

## 自己双対 Einstein 方程式について

埼玉大理 高崎金久 (Takasaki, Kanehisa)

### 1. 序

4次元 Riemann 繩何における Riemann 曲率形式の Hodge

\*作用素に関する自己双対性の方程式  $*R = R$  を自己双対 Einstein 方程式 (SDE) と呼ぶことにする。SDE からは本来の意味の Einstein 方程式  $R_{ij} = 0$  が従うが逆は正しくない。いいかえれば "SDE を考える" とは Einstein 方程式の解の一部を考えることになる。このことは自己双対 Yang-Mills 方程式 (SDYM) と本来の Yang-Mills 方程式の間の関係に似ているが、実は単に似ているのみならず、SDE と SDYM はともに twistor 理論の考え方を適用できるという共通の特徴をもつ。このことが本来の Einstein 方程式や Yang-Mills 方程式の場合にはない大きな手掛かりとなって、SDYM に関しては 80 年前後に大きな成果がもたらされ [1]、また SDE に対して Penrose に始まる様々な研究が行われてきた [2-10]。とはいえ SDYM に比べると SDE の研究

はまだ余り進んでいない。それはひとつには SDYM の場合にはある与えられた 3 次元多様体 (twistor 空間) 上の Vector 束を論じるという、ある意味で線型の問題に議論が帰着するのに對して、SDE の場合には曲がった対象である twistor 空間 자체を論じなければならなければである。しかしそれゆえにこそ SDYM とはまた違った面白さがあるともいえる。

以下では SDE を非線型可積分系（完全積分可能系）の觀点から扱ってみようと思う。非線型可積分系として知られていいものは、KdV 方程式、KP 方程式、sine-Gordon 方程式、などいつも soliton を記述するものが大部分で、他に Einstein 方程式を定常かつ軸対称という条件下で考えたもの（これは独立変数 2 個の方程式であり、SDE とは無関係）も含まれる。これらと SDE が同じ觀点から論じられるというのはかなり意表を突く見解であろうが、全く想像を絶するといふほどのことはなく、十分に予想されることである。例えば“SDYM は非線型可積分系の一種とみなされるが、これは本質的に twistor 構造の存在に依って説明されることがある ([1, 11] やよびその引用文献参照)，従って同じように twistor 構造と密接な関連を持つ SDE が非線型可積分系の觀点から扱えることを期待するのは自然である。実際 Boyer, Plebanski [12] はそのような見

方から twistor 理論に基くこれまでの SDE の取扱いを見直すことを試みている。彼らは SDE における無限個の保存則の記述及び二の保存量を用いた Penrose[2]の結果の再構成を専ら議論の中心に置いているが、その議論の副産物として指摘したある種の無限次元群  $C$  の存在の方が我々にとってはより示唆的であろう。実際、彼らは  $C$  を用いて SDE の解の重ね合わせを定義したり、 $C$  の Lie環が Kac-Moody Lie環と似た構造をもつことを示したりしているが、これは従来の非線型可積分系に内在する無限次元群と共通する特徴である。ただ、Boyer, Plebanski の  $C$  に対する議論は表面的なもので、従来の非線型可積分系における無限次元群やその Lie環に関連した研究 (Riemann-Hilbert 問題、余隨伴軌道の方法、Grassmann 多様体とて函数の理論 etc [13-15]) の水準には程遠い。本文ではそのような方向に少しでも実質的な議論を進展させることをめざしたい。

## 目 次

2. SDE の定義	4-5
3. Plebanski の方程式	5-7
4. Penrose の構成法、基本的な方程式 (15) の導出	8-12
5. 方程式 (15) の構造、hierarchy の導入、同値な別表現	12-16
6. 方程式 (15) からの帰結、vector 場の交換関係、線型系	17-23
7. Penrose の構成法の群論的解釈	24-30
8. まとめと展望	30-32 文獻
	32-33

## 2. SDE の定義

まず最初に一言注意しておきたいが、SDE の研究では方程式を複素領域で考えることが多い。以下でもこの立場をとる。これが意味することは、計量  $ds^2$  を実多様体の接束上の 2 次形式で与える代わりに複素多様体の正則接束上の複素 2 次形式で与えよ、ということであり、局所座標を使って考えてみるとよい。

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^4 g_{\mu\nu} dz^\mu d\bar{z}^\nu, \quad g_{\mu\nu}(z) = g_{\nu\mu}(z) \quad (\text{$z$ の正則函数}) \quad (1)$$

という複素 2 次形式の成分  $g_{\mu\nu}$  に対して実 Riemann 多様体と同じ形で Einstein 方程式や SDE を定義し、それを複素変数  $z = (z^\mu)$  に関する微分方程式として考察せよ、ということである。このような複素化された  $ds^2$  に対しても計量接続の接続係数  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ 、曲率 tensor  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ 、Ricci tensor  $R_{\mu\nu}$ 、Hodge\*作用素などは同様に定義される。また tensor 添字の上げ下げを  $g_{\mu\nu}$  と  $g^{\mu\nu}$  を並べた行列  $(g_{\mu\nu})$  の逆行列の成分  $g^{\mu\nu}$  ( $\sum g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$ ,  $\sum g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$ ) を用いて行うことも同様である。さらに、本文では局所的考察のみに議論を限定する。

4 次元においては Hodge\*作用素は 2 次微分形式を 2 次微

分形式にうつし，かつ  $*^2 = \text{id}$  をみたすので 2 次微分形式のなす vector 空間  $\mathbb{R}^2$  は  $*$  の固有空間に分解する。

$$\mathbb{R}^2 = \{\omega; * \omega = \omega\} \oplus \{\omega; * \omega = -\omega\} \quad (2)$$

$* \omega = \omega$  である  $\omega$  を自己双対的,  $* \omega = -\omega$  である  $\omega$  を反自己双対的という。SDE は曲率 tensor  $R$  反対称添字に関するつゝ，太微分形式の自己双対性を表す方程式である。

$$\text{SDE: } * \sum R^\alpha_{\beta\mu\nu} dz^\mu dz^\nu = \sum R^\alpha_{\beta\mu\nu} dz^\mu dz^\nu \quad (3)$$

SDE から Einstein 方程式

$$\text{Einstein: } R_{\mu\nu} (= \sum R^\alpha_{\mu\nu\alpha}) = 0 \quad (4)$$

が“自動的に従う”が，逆は成立しない。(詳しくは [16] 参照。)

### 3. Plebanski の方程式

Plebanski [17] は SDE をより判り易い形に書き直した。これは twistor による議論を理解するにも便利な記述形式であるので，以下それについて簡単に説明しておく。

Plebanski の議論は  $ds^2$  を次の形に書き直すことから出発する。

$$ds^2 = e^1 e^2 + e^3 e^4 = -\det \begin{pmatrix} e^4 & e^2 \\ e^1 & -e^3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

$= z^a e^1, e^2, e^3, e^4$  は 1 次微分形式であり ( $e^a = \sum e^a_\mu dz^\mu$ ) ,

(5) 右辺は対称微分形式の意味で解釈する。 $e^1, \dots, e^4$  は物理では tetrad ある。これは Vierbein と呼ばれているものだが、このよろとくものは (1) が非退化である限りつくれる。実際,  $ds^2$  に関する正规直交基底をなす vector 場を  $\omega^1, \dots, \omega^4$  とすれば dual す 1 次微分形式  $\omega^1, \dots, \omega^4$  をとれば

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2$$

となり、さすにこれらに對して

$$e^1 = \omega^1 + i\omega^3, \quad e^2 = \omega^1 - i\omega^2, \quad e^3 = \omega^3 + i\omega^4, \quad e^4 = \omega^3 - i\omega^4$$

と定義すれば (5) の表示を得る。ここで複素係数 1 次結合が現れることが語をはじめから複素化してもかまばつなない理由のひとつである。

$ds^2$  を (5) の形に表わすとき,  $e^1, \dots, e^4$  の選び方には任意性がある。実際任意の  $SL(2, \mathbb{C})$  値函数  $g, h$  によると  $e^1, \dots, e^4$  を

$$\begin{pmatrix} e^4 & e^2 \\ e^1 & -e^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{4'} & e^{2'} \\ e^{1'} & -e^{3'} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} e^4 & e^2 \\ e^1 & -e^3 \end{pmatrix} h \quad (6)$$

で定められる  $e^1', \dots, e^4'$  をおきかえても  $ds^2$  は変わらない。これは  $g, h$  のことは一種の gauge 変換の役割をはたし (これは Einstein 方程式に本来内在する一般座標変換の自由度とはまた別の対称性をもつ), これに基づいて曲率形式  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$  をいかつかの基本

的な量に分解することができる。(3)はそれらのうちの一部が消えることを意味する。

さて Plebanski の得た結論は次のように要約される：適当な gauge 変換 (6) は  $e^1, \dots, e^4$  をとり直すとき SDE は次の方程式系に同値である。

$$d(e^4 \wedge e^1) = 0, \quad d(e^3 \wedge e^2) = 0, \quad d(-e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4) = 0. \quad (7)$$

従つて問題はこれらを解くことに帰着するが、Plebanski はさうに適当な座標においてこれらが単独 2 階非線型微分方程式に書き直せることを示した。それは 2 通り与えられているが、第 1 の座標 ( $pqrst$ ) では (7) は方程式

$$\mathcal{G}_{pr} \mathcal{G}_{qs} - \mathcal{G}_{ps} \mathcal{G}_{qs} = 1 \quad (\mathcal{G}_{pr} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial p \partial r}, \text{etc}) \quad (8)$$

に同値で、このとき

$$e^1 = dp, \quad e^2 = \mathcal{G}_{pr} dr + \mathcal{G}_{ps} ds, \quad e^3 = -\mathcal{G}_{qr} dr - \mathcal{G}_{qs} ds, \quad e^4 = -dq, \quad (9)$$

また第 2 の座標 ( $pqxy$ ) では (7) は方程式

$$\Theta_{px} + \Theta_{qy} + \Theta_{xz} \Theta_{yy} - \Theta_{xy}^2 = 0 \quad (10)$$

に同値で、このとき

$$e^1 = dp, \quad e^2 = dx - \Theta_{yy} dp + \Theta_{xy} dq, \quad e^3 = -dy - \Theta_{xy} dp + \Theta_{xz} dq, \quad e^4 = -dq \quad (11)$$

である。なお Plebanski は (8), (9) を用いて SDE の特殊解をいくつか与えている。

#### 4. Penroseの構成法，基本的な方程式(15)の導出

Penrose [2] は curved twistor space というある条件をみたす 3 次元複素多様体と SDE の解の間に対応関係があることを明らかにした。これによれば curved twistor space を与える  $\gamma$  と原理的には SDE の解が得られる。ただ、Penrose の示した手順を実行するには curved twistor space 内のある条件をみたす曲線の族全体を知るという厄介な問題を解決しなければならず、そのため実際にこの方法で解の具体的な表示が得られているのは極めて特殊な場合に限られる [6 - 10]。この問題を積分幾何学的観点から見直す試みもあるが [18] 決定打とはいえない。そこでこの方法を非線型可積分系の観点から眺めて何か新しい知見が得られないので、ということが我々の期待するところである。

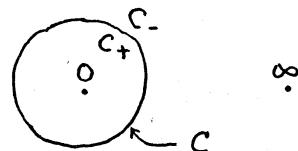
そのためには極めて幾何学的に述べられてる [2] の内容をもっと解析的に（代数解析的に！）判り易く書き直すこと が望ましい。[2] のやり方では、たゞえ上に述べた曲線族決定の問題が解けても、そこから  $ds^2$  を引き出すのにいさか間接的な手順を踏まねばならないなど技術的に不便な面がある。そのうえ何よりも判りにくないのである。

[2] § 6 で扱われている場合 (curved twistor space が 2 個の座標近傍からなる) には前節で述べた Plebanski[17] の結果を利用することによりそのような定式化ができる。以下にそれを示すが、同様の議論は [12] でも詳しく展開されている。

DATA: 以下の data を用意せよ。

Riemann 球面  $\mathbb{P}^1$  上に原点中心の円周  $C$ , 例えば  $C = \{\lambda \in \mathbb{P}^1; |\lambda| = 1\}$ , をとり  $C_+ = \{\lambda \in \mathbb{P}^1; |\lambda| < 1\}$ ,  $C_- = \{\lambda \in \mathbb{P}^1; |\lambda| > 1\}$  とおく。他方  $f = f(x, y, \lambda)$ ,  $g = g(x, y, \lambda)$  を  $\mathbb{C}^2$  (その座標を  $(x, y)$  と記す) のある領域と  $C$  との直積上で定義された複素数値函数の対で,  $(x, y)$  に関して正則で  $\lambda$  に関して実解析的, かつ条件

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 1 \quad (12)$$



をみたすものとする。いいかえれば  $(f, g)$  は  $\lambda$  を固定するごとに  $\mathbb{C}^2$  上の局所正準変換 ( $dx \wedge dy$  は固定する) を定める。

この対  $(f, g)$  は [2] § 6 で扱われて “3 タイプ”的 curved twistor space をひとつ定める data であり, 実際 2 つの座標近傍をはりあわせて curved twistor space をつくるとき 2 つめのはりあわせ方を指定する変換函数を与える。

これに対して次の問題を考える。

問題：  $\lambda$  の函数  $u = u(\lambda)$ ,  $v = v(\lambda)$ ,  $\hat{u} = \hat{u}(\lambda)$ ,  $\hat{v} = \hat{v}(\lambda)$  は、  
 $\hat{u}$  と  $\hat{v}$  は  $C \cup C_+$  の近傍で正則,  $\lambda^n u$  と  $\lambda^n v$  は  $C \cup C_-$  の近傍で  
 正則であり, かつ

$$u = f(\hat{u}, \hat{v}, \lambda), \quad v = g(\hat{u}, \hat{v}, \lambda) \quad (13)$$

をみたすものを求めよ。

このよう  $t_\mu(u, v, \hat{u}, \hat{v})$  を求めることが前に述べた curved  
 twistor space 内の曲線を求めることにあたる。そして Penrose は  
 小平の変形理論を援用することによって,  $(f, g)$  が十分に恒  
 等写像に近いときにはそのような曲線は 4-parameter 族存在す  
 ることを示した。上の問題の設定では  $u, v, \hat{u}, \hat{v}$  の  $C$  の  
 近傍での Laurent 展開を

$$u = \sum_{n=-\infty}^1 u_n \lambda^n, \quad v = \sum_{n=-\infty}^1 v_n \lambda^n, \quad \hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n \lambda^n, \quad \hat{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{v}_n \lambda^n \quad (14)$$

と表すとき  $(u_1, v_1, \hat{u}_0, \hat{v}_0)$  をその 4-parameter にえらぶことができる,  
 その他の  $u_n, v_n$  はその正則函数とみなされる。 $(u_1, v_1, \hat{u}_0, \hat{v}_0)$ ,  
 $(\hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{u}_0, \hat{v}_0)$  を 4-parameter にとるともできる(次節参照)。

$ds^2$  の求め方: 4-parameter に依存する  $(u, v, \hat{u}, \hat{v})$  が得られたらしく,  
 そこから  $ds^2$  を求めるやり方を説明する。原理

は簡単で、 $(u, v, \hat{u}, \hat{v})$  を指定する上のよろづ 4-parameter &  $ds^2$  を(1)や(5)の形にあらわすときの局所座標をみて採用し、それに関する外微分を  $d\omega$  あらわすとき、(12) & (13) からただちに従う次の等式に注目する。

$$du \wedge dv = d\hat{u} \wedge d\hat{v} \quad (15)$$

$u, v, \hat{u}, \hat{v}$  の正則性あるいは(14)に注目すると、(15)両辺が  $\lambda$  について 2 次式であるとき、つまり  $\theta_0 + \theta_1 \lambda + \theta_2 \lambda^2$ ,  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$  は  $\lambda$  に関する 2 次微分形式であるとき、という形の量を与えることがわかる。さて(15)の形から明らかなように、(15)の両辺で定義されるこの 2 次微分形式は simpleかつ closed, 則ち

$$(\theta_0 + \theta_1 \lambda + \theta_2 \lambda^2) \wedge (\theta_0 + \theta_1 \lambda + \theta_2 \lambda^2) = 0, \quad d(\theta_0 + \theta_1 \lambda + \theta_2 \lambda^2) = 0 \quad (16)$$

をみたす。Gindikin[18,付録]が指摘するよろづに、このよろづ 2 次微分形式は  $\theta_0 \wedge \theta_2 \neq 0$  ( $\theta_0 = d\hat{u}_0 \wedge d\hat{v}_0$ ,  $\theta_2 = du_1 \wedge dv_1$  の今の場合これはみたされている) である限り

$$\theta_0 + \theta_1 \lambda + \theta_2 \lambda^2 = (e^4 \lambda + e^2) \wedge (e^1 \lambda - e^3), \quad (17)$$

$e^1, \dots, e^4$  は  $\lambda$  にとらず 1 次微分形式、

この形は分解される。(例えば  $z = (u_1, v_1, u_0, v_0)$  を独立変数にとるとときには  $e^1, \dots, e^4$  と 2 次のと 3 次の選択がでてくる。

$$\begin{aligned} e^4 &= du_1, \quad e^2 = du_0 - \frac{\partial u_1}{\partial v_0} dv_1 - \frac{\partial u_1}{\partial u_0} du_1, \\ e^1 &= dv_1, \quad e^3 = -dv_0 + \frac{\partial v_1}{\partial v_0} dv_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u_0} du_1. \end{aligned} \quad (18)$$

これを示すには (15) から従う二つの等式  $\frac{\partial u_{-1}}{\partial u_0} + \frac{\partial v_1}{\partial v_0} = 0$ ,  $\frac{\partial u_{-1}}{\partial u_1} + \frac{\partial v_1}{\partial v_1} + \frac{\partial v_1}{\partial u_0} \frac{\partial u_{-1}}{\partial v_0} - \frac{\partial v_1}{\partial v_0} \frac{\partial u_{-1}}{\partial u_0} = 0$  を用いる。(33) 参照.) 最後に, (17) を (16) 第 2 式へ代入したものは Plebanski の方程式 (7) をまとめたものに他ならぬことに注意する。従って, こうして得られる  $e^1, \dots, e^4$  が (5) のよろ  $= ds^2$  をつくればそれが求める SDE の解である。

このように, 結局のところ最も基本的なのは方程式 (15) である, これが Penrose [2] と Plebanski [17] をつなげている。SDE はこの基本方程式 (15) から (18) を通じて従う帰結である。また Penrose の方法は (15) のひとつつの解法理論である。そこでは、続く二節では (15) 自体とそれに内在する構造について考える。

## 5. 方程式 (15) の構造, hierarchy の導入, 同値な別表現

以下では方程式 (15) の構造についてもう少し考えてみたが, そのためにはまず方程式 (15) の意味をはつきりさせておこう:

i) 方程式 (15) は Laurent 展開 (14) を代入し展開し直して得られる,  $u_n, v_n, \hat{u}_n, \hat{v}_n$  に対する外微分方程式系

$$\sum_{i+j=k} du_i \wedge du_j = \sum_{i+j=k} d\hat{u}_i \wedge d\hat{v}_j \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (19)$$

を單に簡潔に表現したものとみなす、(14)が収束せず單に形式的な級数である場合も含めて扱う。

ii) SDE, Penroseの構成法と結びつけるため、前節の末尾で述べた二方に従う、(15)または(19)では  $(u_1, v_1, u_0, v_0)$  は独立変数、  
他の  $u_n, v_n, \hat{u}_n, \hat{v}_n$  は従属変数をあらわすものとする。つまり、(19)の4次元積分多様体  $\mathcal{M}$  の上では  $du_1 \wedge dv_1 \wedge du_0 \wedge dv_0 \neq 0$  であるものののみを扱う。このとき(18)を介して SDE の解  $ds^2$  が得られる。実は(19)からただちに

$$du_1 \wedge dv_1 \wedge du_0 \wedge dv_0 = du_1 \wedge dv_1 \wedge d\hat{u}_0 \wedge d\hat{v}_0 = d\hat{u}_1 \wedge d\hat{v}_1 \wedge d\hat{u}_0 \wedge d\hat{v}_0$$

が従うので、 $(u_1, v_1, \hat{u}_0, \hat{v}_0)$ ,  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{u}_0, \hat{v}_0)$  を独立変数にえらんでよい。

iii) (19)において特に  $k < 0$  の場合のみとり出せば、 $u_n, v_n$  のみを含む方程式系が得られる。一般に次の形式的 Laurent 級数  $\sum a_n \lambda^n$  に対して  $\lambda$  の負巾部分、非負巾部分を

$$(\sum a_n \lambda^n)_- = \sum_{n<0} a_n \lambda^n, \quad (\sum a_n \lambda^n)_+ = \sum_{n \geq 0} a_n \lambda^n \quad (20)$$

とあらわすことにすれば、 $u_n, v_n$  に対するこれらの方程式系は

$$(du \wedge dv)_- = 0 \quad (21)$$

という形に表現される。SDE と結びつけるにはこれだけを考えても十分である。詳細は省くが、必要なれば(21)の解  $\hat{u}, \hat{v}$  と独立変数・従属変数の区別は(ii)と同じ)に対しても(15)をみたす  $\hat{u}, \hat{v}$

をいつでもつくれることが示せる。

更に、今後上のよろうな意味で定義された方程式(15), (21)を考えるときには、同時に新しい独立変数  $u_2, u_3, \dots, v_2, v_3, \dots$  を補っておき、(19)を独立変数  $u_n, v_n (n \geq 0)$ , 従属変数  $u_n, v_n (n < 0)$ ,  $\hat{u}_n, \hat{v}_n (n \geq 0)$  に対する外微分方程式系とみなすことにしてよう。その方が(15), (21)の内在的構造を探るには都合が良い。

その意味を説明しよう: このことは

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \lambda^n, \quad v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n \lambda^n, \quad \hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n \lambda^n, \quad \hat{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{v}_n \lambda^n \quad (22)$$

であるかえることに他ならぬ。独立変数を無限個用意することが気持ち悪く感じられるならば  $u_0, u_1, \dots, u_N, v_0, v_1, \dots, v_N (N < \infty)$  で打ち切って考えればよいか、 $N=\infty$  の場合でも(19)を上の従属変数に対する偏微分方程式系に書き直してみれば、得られる個々の方程式は無限和など含ますのはっきりした意味をもつ。このように独立変数を水増しすることは、従来の非線型可積分系の理論でも行なわれたことであり（例えは KdV 方程式は空間次元 = 時間次元 = 1 の方程式だが、これに新たな時間変数を付け加えて高次 KdV 方程式の系列を考えることができる）、このような新しい独立変数を使って得られる方程式の系列は hierarchy と呼ばれる。上に述べた独立変数の導入が確か

に hierarchy と呼べるも $\ddot{\text{ト}}$ であることは、方程式(15), (21)から従来の非線型可積分系に現れたものと同様の形をもつ様々な方程式を導く議論(次節)の過程で次第に明らかになる。

その議論の出発点となるのは次に述べる命題である。

命題(23)： 方程式(15)は次の二とに同値である。

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{array} \right)^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial \hat{u}}{\partial u_0} & \frac{\partial \hat{u}}{\partial v_0} \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial u_0} & \frac{\partial \hat{v}}{\partial v_0} \end{array} \right)^{-1} \begin{pmatrix} d\hat{u} \\ d\hat{v} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\det \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{array} \right) = \det \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial \hat{u}}{\partial u_0} & \frac{\partial \hat{u}}{\partial v_0} \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial u_0} & \frac{\partial \hat{v}}{\partial v_0} \end{array} \right) = 1.$$

命題(24)： 方程式(21)は次の二とに同値である。

$$\left( \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{array} \right)^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \right)_- = 0, \quad \det \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{array} \right) = 1. \quad (24)$$

紙数の都合で後者の証明のみ掲げておく。前者の証明も少し複雑になるだけ $\ddot{\text{ト}}$ 同様である。

[ $(21) \Rightarrow (24)$  の証明] まず  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(u_0, v_0)} = 1$  を示す。 $u_0, u_1, \dots, u_\ell, v_1, \dots$  を独立変数とみなしていき、 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(u_0, v_0)}$  は展開

$$du \wedge dv = \sum_{0 \leq k \leq \ell} \frac{\partial(u, v)}{\partial(u_k, u_\ell)} du_k \wedge du_\ell + \sum_{0 \leq k \leq \ell} \frac{\partial(u, v)}{\partial(v_k, v_\ell)} dv_k \wedge dv_\ell + \sum_{0 \leq k \leq \ell} \frac{\partial(u, v)}{\partial(u_k, v_\ell)} du_k \wedge dv_\ell \quad (25)$$

における  $du_0 \wedge dv_0$  の係数として現れる。他方 (21) より

$$du \wedge dv = (du \wedge dv)_- = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \sum_{i+j=m} du_i \wedge dv_j$$

であるが、左辺を上と同様に展開すると  $du_0 \wedge dv_0$  は  $m > 0$  の部分から現れる，“ $m=0$  から得る  $m \geq 3$   $du_i \wedge dv_j$  項の係数は 1？”

あることかわかる。従って  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(u_0, v_0)} = 1$  を得る。

次に (24) の第二式を示す。 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(u_0, v_0)} = 1$  に注意すれば

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} & -\frac{\partial u}{\partial v_0} \\ -\frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial u_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} du - \frac{\partial u}{\partial v_0} dv \\ -\frac{\partial v}{\partial u_0} du + \frac{\partial u}{\partial u_0} dv \end{pmatrix} \quad (26)$$

であるが、右辺の行列成分をそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial v_0} du - \frac{\partial u}{\partial v_0} dv &= \sum \frac{\partial(u, v)}{\partial(u_k, v_0)} du_k - \sum \frac{\partial(u, v)}{\partial(v_0, v_\ell)} dv_\ell, \\ -\frac{\partial v}{\partial u_0} du + \frac{\partial u}{\partial u_0} dv &= \sum \frac{\partial(u, v)}{\partial(u_0, u_\ell)} du_\ell + \sum \frac{\partial(u, v)}{\partial(u_0, v_\ell)} dv_\ell, \end{aligned} \quad (27)$$

と展開すると、その係数は (25) 右辺に現れるものの一部と一致する。従って (15) 通り

$$\left( \frac{\partial v}{\partial v_0} du - \frac{\partial u}{\partial v_0} dv \right)_- = 0, \quad \left( -\frac{\partial v}{\partial u_0} du + \frac{\partial u}{\partial u_0} dv \right)_- = 0.$$

$$[(24) \Rightarrow (21) \text{ の証明}] \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \text{ とおくと,}$$

$$du \wedge dv = \sigma_1 \wedge \sigma_2, \quad (\sigma_1)_- = 0, \quad (\sigma_2)_- = 0.$$

従って (21) が従う。

以上により命題 (24) が証明された。

## 6. 方程式(15)からの帰結, vector場の交換関係, 線型系

前節に引き続いて方程式(15)あるいは(21)を考える。ここで独立変数は  $u_0, u_1, u_2, \dots, v_0, v_1, v_2, \dots$  までふやしておく。これから示したいのはこれらの方程式からあるvector場たちの可換性などにそれを用いた線型微分方程式系が従うということである。こうして得られる新しい方程式は従来の非線型可積分系と共通する構造上の特徴をもつ。

まず結果を先に述べよう。一般に  $(u_0, v_0)$  の函数  $\chi$  に対する Hamilton vector 場  $H_\chi$ , および  $\chi_1, \chi_2$  に対する Poisson bracket  $\{\chi_1, \chi_2\}$  を次のように定義する。

$$H_\chi = \frac{\partial \chi}{\partial u_0} \frac{\partial}{\partial v_0} - \frac{\partial \chi}{\partial v_0} \frac{\partial}{\partial u_0}, \quad (28)$$

$$\{\chi_1, \chi_2\} = H_{\chi_1}(\chi_2) = \frac{\partial \chi_1}{\partial u_0} \frac{\partial \chi_2}{\partial v_0} - \frac{\partial \chi_1}{\partial v_0} \frac{\partial \chi_2}{\partial u_0}.$$

これを使って vector 場  $X_k, Y_k$  を

$$X_k = \frac{\partial}{\partial u_k} - \lambda \frac{\partial}{\partial u_{k-1}} + H_{v_{-k}}, \quad (29)$$

$$Y_k = \frac{\partial}{\partial v_k} - \lambda \frac{\partial}{\partial v_{k-1}} - H_{u_{-k}}$$

と定義する。このとき

命題(30): 方程式(15)から  $u, v, \hat{u}, \hat{v}$  に対する線型微分方程式

$$X_k(w) = 0, \quad Y_k(w) = 0, \quad (30)$$

$k = 1, 2, \dots, \quad w = u, v, \hat{u}, \hat{v},$

が従う。(  $w = u, v$  に対する方程式は実は(21)だから省略する。)

命題(31): 方程式(15)(実は(21)で十分)から交換関係

$$[X_k, X_j] = 0, \quad [X_k, Y_j] = 0, \quad [Y_k, Y_j] = 0, \quad (31)$$

が従う。( [,] は交換子  $[A, B] = AB - BA$ .)  $k, j = 1, 2, \dots$

命題(31)に関するもう少し強いことがいえる。 $X_k, Y_k$  の定義および一般的な公式

$$[H_{X_1}, H_{X_2}] = H_{\{X_1, X_2\}}$$

を用いると、これら2つの交換子は

$$[X_k, X_j] = H_{\left(\frac{\partial}{\partial u_k} - \lambda \frac{\partial}{\partial u_{k-1}}\right)(v_{-j}) - \left(\frac{\partial}{\partial u_j} - \lambda \frac{\partial}{\partial u_{j-1}}\right)(v_{-k}) + \{v_{-k}, v_{-j}\}},$$

$$[X_k, Y_j] = H_{-\left(\frac{\partial}{\partial u_k} - \lambda \frac{\partial}{\partial u_{k-1}}\right)(u_{-j}) - \left(\frac{\partial}{\partial v_j} - \lambda \frac{\partial}{\partial v_{j-1}}\right)(v_{-k}) - \{v_{-k}, u_{-j}\}},$$

$$[Y_k, Y_j] = H_{-\left(\frac{\partial}{\partial v_k} - \lambda \frac{\partial}{\partial v_{k-1}}\right)(u_{-j}) + \left(\frac{\partial}{\partial v_j} - \lambda \frac{\partial}{\partial v_{j-1}}\right)(u_{-k}) + \{u_{-k}, u_{-j}\}},$$

という Hamilton vector  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  の形にあらわせるが、

命題(32): 方程式(15)(実は(21)で十分)から方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_k} - \lambda \frac{\partial}{\partial u_{k-1}}\right)(v_{-j}) - \left(\frac{\partial}{\partial u_j} - \lambda \frac{\partial}{\partial u_{j-1}}\right)(v_{-k}) + \{v_{-k}, v_{-j}\} = 0, \quad (32a)$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial u_k} - \lambda \frac{\partial}{\partial u_{k-1}}\right)(u_{-j}) - \left(\frac{\partial}{\partial v_j} - \lambda \frac{\partial}{\partial v_{j-1}}\right)(v_{-k}) - \{v_{-k}, u_{-j}\} = 0, \quad (32b)$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial v_k} - \lambda \frac{\partial}{\partial v_{k-1}}\right)(u_{-j}) + \left(\frac{\partial}{\partial v_j} - \lambda \frac{\partial}{\partial v_{j-1}}\right)(u_{-k}) + \{u_{-k}, u_{-j}\} = 0, \quad (32c)$$

$$k, j = 1, 2, \dots.$$

が従う。

(18)を導くとき必要だった二つの方程式

$$\frac{\partial u_1}{\partial v_0} + \frac{\partial v_1}{\partial u_0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial u_0} + \frac{\partial v_1}{\partial v_0} + \frac{\partial v_1}{\partial u_0} \frac{\partial u_1}{\partial v_0} - \frac{\partial v_1}{\partial v_0} \frac{\partial u_1}{\partial u_0} = 0 \quad (33)$$

かつ  $k=j=1$  に対する (32b) は他な  $S$  ない。ちなみにこの二つの方程式は  $(u_1, v_1, u_0, v_0) = (-q, p, x, y)$  という対応で (10) に同値である。実際第一の方程式は

$$u_1 = \frac{\partial \Theta}{\partial v_0}, \quad v_1 = -\frac{\partial \Theta}{\partial u_0} \quad (34)$$

という potential  $\Theta$  の存在を保証し、これを第二の方程式へ代入すると (10) を得る。

(30)-(32) は  $X_k, Y_k$  に関する線型あるいは双線型の量のみ含むので、 $X_k, Y_k$  を適当な 1 次結合で書きかえることにより、同値な別表現を得る。そのような表現として大切なのは次の vector 場を用いるものである。

$$\begin{aligned} \tilde{X}_k &= X_k + \lambda X_{k-1} + \cdots + \lambda^{k-1} X_1 = \frac{\partial}{\partial u_k} + H_{\lambda^k v_0 + \lambda^{k-1} v_1 + \cdots + v_{-k}}, \\ \tilde{Y}_k &= Y_k + \lambda Y_{k-1} + \cdots + \lambda^{k-1} Y_1 = \frac{\partial}{\partial v_k} - H_{\lambda^k u_0 + \lambda^{k-1} u_1 + \cdots + u_{-k}}. \end{aligned} \quad (35)$$

これらを用いると (30)-(32) は次の方程式に同値になる。

$$\tilde{X}_k(w) = 0, \quad \tilde{Y}_k(w) = 0, \quad w = u, v, \hat{u}, \hat{v}, \quad (36)$$

$$[\tilde{X}_k, \tilde{X}_j] = 0, \quad [\tilde{X}_k, \tilde{Y}_j] = 0, \quad [\tilde{Y}_k, \tilde{Y}_j] = 0, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_k} (\lambda^j v_0 + \lambda^{j-1} v_{-1} + \cdots + v_{-j}) - \frac{\partial}{\partial u_j} (\lambda^k v_0 + \lambda^{k-1} v_{-1} + \cdots + v_{-k}) \\ + \{\lambda^k v_0 + \lambda^{k-1} v_{-1} + \cdots + v_{-k}, \lambda^j v_0 + \lambda^{j-1} v_{-1} + \cdots + v_{-j}\} = 0, \end{aligned} \quad (38a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial u_k}(\lambda^j u_0 + \lambda^{j-1} u_{-1} + \cdots + u_{-j}) - \frac{\partial}{\partial v_j}(\lambda^k v_0 + \lambda^{k-1} v_{-1} + \cdots + v_{-k}) \\ - \{ \lambda^k v_0 + \lambda^{k-1} v_{-1} + \cdots + v_{-k}, \lambda^j u_0 + \lambda^{j-1} u_{-1} + \cdots + u_{-j} \} = 0, \quad (38b)$$

$$-\frac{\partial}{\partial v_k}(\lambda^j u_0 + \lambda^{j-1} u_{-1} + \cdots + u_{-j}) + \frac{\partial}{\partial u_j}(\lambda^k v_0 + \lambda^{k-1} v_{-1} + \cdots + v_{-k}) \\ + \{ \lambda^k v_0 + \lambda^{k-1} v_{-1} + \cdots + v_{-k}, \lambda^j u_0 + \lambda^{j-1} u_{-1} + \cdots + u_{-j} \} = 0. \quad (38c)$$

$$k, j = 1, 2, \dots$$

この表示の利点は(36)が  $u_k, v_k$  ( $k=1, 2, \dots$ )に関する縮展方程式の形をもつことである。このことは  $u_k, v_k$  を時間変数（これは本来の4次元時空の時間軸とは別のもの）とみなしてもよいことを示唆するが、このような時間変数の系列の導入は非線型可積分系の hierarchy の記述には不可欠なものであった[13, 14]。

さて以上の新たに導かれた方程式(30)-(32), (36)-(38)を従来の非線型可積分系の記述に現れたもの([15, 11]とその引用文献参照)と見比べてみよう。後者の多くは交換関係

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} - U, \frac{\partial}{\partial \eta} - V \right] = \frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \xi} + [U, V] = 0 \quad (39)$$

の形で方程式が記述される。ここで  $U$ ,  $V$  は独立変数  $(\xi, \eta)$  以外に parameter  $\lambda$  にも依存する行列  $U = U(\xi, \eta, \lambda)$ ,  $V = V(\xi, \eta, \lambda)$  で  $\lambda$  に関する有理函数であるもの；あるいは  $(\xi, \eta)$  以外の変数  $x$  に関する常微分作用素  $U = U(\xi, \eta, x, \frac{\partial}{\partial x})$ ,  $V = V(\xi, \eta, x, \frac{\partial}{\partial x})$ ；  $t$  などの場合に応じていろいろである。(39)は形式的には線型系

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi} - U \right) W = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - V \right) W = 0 \quad (40)$$

に対する Frobenius の意味の積分可能条件であるが、Riemann-Hilbert 問題などの強力な解法理論を非線型可積分系に適用するとさにはこの線型系が基本的な役割を果たす。自己双対 Yang-Mills 方程式の場合には独立変数は 4 個  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  であり、(39) と (40) の代わりに

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \lambda \frac{\partial}{\partial \xi_2} - U, \quad \frac{\partial}{\partial \eta_1} - \lambda \frac{\partial}{\partial \eta_2} - V \right] = 0, \quad (41)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \lambda \frac{\partial}{\partial \xi_2} - U \right) W = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial \eta_1} - \lambda \frac{\partial}{\partial \eta_2} - V \right) W = 0, \quad (42)$$

( $=$  で  $U, V$  は  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \lambda$  に依存する 3 行列で 2 つ以上は 1 次式) という形の方程式が現れる。 $(30), (31), (36), (37)$  をこれと見比べてみると、 $U, V$  にあたり部分が Hamilton vector 場になつてゐる以外は全く同じ形をもつことがわかる。ただし正確には之は  $(30), (31)$  は  $(41), (42)$  と、また  $(36), (37)$  は  $(39), (40)$  と同じ形をしてゐる。同時に二つの異なるタイプの方程式  $(39)(40), (41)(42)$  と対応するには奇妙に思われるかも知れないが、これは  $(41)(42)$  における  $\lambda \frac{\partial}{\partial \xi_2} + U, \frac{\partial}{\partial \eta_2} + V$  を  $(39)(40)$  における  $U, V$  と同一視したと思えばよいのであり、実際  $\frac{\partial}{\partial u_0}, \frac{\partial}{\partial v_0}$  は

$$\frac{\partial}{\partial u_0} = -H_{v_0}, \quad \frac{\partial}{\partial v_0} = H_{u_0}$$

というように Hamilton vector 場で表示されるから、そのような同一視は今の場合には可能なことがある。

ここで最も注意すべき点は、 $(39)-(42)$  における  $U, V$  として

SDE では Hamilton vector 場が現れるということである。これはもとを正せば Penrose の構成法において  $\lambda \in C$  に依存する局所正準変換が登場することを反映している。一般に  $U$  と  $V$  は何らかの群の Lie 環の元であるが（ついでに言えれば  $W$  はその群のある線型表現に属する），局所正準変換の群（正確には擬群）の Lie 環の元は今までもなく Hamilton vector 場であり，何やら辻褄が合っているわけだ。この辺のことは次節でも論じるが，余隨伴軌道の方法[15]のような表現論の側面から見た意味はまだよくわからぬ。

最後に命題(30)–(32)の証明について触れておこう。(31)が(32)からただちに従うことにはすでに注意した。(32)は  $w = u, v$  に対する方程式(30)を  $k$  べきに展開して，その係数から出でく 3 方程式たちを適当に足したり引いたりすれば示せる。そこで(30)のみ証明を掲げておく。証明には命題(23), (24)が示された方程式(15), (21)の特徴づけを利用するが，(30)と  $w = u, v$  に対して証明するには(24)を用いれば十分なるべく，紙数の関係でちつとものみ述べておく。 $w = \hat{u}, \hat{v}$  を含めての議論も同様である。

[ $w = u, v$  に対する(30)の証明]：まず(21)から次を導く。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{-1}}{\partial u_{k-1}} + \frac{\partial v_{-k}}{\partial v_0} &= 0, & \frac{\partial v_{-1}}{\partial u_{k-1}} - \frac{\partial u_{-k}}{\partial u_0} &= 0, \\ \frac{\partial u_{-1}}{\partial v_{k-1}} - \frac{\partial u_{-k}}{\partial v_0} &= 0, & \frac{\partial v_{-1}}{\partial v_{k-1}} - \frac{\partial u_{-k}}{\partial u_0} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{43}$$

これを導くには (21) を用いて展開して  $\lambda^i$  の係数をとり出して  
得る方程式 ( $\lambda^i$  が  $\Gamma_k$  (19) の  $k=-1$  とおいたものに他  $t_f$  と  $t_g$  は)

$$\sum_{i+j=-1} du_i \wedge dv_j = 0$$

を考えて、左辺を (25) の  $t_f$  展開し、 $du_{k-1} \wedge dv_0, du_{k-1} \wedge du_0, dv_{k-1} \wedge dv_0,$   
 $dv_{k-1} \wedge du_0$  の係数を引き出せばよい。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \quad \text{とおく。} \quad \text{二の両辺は 1 次微分形}$$

式であるから vector 基  $X_k$  との自然な pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  により

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_k(u) \\ X_k(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1(X_k) \\ \sigma_2(X_k) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

ここで各成分が  $\lambda$  のどのような Laurent 級数であるかを見ると、

i) (24), (29) は  $\sigma_1(X_k), \sigma_2(X_k)$  は  $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \dots$  のみ含む。

ii)  $\frac{\partial u}{\partial u_0}, \frac{\partial u}{\partial v_0}, \frac{\partial v}{\partial u_0}, \frac{\partial v}{\partial v_0}$  は  $\lambda^0, \lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \dots$  のみ含む

iii)  $X_k(u), X_k(v)$  は  $\lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \dots$  のみ含む。  $t_f$  も  $t_g$  も

$$X_k(u) = \sum_{n<0} \left( \frac{\partial u_n}{\partial u_k} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial u_{k-1}} + \{v_{-k}, u_n\} \right) \lambda^n + \left( -\frac{\partial u_{-1}}{\partial u_{k-1}} + \{v_{-k}, u_0\} \right),$$

$$X_k(v) = \sum_{n<0} \left( \frac{\partial v_n}{\partial u_k} - \frac{\partial v_{n-1}}{\partial u_{k-1}} + \{v_{-k}, v_n\} \right) \lambda^n + \left( -\frac{\partial v_{-1}}{\partial u_{k-1}} + \{v_{-k}, v_0\} \right),$$

かつ 右辺最後の項は (43)i) より 消えるからである。

以上 i) より (44) 右辺は  $\lambda^0, \lambda^1, \dots$  のみ、左辺は  $\lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \dots$  のみ含み、結局両辺とも消えることがわかる。従って  $X_k(u) = X_k(v) = 0$ 。同様に  $t_f$  も  $t_g$  も  $X_k(u) = X_k(v) = 0$  を示せる。

以上 i) より 命題 (30) a  $w = u, v$  の部分が証明された。

## 7. Penrose の構成法の群論的解釈

前二節では SDE のいわば種(seed) と いうべき基本方程式 (15)あるいは(21)について議論し、少くとも方程式の構造論の水準ではそれらが従来の非線型可積分系と極めて良く似た面をもつことを指摘した。そこでこの節では解法理論の水準で両者の関連を探る。そのためには第4節で示した Penrose の構成法に群論的な解釈を与え、それを従来の非線型可積分系の解法である Riemann-Hilbert 問題の方法 [15] と比較してみる。ここに現れる無限次元群（正確には群ではない）は  $\mathbb{C}^2$  上の正則局所正準変換の擬群の loop 群であり、本質的には Boyer, Plebanski [12] の群  $C$  と同じものと言ってよいが、我々はそれをもっと積極的に解の記述に利用しようというわけである。このよう群論的解釈は  $u_n, v_n (n > 0)$  の時間変数としての役割をより鮮明に浮かび上がらせる。

必要とする擬群等の説明から始めよう。第4節に触れたように、 $\mathbb{C}^2$  上に座標  $(x, y)$  をとり  $dx \wedge dy$  を symplectic form とする symplectic structure を考える。正則局所正準変換の擬群

$$G_{\text{can}} = \{(f, g); (x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y)) \text{ は } \mathbb{C}^2 \text{ 内の開集合から}$$

$$\text{開集合への正則同型 } z^* \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = 1 \text{ をみたす} \} \quad (45)$$

を導入し、さらに第4節のような  $C, C_{\pm}$  に對して

$$\mathcal{G}_C = \{(f, g); C \text{ から } G_{can} \text{ への解析的写像} \\ C \ni x \rightarrow [(x, y) \rightarrow (f(x, y, \lambda), g(x, y, \lambda))] \in G_{can}\}, \quad (46a)$$

$$\mathcal{B}_C = \{(f, g) \in \mathcal{G}_C; \lambda \text{ に関する } C \cup C_+ \text{ の近傍まで } G_{can} \\ \text{への正則写像として延長されるもの}\}, \quad (46b)$$

$$\mathcal{N}_C = \{(f, g) \in \mathcal{G}_C; \lambda \text{ に関する } C \cup C_- \text{ の近傍まで } G_{can} \\ \text{への正則写像として延長され、かつ} \\ (f, g)|_{\lambda=\infty} = \text{恒等写像, となるもの}\}, \quad (46c)$$

とおき、 $\mathcal{G}_C$  の元の積を入をとめる二つの写像の合成

$$(f, g) \circ (\bar{f}, \bar{g}) = (f(\bar{f}(x, y, \lambda), \bar{g}(x, y, \lambda), \lambda), g(\bar{f}(x, y, \lambda), \bar{g}(x, y, \lambda), \lambda)) \quad (47)$$

により定義する。一般的な用語として、群  $G$  に對して  $C$  から  $G$  への写像の集合に同様の仕方で積を定義したものは Loop 群と呼ばれる。 $\mathcal{G}_C$  の場合には  $G_{can}$  が群ではなく擬群（任意の 2 個の間に積が定義されているとは限らない）に過ぎないから  $\mathcal{G}_C$  を Loop 群と呼ぶのは正確ではないが、似たようなものだ。

大切なことは、 $\mathcal{G}_C$  の単位元（=恒等写像）は十分近い任意の元  $(f, g)$  は必ず、かつ一意的に

$$(f, g) = (\varphi, \psi) \circ (\hat{\varphi}, \hat{\psi})^{-1}, \quad (\varphi, \psi) \in \mathcal{N}_C, \quad (\hat{\varphi}, \hat{\psi}) \in \mathcal{B}_C \quad (48)$$

という積に分解されるという事実である。もちろん  $\varphi = \psi$  、

単位元に十分近い、と言うときには本当は  $\mathcal{G}_C$  の位相を明確にしておく必要があるが、今は常識的に判断しておけはよい。群論的に考えれば (48) の分解の成立には次のようすも、とても美しい説明がつけられる:  $\mathcal{G}_C$  の Lie 環にあたるのは  $\lambda \in C$  に依存する Hamilton vector 場

$$H_X = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}, \quad X = X(x, y, \lambda)$$

のなす Lie 環であり (公式  $[H_{X_1}, H_{X_2}] = H_{[X_1, X_2]}$  に注意), そのうちは  $N_C, B_C$  に対応する  $\alpha$  と  $C$  に沿って Laurent 展開  $X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \lambda^n$  するとときそれが  $X_n = 0 (n \geq 0)$ ,  $X_n = 0 (n < 0)$  となるものである。従って (20) の記号を使つて表示される Lie 環の直和分解

$$\begin{aligned} H_X &= H_{(X)_-} + H_{(X)_+} \\ \mathcal{G}_C \text{ の Lie 環} &= N_C \text{ の Lie 環} \oplus B_C \text{ の Lie 環} \end{aligned} \tag{49}$$

が得られるが、これを指數写像で  $\mathcal{G}_C, N_C, B_C$  へ持ち上げれば (48) の分解が得られるわけである … (ただし  $L = \mathbb{C}$  ではこの議論を正当化する問題には立ち入らず、代わりに (48) の分解を無限次元での陰函数・逆函数の問題に帰着させて示す idea につれて後に触れたいと思う。) 同様の議論を  $G$  が行列群 ( $GL(r, \mathbb{C})$ ,  $SL(r, \mathbb{C})$ , etc.) の場合の Loop 群にあてはめれば (48) に對応するのを Riemann-Hilbert 問題、すなわち、与えられた  $C$  上の  $G$  値解析的函数  $g(\lambda)$  に対して  $C \cup C_+$  の近傍で定義された  $G$  値函数  $\hat{h}(\lambda)$  と  $C \cup C_-$  の近傍で定義された  $G$  値函数  $h(\lambda)$  で

$$g(\lambda) = h(\lambda) \hat{h}(\lambda)^{-1}, \quad h(\infty) = 1 \quad (50)$$

をみたすものを見出す問題に他ならぬ。しかし通常 Riemann-Hilbert 問題を解く際にはこのような群論的なやり方は用ひず、Fredholm型積分方程式に問題を帰着させることが多々。

さて (48) の分解を用いて方程式 (45) を解く方法について説明する。data として  $\varphi_C$  の元  $(f, g)$  を与えよ。 $\exp\left(-\sum_{n>0} u_n \lambda^n \frac{\partial}{\partial x} - \sum_{n>0} v_n \lambda^n \frac{\partial}{\partial y}\right)$   
 $x, y \rightarrow (x - \sum_{n>0} u_n \lambda^n, y - \sum_{n>0} v_n \lambda^n)$  とすれば translation をあらわせばこれは  $\varphi_C$  の元を与えるが  $(|u_n|, |v_n|)$  には適當な増大度を仮定しておく）、これと  $(f, g)$  の合成を (48) のように分解する。

$$\exp\left(-\sum_{n>0} u_n \lambda^n \frac{\partial}{\partial x} - \sum_{n>0} v_n \lambda^n \frac{\partial}{\partial y}\right) \circ (f, g) = (\varphi, \psi) \circ (\hat{\varphi}, \hat{\psi})^{-1}, \quad (51)$$

$$(\varphi, \psi) = (\varphi(u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots; xy\lambda), \psi(u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots; xy\lambda)) \in N_C,$$

$$(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = (\hat{\varphi}(u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots; xy\lambda), \hat{\psi}(u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots; xy\lambda)) \in B_C.$$

ただし  $u, v$  は  $u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots$  を parameter とみなしておき

$(\varphi, \psi), (\hat{\varphi}, \hat{\psi})$  は  $u, v$  に依存する  $N_C, B_C$  の元である。このとき

$$u = \sum_{n>0} u_n \lambda^n + \varphi(u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots; u_0, v_0 \lambda) \quad \hat{u} = \hat{\varphi}(u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots; u_0, v_0 \lambda),$$

$$v = \sum_{n>0} v_n \lambda^n + \psi(u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots; u_0, v_0 \lambda) \quad \hat{v} = \hat{\psi}(u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots; u_0, v_0 \lambda), \quad (52)$$

が求める方程式 (15) の解を与えるのである。

この解法は確かに Penrose の構成法を群論的に焼直した

ものになつてゐる。實際(51)右辺の  $(\hat{\varphi}, \hat{q})^{-1}$  を左辺へ移行した式の意味を(52)と見比べつつよく考えてみれば容易にわかるようだ。(51)は方程式

$$u = f(\hat{u}, \hat{v}, \lambda), \quad v = g(\hat{u}, \hat{v}, \lambda)$$

を書き直したものに他はない。この方程式は(13)と全く同じ形をしており、唯一の違いは今の場合  $u_2, u_3, \dots, v_2, v_3, \dots$  に“ $\hat{u}$ ”  
“ $\hat{v}$ ”新しい変数が入ってきてているという点のみである。このことから方程式(15)が従うのは第4節と同様である。それでは上の解法は Penrose の構成法以上の新しいことは何と言つていいことになるのか、というと、そうではない。Penrose の本来のやり方は水平の変形理論を用ひるので  $u_1, \dots, u_N, v_1, \dots, v_N$  を打ち切つてそれから先の  $u_n, v_n$  をひととした場合には何とか使えるが、 $N = \infty$ とした場合にはお手あげである。群論的な方法の強みはそのような場合も含めて扱える点にある。また Riemann-Hilbert 問題と同じ思想圏に属する方法であることもすでに述べた(48)と(50)の比較から明らかであろう。

(51)に関するには、 $u_n, v_n (n > 0)$ を時間変数とみるとときの初期値問題との関連にも触れておかねばならぬ。初期値を

$$\begin{aligned} \varphi_{in} &= \varphi|_{u_n=v_n=0 (n>0)}, \quad q_{in} = q|_{u_n=v_n=0 (n>0)} \\ \hat{\varphi}_{in} &= \hat{\varphi}|_{u_n=v_n=0 (n>0)}, \quad \hat{q}_{in} = \hat{q}|_{u_n=v_n=0 (n>0)} \end{aligned} \tag{53}$$

で定義すると (51) が

$$(f, g) = (\varphi_{in}, \psi_{in}) \circ (\hat{\varphi}_{in}, \hat{\psi}_{in})^{-1}$$

であり、これを (51) へ代入して整理すれば次の方程式を得る。

$$(\varphi, \psi)^{-1} \circ \exp\left(-\sum_{n>0} u_n \lambda^n \frac{\partial}{\partial x} - \sum_{n>0} v_n \lambda^n \frac{\partial}{\partial y}\right) \circ (\varphi_{in}, \psi_{in}) = (\hat{\varphi}, \hat{\psi})^{-1} \circ (\hat{\varphi}_{in}, \hat{\psi}_{in}) \quad (54)$$

初期値と時間発展を結ぶこの種の関係は従来の非線型可積分系でも知られており ([1]) より  $\psi$  を用いた Mulase, Ueno-Takasaki の論文 [2] 参照), そこでは行列や線型作用素の積で関係式の両辺が記述され、(54) のように写像の合成が現れるのは SDE 特有の事情である。 (54) の  $s$  は特に  $(\varphi, \psi)$  の時間発展  $(\varphi_{in}, \psi_{in}) \rightarrow (\varphi, \psi)$  が

$$(\varphi, \psi)^{-1} \circ \exp\left(-\sum_{n>0} u_n \lambda^n \frac{\partial}{\partial x} - \sum_{n>0} v_n \lambda^n \frac{\partial}{\partial y}\right) \circ (\varphi_{in}, \psi_{in}) \in \mathcal{B}_C \quad (55)$$

という方程式が記述されることがわかるが、これは方程式 (21) ある  $w = u, v$  に限った方程式 (30) の  $u_n, v_n (n > 0)$  に関する初期値問題を群論的に解く方法を示している。

最後に (48) の分解を無限次元の陰函数・逆函数の問題に帰着させる idea について触れる。そのためには無限個の変数  $\xi_n^{(\alpha)}$  ( $-\infty < n < \infty, \alpha = 0, 1$ ),  $\Xi_n^{(\alpha)} (n < 0, \alpha = 0, 1)$  を用意して次の方程式を参考する。

$$f\left(\sum_{n<0} \Xi_n^{(0)} \lambda^{-n}, \sum_{n<0} \Xi_n^{(1)} \lambda^{-n}, \lambda\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n^{(0)} \lambda^{-n-1} \quad (\lambda \neq 0 \text{ 且等的}),$$

$$g\left(\sum_{n<0} \Xi_n^{(0)} \lambda^{-n}, \sum_{n<0} \Xi_n^{(1)} \lambda^{-n}, \lambda\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n^{(1)} \lambda^{-n-1} \quad (\lambda \neq 0 \text{ 且等的}). \quad (56)$$

(56) が  $\lambda$  に関して恒等的に成立する、という条件により、これ  
の無限変数の間に何の函数関係が生じる。まず (56) を素直に眺  
めればこれは無限次元空間の間の二つの写像

$$F: (\Xi_n^{(0)}, \Xi_n^{(1)})_{n<0} \mapsto (\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)})_{n \geq 0},$$

$$H: (\Xi_n^{(0)}, \Xi_n^{(1)})_{n<0} \mapsto (\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)})_{n<0},$$

を定める。 $(f, g)$  が正則同型であることにより、 $F, H$  はともに  
正則写像であり  $H$  は局所的に逆写像をもつことがわかる。 $F$   
と  $H^{-1}: (\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)})_{n<0} \rightarrow (\Xi_n^{(0)}, \Xi_n^{(1)})_{n<0}$  の合成

$$F \circ H^{-1}: (\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)})_{n<0} \rightarrow (\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)})_{n \geq 0}$$

は (56) で定まる函数関係から  $\Xi_n^{(0)}, \Xi_n^{(1)}$  を消去したものに他ならずす  
い。さて = = 特に  $(\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)})_{n<0}$  の値を

$$\xi_{-1}^{(0)} = x, \quad \xi_{-1}^{(1)} = y, \quad \xi_n^{(0)} = \xi_n^{(1)} = 0 \quad (n < -1) \quad (57)$$

とおいたときの  $F \circ H^{-1}, H^{-1}$  の値  $(\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)})_{n \geq 0}, (\Xi_n^{(0)}, \Xi_n^{(1)})_{n<0}$  を使

う

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, \lambda) &= \sum_{n=-1}^{\infty} \xi_n^{(0)} \lambda^{-n-1}, & \psi(x, y, \lambda) &= \sum_{n=-1}^{\infty} \xi_n^{(1)} \lambda^{-n-1}, \\ \hat{\varphi}(x, y, \lambda) &= \sum_{n<0} \Xi_n^{(0)} \lambda^{-n-1}, & \hat{\psi}(x, y, \lambda) &= \sum_{n<0} \Xi_n^{(1)} \lambda^{-n-1} \end{aligned} \quad (58)$$

と定義すると、これが (48) をみたすものである。

## 8.まとめと展望

以上長い議論を通じて SDE を非線型可積分系の一種とし  
て扱う可能性を探ってきたが、そのような見方は十分に通用

するのみならず、今迄知られていないか、た新しい側面を明るかにすることも判った。我々の議論の出発点は、Boyer, Plebanski [12]が行なったように Penrose[2]の構成法から無限個の未知函数をもつ方程式(15) ( $\Leftrightarrow$ (19)) を抽出し、それを基本方程式とみなすことにはあったが(第4節)，そのことに基いて従来の非線型可積系との比較検討を進めるこにより、方程式の構造論(第5, 6節)，解法理論(第7節)の両面において両者の著しい類似性が確認されたわけである。この議論を通じて、[12]で導入された無限次元群 $C$ が Boyer, Plebanski の指摘以上に積極的な役割を解法理論で果たすこと、さらにその Lie 環の元といふべきある種の Hamilton vector 場が方程式の内在的構造の記述において基本的な量として現れること、等も明らかになった。

しかしながらまだ解明し尽くされていない面も多い。例えば解法理論の群論的な意味は第7節で論じられたが、余隨伴軌道の方法など表現論とかかわる問題はそのまま残されている。また SDE を特徴づける群である Boyer-Plebanski 群 $C$ (我々の $\mathcal{G}_C$ ) は 2 次元局所正準変換の擬群の loop 群といふべきものであったが、これを他の変換(擬)群の loop 群でおきかえるなどのような方程式が現れるか、というのもこれがさの大切な問題である。試みに 2 次元の局所正則同型全体の擬群 $G_{\text{diffeo}}$ について考えてみると、 $X_k, Y_k$  の形は第6節のものとは異な

るが (30), (31), (36), (37) と同じ形の方程式が得られ, (15) のようなも  
のは  $T_0 < 0$ , この場合には (30), (31), (36), (37) が基本方程式であるこ  
とがわかる. この点で興味深いのは Zakharov - Shabat [19] が自  
己双対 Yang-Mills 方程式に関連して, vector 場の可換性として  
表示される方程式について言及していることである. 我々の  
議論はこの種の方程式の系統的研究手段を示唆しているよう  
に思われる. 最後に, 我々の議論を佐藤の Grassmann 多様体の  
方法 [13] と結びつけるという問題が残っている. そのためには  
何とかの線型構造が必要であるが, 従来の非線型可積分系  
の場合と同様ニニでも自然な線型微分方程式系 (31), (36) が存在  
するので, この方向への展開も大いに有望視される.

### 文 献

1. M.F. Atiyah: Geometry of Yang-Mills Fields, Pisa ('79), およびその引用文献.
2. R. Penrose: Nonlinear Gravitons and Curved Twistor Theory, Gen. Rel. Grav. 7, 31-52 ('76)
3. R.O. Hansen, E.T. Newman, R. Penrose, K.P. Tod: Proc. R. Soc. London A363, 445-468 ('78).
4. E.T. Newman, J.R. Porter, K.P. Tod: Twistor Surfaces and Right-Flat Spaces, Gen. Rel. Grav. 9, 1129-1142 ('78).
5. W.D. Curtis, D.E. Lerner, F.R. Miller: Some Remarks on the Nonlinear Graviton, Gen. Rel. Grav. 10, 557-565 ('79).
6. W.D. Curtis, D.E. Lerner, F.R. Miller: Complex pp waves and the nonlinear  
graviton construction, J. Math. Phys. 19, 2024-2027 ('78).
7. R.S. Ward: A class of self-dual solutions of Einstein's equations, Proc. R. Soc.  
London A363, 289-295 ('78).

8. K.P.Tod, R.S.Ward: Self-dual metrics with self-dual Killing vectors, Proc. R. Soc. London A368, 411-427 ('79).
9. N.J.Hitchin: Polygons and gravitons, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 85, 465-476 ('79).
- \_\_\_\_\_ : Complex manifolds and Einstein's equations, Lect. Notes in Math. 970, 73-99, Springer ('82).
10. Complex manifold techniques in theoretical physics (ed. D.E.Lerner, P.D. Sommers, Research Notes in Math. 32, Pitman ('79)) 内收の各論文.
11. K.Takasaki: A new approach to the self-dual Yang-Mills equations, Commun. Math. Phys. 94, 35-59 ('84).  
\_\_\_\_\_ : 高次元完全積分可能系とその自己双対 Yang-Mills 方程式, 数学のあゆみ 27, 73-107 ('84).
12. C.P.Boyer: The geometry of complex self-dual Einstein Spaces, Lect. Notes in Phys. 189, 25-45, Springer ('83).  
C.P.Boyer, J.F.Plebanski: An infinite hierarchy of conservation laws and nonlinear superposition principles for self-dual Einstein spaces, Preprint.
13. M.Sato: Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifold. 数理解析研究所講究録 439, 30-46 ('81).  
M.Sato and Y.Sato: Proc. U.S.-Japan Seminar, Nonlinear PDE in Appl. Science, Tokyo 1982 (ed. P.D.Lax, H.Fujita, North-Holland), 259-271 ('82).
14. 柏原, 神保, 伊達, 三輪: リトルニ方程式と Kac-Moody 4-環, 数学 34-1 ('82), M.Jimbo, T.Miwa: Solitons and infinite dimensional Lie algebras, Publ. RIMS 19, 943-1001 ('83), および MSI = 引用されてる文献を参照.
15. Twistor Geometry and Nonlinear Systems (Lect. Notes in Math. 970, Springer ('82)) 中 42 の Semenov-Tian-Shansky, Mikhailov の 論文と引用文献を参照.
16. M.F.Atiyah, N.J.Hitchin, I.M.Singer: Self-duality in four dimensional Riemannian Geometry, Proc. R. Soc. London A362, 425-461 ('78).
17. J.F.Plebanski: Some solutions of complex Einstein equations, J. Math. Phys. 16, 2395-2402 ('75).
18. S.G.Gindikin: Integral geometry and twistors, Lect. Notes in Math. 970, 2-42 ('82).
19. V.E.Zakharov, A.B.Shabat: Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering II, Func. Anal. Appl. 13, 166-174 ('79).