき、$|z| < 1$ となる z の表現測度は $\frac{1}{2\pi} P_r(\theta - t)\,d\theta$ $(z = re^{it})$ である。ここで $P_r(\theta)$ は Poisson 核。

Kを $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とし、$R(K)$ でKの外側に極をもつ有理関数全体のK上での閉包を表わす。これはまた、Kのある近傍で解析的である関数全体のK上での閉包と同じである。$R(K)$ はK上の関数環である。

ここで $M_{R(K)} = K$ となることはよく知られている。

また $P(K)$ で z の多項式全体のK上での閉包、すなわちK上で z の多項式で一様近似される関数全体を表わす。$P(K)$ はK上の関数環で $P(K) \subset R(K)$ である。

Kを $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とし、K上に台をもつ有限測度 ν の Cauchy 変換 $\hat{\nu}$ とは、

$$\hat{\nu}(\zeta) = \int \frac{d\nu(z)}{z - \zeta} \qquad (\zeta \in \mathbb{C})$$

を表わす。$\hat{\nu}$ は ν と、局所的に積分可能な関数 $\frac{1}{z}$ との、たたみこみ (convolution) であって、これは $\mathbb{C}$ の測度0を除いた

所で定義される。

またνの対数ポテンシャル(logarithmic potential)にマイナスをつけたものを考える：

$$V_\nu(\zeta) = \int \log|z-\zeta|\,d\nu(z) \qquad (\zeta \in \mathbb{C})$$

これはνと局所的に積分可能な関数$\log|z|$との，たたみこみ(convolution)として、$\mathbb{C}$のある測度0の集合を除いた所で定義される。またV_νはνの台の外側で調和となる。

Kを$\mathbb{C}$のコンパクト部分集合とし、νをK上の確率測度とし、$K \ni p$とする。νが$R(K)$におけるpの表現測度である条件を考える。

定理1.1。νをK上の確率測度とし、$K \ni p$とする。そのとき、つぎは同値である。

(i) νは$R(K)$におけるpの表現測度である。

(ii) $$\hat{\nu}(\zeta) = \frac{1}{p-\zeta} \qquad (\zeta \in \mathbb{C}\setminus K)$$

(iii) $V_\nu(\zeta) - \log|\zeta - p|$は$\mathbb{C}\setminus K$の任意の連結成分の上で定数となる。

証明。(ii)→(iii)。$\frac{\partial}{\partial\zeta} V_\nu = -\frac{1}{2}\hat{\nu}$。　$\zeta \neq z$なら$\frac{\partial}{\partial\zeta}\log|\zeta - z|$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{\zeta - z}$　であるから(ii)より

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(V_\nu(\xi) - \log|\xi - p|\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\xi} - \hat{\nu}(\xi)\right] = 0.$$

$V_\nu(\xi) - \log|\xi - p|$ は実関数であるから、$\mathbb{C}\setminus K$ の任意の連結成分の上で定数となり (iii) を得る。(iii) → (ii) は明らか。

(ii) → (i). (ii) より

$$\int \frac{d\nu(z)}{z-\xi} = \hat{\nu}(\xi) = \frac{1}{p-\xi}$$

ゆえに $\int \frac{d\nu(z)}{z-\xi} = \int \frac{d\delta_p(z)}{z-\xi}$ (ここで δ_p は p の Dirac 測度)

これから $\hat{\nu}(\xi) - \hat{\delta}_p(\xi) = 0$ $(\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$. このことより、

$\nu - \delta_p \perp R(K)$, すなわち $\int f(d\nu - d\delta_p) = 0$ $(f \in R(K))$.

ゆえに $f(p) = \int f d\nu$ $(f \in R(K))$ となり (i) を得る。

(i) → (ii) は明らか。

注意。この定理は [4] P.35 に見られるが、その証明に不完全な所があるので、上のように訂正した。

2. つぎに $R(K)$ における Arens-Singer 測度と Jensen 測度の特徴付けについて考えて見る。

K を $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とする。$H(K)$ で、K のある近傍で調和である関数全体の $C_R(K)$ での閉包と定義する。

ここで $H(K)$ は $\log|R(K)^{-1}|$ で張られた部分空間の閉包であることがわかる。

定理2.1　$K \ni p$, ν を K 上の確率測度とする。そのときつぎは同値である。

(i)　ν は $R(K)$ における p の Arens-Singer 測度である。

(ii)　ν は $H(K)$ 上で p を表現する。すなわち K のある近傍で調和である任意の関数 u で

$$u(p) = \int u\,d\nu$$

(iii)　$V_\nu(\xi) = \log|\xi - p|$　$(\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$。

証明。(i)→(ii)。(i)より $\int \log|f|\,d\nu = \log|f(p)|$ $(f \in R(K)^{-1})$。ゆえに $\int u\,d\nu = u(p)$ $(u \in H(K))$ となり(ii)が得られる。

(ii)→(i)は明らか。

(iii)→(ii)。u を $\mathbb{C}$ の上で無限回微分可能な関数でコンパクトな台をもち、K のある近傍で調和とする。そのとき u はそのラプラシアンの対数ポテンシャルとして表わされる：

$$u(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\iint (\Delta u)(z)\log|z-\xi|\,dx\,dy \quad (\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$$

これは Green の公式から得られる。

u は K の近傍で調和であるゆえ、そこで $\Delta u = 0$。ゆえに

$$\int u(\xi)\,d\nu(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus K} (\Delta u)(z)\left[\int \log|z-\xi|\,d\nu(\xi)\right]dx\,dy$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int (\Delta u)(z)\log|z-p|\,dxdy = u(p).$$

(ii) → (iii). $u(z) = \log|z-\xi|$ $(\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$ は K のある近傍で調和。ゆえに

$$V_\nu(\xi) = \int \log|z-\xi|\,d\nu(z) = \log|p-\xi|.$$

つぎに $R(K)$ における Jensen 測度を考える。これは B. Cole によって与えられた。

定理 2.2. $K \ni p$, ν を K の上の確率測度とする。そのとき、つぎは同値である。

(i) ν は $R(K)$ における p の Jensen 測度である。

(ii) ν はつぎをみたす。

a) $\log|\xi-p| \leqq \int \log|\xi-z|\,d\nu(z)$ $(\xi \in \mathbb{C})$

b) $\log|\xi-p| = \int \log|\xi-z|\,d\nu(z) = V_\nu(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$.

(iii) u が K のある近傍で劣調和のとき

$$u(p) \leqq \int u\,d\nu$$

証明. (i) → (ii). (ii) の a) は関数 $z \to \xi - z$ に対する Jensen の不等式を表わし、b) は ν が Arens-Singer 測度であるから明らか。

(ii) → (iii). u を K のある近傍で劣調和とする。Riesz の

分解定理により

$$u(z) = v(z) + \int \log|z-\zeta|\,d\tau(\zeta) \qquad (z \in K)。$$

ここで、τはKのあるコンパクト近傍に台をもつ正測度でvはKのある近傍で調和である。

Fubini の定理より

$$\int u(z)\,d\nu(z) = \int v(z)\,d\nu(z) + \iint \log|z-\zeta|\,d\nu(z)\,d\tau(\zeta)$$

$$\geqq v(p) + \int \log|\zeta - p|\,d\tau(\zeta) = u(p)。$$

すなわち(iii)を得る。ここで(ii) b)は定理2.1によってKのある近傍で調和な任意の関数vで$v(p) = \int v(z)\,d\nu(z)$であることと同値であるという事実を用いてある。

(iii)→(i)。fをKの外側に極をもつ有理関数とする。そのとき$\log|f|$はKのある近傍で劣調和。(iii)より

$$\log|f(p)| \leqq \int \log|f|\,d\nu$$

このようなfの全体はR(K)の中で稠密であるから、R(K)の任意の元fで上が成り立つ。

3. さてここでR(K)におけるAreno-Singer測度とJensen測度との関係を述べる。

まず、つぎのような結果が知られている([1])。

定理3.1. $K \ni p$, ν を K の境界 ∂K 上の確率測度とする。そのとき、ν が $R(K)$ における p の Jensen 測度であることと、ν が $R(K)$ における p の Arens-Singer 測度であることとは同等である。

この定理では、ν は ∂K 上の確率測度であるという仮定がついているが、この仮定がないときは結果は大変に複雑となる。

これについてつぎに述べていく。

いま A をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数環とする。X 上の確率測度全体を $\mathbb{M}$ とする。S を $\mathbb{M}$ の部分集合としたとき、S の affine completion とは、S で生成された w^*-閉アファイン空間と $\mathbb{M}$ との共通部分をいう。これを $\hat{S}$ で表わす。S が affinely complete であるとは、$\hat{S} = S$ となることをいう。$M_A \ni p$ で、p の Arens-Singer 測度全体の集合は affinely complete であることがすぐ確められる。

いま A における p の Arens-Singer 測度全体を $\mathfrak{A}$, A における p の Jensen 測度全体の集合を $\mathfrak{J}$ で表わすと、一般に $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$ であるから、$\hat{\mathfrak{J}} \subset \hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ となっている。ここで $\hat{\mathfrak{J}} = \mathfrak{A}$ となっているかという問がある。これを $A = R(K)$ の場合に考える。

このために最初に$\mathbb{C}$上の fine topology について述べる。

$\mathbb{C}$上の fine topology とは、$\mathbb{C}$上の劣調和関数すべてが連続（$-\infty$もとり得る実数値関数として）となるような最弱な位相をいう。$\mathbb{C}$上の fine topology は$\mathbb{C}$上の普通の位相より強くなるが、つぎのような性質をもっている。

1° $\mathbb{C}$上の fine topology は局所連結位相である。ゆえに任意の finely open（fine topology で開集合）な$\mathbb{C}$上の集合は、互いに共通点のない finely connected component の高々可算個の和集合となっている。

2° $\mathbb{C}$上の finely open な集合Uと$U \ni x$に対して、xを中心とする、いくらでも小さな円周がUに含まれる。

ここでつぎの定理が成り立つ（[5]）。

定理3.2. Kを$\mathbb{C}$のコンパクト部分集合とする。$\dot{U}$をKの fine interior（fine topology に関しての内部）の fine connected component とし、$U \ni p$とする。

このとき、$R(K)$に関するpの Jensen 測度全体の affine completion は$\overline{U}$に台をもつ$R(K)$に関するpの Arens-Singer 測度全体と一致する。

証明。$U \ni p$のとき、pの Jensen 測度の台は$\overline{U}$に含まれることがわかる。ゆえに$R(K)$に関するpの Jensen 測度全体の affine completion は、$R(K)$に関するpの Arens-Singer 測度

で台を$\overline{U}$の中にもつものの全体に含まれる。

ゆえに、逆に$\overline{U}$に台をもつ任意のArens-Singer測度はJensen測度全体で生成されたアファイン空間のw^*-閉包の中に入ることが示されればよい。

それをつぎのように3つの部分に別けて証明する。

1° νを$\overline{U}$に台をもつpのArens-Singer測度とすれば、νは$H(\overline{U})$におけるpの表現測度となる。ゆえにδ_pをpのDirac測度とすれば

$$(*) \qquad \nu - \delta_p \in H(\overline{U})^{\perp}$$

すなわち$\int f(d\nu - d\delta_p) = 0 \quad (f \in H(\overline{U}))$となる。

さてpから発するBrown運動のUからのfirst exit timeをTとし、τを$\tau \leq T$となる任意のstopping timeとすれば、つぎのように$\overline{U}$の上の確率測度σ_τが存在する：

$$\int h\, d\sigma_\tau = \int h(b_\tau(\omega))\, d\omega$$

ここでそのBrown運動を$\{b_t\}$とし、Brownian pathの空間の上のWiener測度を$d\omega$とする。

ここでσ_τは$R(\overline{U})$におけるpのJensen測度であることが示せる。なんとなれば、hを$\overline{U}$のある近傍で劣調和とすれば、$h \circ b_t$はsubmartingaleとなる。またstopping time $\tau > 0$であるから$\int h\, d\sigma_\tau = \int h \circ b_\tau\, d\omega \geq \int h \circ b_0\, d\omega = h(P)$。

ゆえに定理2.2より σ_τ は $R(\overline{U})$ における p の Jensen 測度となる。

2° つぎに h を有界で U の上で finely harmonic なら $h \circ B_t$ $(t<T)$ は martingale。上と同じような論法で $h(p)=\int h\,d\sigma_\tau$ となる。一方 $h(p)=\int h\,d\delta_p$ であるから、$\sigma_\tau-\delta_p \in H(\overline{U})^\perp$。

これは $H(\overline{U})$ は $\overline{U}$ で連続で、U で finely harmonic な関数全体と一致することが知られている([1])ことから導かれる。

ここで $\mathfrak{S}$ を $\{\sigma_\tau-\delta_p : 0<\tau<T,\ \tau$ は stopping time$\}$ の張る線形空間とすれば、$\mathfrak{S} \subset H(\overline{U})^\perp$ となる。ここでまた $\mathfrak{S}$ が $H(\overline{U})^\perp$ の中で w^*-dense となることも示される。

3°。1°の(*)より $\nu-\delta_p \in H(U)^\perp = \overline{\mathfrak{S}}^{w^*}$($\mathfrak{S}$ の w^*-閉包)であるから、$\mathfrak{S}$ の元 $\sum_{i=1}^n \alpha_i(\sigma_{\tau_i}-\delta_p)$ で

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(\sigma_{\tau_i}-\delta_p) \longrightarrow \nu-\delta_p \quad (w^*)$$

ゆえに

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i\sigma_{\tau_i} - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1\right)\delta_p \to \nu \quad (w^*).$$

ところが σ_{τ_i}, δ_p はともに p の Jensen 測度となる。

このことから ν は Jensen 測度全体の affine completion の中に入ることになり、この定理は証明された。

定理3.2はJensen測度全体とArens-Singer測度全体との関係をある程度明らかにしているが、条件がいろいろついている。$\mathbb{C}$の上のfine topologyに関しては、比較的いい性質があるので（たとえば[3]参照）、この定理はまだ改良の余地はあるように思う。

参照文献

[1] A. Debiard and B. Gaveau : Potential fin et algèbras de fonctions analytiques I, J. Functional Analysis 16 (1974) 289-304.

[2] B. Fuglede : Finely Harmonic Functions, Springer Lecture Notes in Math., 289 1972.

[3] B. Fuglede : Fonctions harmoniques et fonctions finement harmoniques, Ann. Inst. Fourier 24 (1974) 77-91.

[4] T. W. Gamelin : Uniform Algebras and Jensen Measures, London Math. Soc., Lecture Notes 32, 1978.

[5] T. W. Gamelin and T. J. Lyons : Jensen measures for R(K), J. London Math. Soc., 27 (1983) 317-330.