

すべての形式解が収束するための必要十分条件について

都立大理学部 吉野正史 (Masafumi YOSHINO)

§ 1. Introduction. 解析的な係数を持つあるクラスの微分方程式に対し、そのすべての形式解が収束する為の必要十分条件について報告します。ここで考える方程式の型と当面する 1 つの大きな障害を明らかにするためまず次のようを例を考える。 L を $L = \sum_{j=0}^m a_j (x_1 \frac{\partial}{\partial x_1})^j (x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^{m-j}$ $a_j \in \mathbb{C}$ ($0 \leq j \leq m$), $a_0 a_m \neq 0$, $m \geq 1$ 整数 に対して $Lu = f$ の形式解を求めてみる。未定係数法による とし $u = \sum u_{\nu\mu} x_1^\nu x_2^\mu$, $f = \sum f_{\nu\mu} x_1^\nu x_2^\mu$ を代入すると次の漸化式を得る。 $(\sum_{j=0}^m a_j \nu^j \mu^{m-j}) u_{\nu\mu} = f_{\nu\mu} \quad \nu, \mu \geq 1.$ 従ってもし $(\sum_{j=0}^m a_j \nu^j \mu^{m-j}) \neq 0$ であってレザモ $(\sum_{j=0}^m a_j \nu^j \mu^{m-j})$ が $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ で $\nu, \mu \rightarrow \infty$ のときあまり小さくならなければすべての形式解は収束する。残念ながらこれは実際には満たされるとは限らない。 a_j の値によってはこれは小さくなります。それではこれを記述するにはどうすればよいのでしょうか。この型の問題はいわゆる small

denominator の問題の最も特別で簡単な例のうちの 1 つです。

ここで報告することは、この困難に対する 1 つの新しい challenge の方法についてです。すなわち方程式の係数からさまるいくつずつ数論的関数の解析を通して形式解が収束する為の必要十分条件を与えようというものです。この方法は同時に形式解が収束する時にその収束半径の評価も可能になります。これによって私たちはこれを characteristic points を通じての解折接続の問題に応用することができます。私たちはこれが可能になるため必要十分条件があるクラスの作用素に対して与えます。

§2. 記号と結果. $d \geq 2$ 整数, $x = (x_1, \dots, x_d)$
 $\in \mathbb{C}^d$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$
 $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_d)$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ ($1 \leq j \leq d$) $(x\partial)^\alpha =$
 $(x_1\partial_1)^{\alpha_1} \cdots (x_d\partial_d)^{\alpha_d}$, $m, N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ とし
 $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{N}$ を $1 = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_N$ となる整数
 とし、このとき $N \times N$ Leray-Volovich 系の多項式
 $P(\eta)$ を次によって定義します。

$$(2.1) \quad P(\eta) = \left(\sum_{|\alpha| \leq m + \alpha_j - \alpha_k} a_\alpha^{jk} \eta^\alpha \right)_{\substack{j \downarrow 1, \dots, N \\ k \rightarrow 1, \dots, N}}$$

ここで a_α^{jk} ($1 \leq j, k \leq N$, $|\alpha| \leq m + \alpha_j - \alpha_k$) は複素定数。 $0 \leq \alpha \leq m$

に対して同様にして $f_\alpha(x; \eta)$ を

$$(2.2) \quad f_\alpha(x; \eta) = \left(\sum_{|\beta| \leq m-\alpha + \delta_j - \alpha_k} b_\beta^{jk}(x) \eta^\beta \right)_{\substack{j \downarrow 1, \dots, N \\ k \rightarrow 1, \dots, N}}$$

によって定義する。ここで $b_\beta^{jk}(x)$ ($1 \leq j, k \leq N$, $|\beta| \leq m-\alpha + \delta_j - \alpha_k$) は $x=0$ の近傍で正則とする。

$P(x\partial)$ と $Q_\alpha(x; x\partial)$ を (2.1) (2.2) でそれぞれを $x\partial$ でおきかえて得られる作用素とし $f(x)$ を $x=0$ の近傍で正則なベクトル値関数とする。このとき次の方程式のすべての形式解の収束が考える問題である。

$$(2.3) \quad (P(x\partial) + Q_\alpha(x; x\partial)) u = f$$

ここで $u = {}^t(u_1, \dots, u_N)$ は未知ベクトル値関数。

注意 2.1. 必要ならば $P(x\partial)$ を $P(x\partial) + Q_\alpha(0; x\partial)$ でおきされることにより 私たちは (2.3)において $b_\beta^{jk}(0) = 0$ と仮定することができる。以後では常にこの条件を仮定する。

結果を述べるためにいくつかの定義をする。 $\xi \in \mathbb{R}^d$, $|\xi|=1$, $\varepsilon > 0$ に対し $\Gamma(\xi; \varepsilon)$ を ξ の ε 錐近傍とする。すなわち $\Gamma(\xi; \varepsilon) = \{\eta \in \mathbb{R}^d; |\eta/\|\eta\| - \xi| < \varepsilon\}$ 。そのとき degree

of ellipticity $\sigma_{\xi}(P)$ of P with respect to ξ を 次で定義する。

$$(2.4) \quad \sigma_{\xi}(P) = \sup_{\varepsilon > 0} \sigma_{\xi, \varepsilon}(P).$$

ここで

$$(2.5) \quad \sigma_{\xi, \varepsilon}(P) = \sup \left\{ c \in \mathbb{R}; \liminf_{|z| \rightarrow \infty, z \in \Gamma(\xi; \varepsilon) \cap \mathbb{N}^d} |z|^{m-mN-c} |\det P(z)| > 0 \right\}$$

但し もし $\liminf_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{-s} |\det P(z)| = 0$ for $\forall s \in \mathbb{R}$ のときは
 $\sigma_{\xi, \varepsilon}(P) = -\infty$ とする。特に P を指定する必要のないときは
 $\sigma_{\xi}(P)$ のかわりに σ_{ξ} とかく。

$f_s(x; z)$ を x について Taylor 級数に展開する。 $f_s(x; z) = \sum_r f_{s,r}(z) x^r$ ここで $f_{s,r}(z)$ は $P(z)$ と同様の形を
 している。そのとき $MS(Q_s)$ を次によって定義する。

$$(2.6) \quad MS(Q_s) = \left\{ \begin{array}{l} f_{s,r}(z) \neq 0 \text{ あるすべての } r \text{ を含むようす原点,} \\ \text{を頂点とする最小の closed convex cone} \end{array} \right\}$$

ここでもし $f_s(x; z) \equiv 0$ のとき $MS(Q_s) = \{0\}$ とする。

次に $\det P(z) = \sum_{j=0}^{mN-\bar{\alpha}} a_j(z)$ とかく。ここで $a_j(z)$
 は j 次齊次多項式、 $\bar{\alpha}$ は 整数 又は $\bar{\alpha} = +\infty$ である
 $a_{mN-\bar{\alpha}}(z) \neq 0$ とする。もし $\det P(z) \equiv 0$ のときは $\bar{\alpha} = +\infty$

$a_{mN-\tilde{\alpha}}(\eta) \equiv 0$ とする。このとき次を仮定する。

(A.1) もし $Q_\alpha \neq 0$ ならば $\tilde{\alpha} \leq \alpha$.

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$, $-\infty \leq d_0 \leq m$ とする。このとき

$$(2.7) \quad \Sigma_0 = \Sigma_0(P, d_0) = \{ \xi \in \mathbb{R}_+^d; |\xi| = 1, a_{mN-\tilde{\alpha}}(\xi) = 0 \text{ かつ } Q_\xi(P) \leq d_0 \}.$$

このとき $d_0 \leq d_1$ ならば $\Sigma_0(P, d_0) \subset \Sigma_0(P, d_1)$ に注意する。

もし $Q_\alpha \neq 0$ であれば (A.1) より $a_{mN-\tilde{\alpha}}(\theta) \neq 0$ なる θ が存在する。

$$S(\eta, \rho) = \sum_{j=0}^{mN-\tilde{\alpha}} \rho^{mN-\tilde{\alpha}-j} g_j(\eta) \quad \text{とおき } \eta = \xi_0 \theta + \xi'$$

$\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ とする。そのとき $S(\xi_0 \theta + \xi', \rho)$ を ξ_0 の多項式として分解し ξ を η で表現して次の表現を得る。

$$(2.8) \quad S(\eta, \rho) = \prod_{j=1}^{d_0} g_j(\eta, \rho)^{m_j}$$

ここで $m_j \in \mathbb{N}$, $m_j \geq 1$. さて $\Sigma_0 \neq \emptyset$ と仮定し $\xi_0 \in \Sigma_0$. $U(\xi_0)$ を ξ_0 の近傍とする。各 $\xi \in U(\xi_0)$, $\pm \theta \in MS(Q_\alpha) \cap \{\theta \in \mathbb{R}^d; |\theta| = 1\}$ と $\rho \geq 0$ に対し 関数 $t \mapsto g_j(\xi + t\theta, \rho)$ は $t=0$ で Hölder 連続であることが Puiseux 展開の理論より従う。さらに ξ_0, θ, ρ に依存しない $\tau_j > 0$, $w_j > 0$ と $C_j(\xi_0, \theta, \rho) \neq 0$, $R_j(\xi_0, \theta, \rho, t)$ が存在して次が成立する。

$$(2.9) \quad g_j(\xi + t\theta, p) - g_j(\xi, p) = C_j(\xi, \theta, p) t^{\tau_j} + t^{\tau_j + \omega_j} R_j(\xi, \theta, p, t)$$

$$t \rightarrow 0.$$

このとき次を仮定する。

(A.2) ($g_j(\xi + t\theta, p)$ の $t=0$ における一様 Hölder 連続性). もし $Q_\Delta \neq 0$ かつ $\Sigma_0(P, m-\Delta) \neq \emptyset$ ならば 各 $\xi_0 \in \Sigma_0(P, m-\Delta)$ と $g_j(\xi_0, 0) = 0$ なる各 g_j に対して ξ_0 の近傍 $V(\xi_0)$, $P_0 > 0$, $t_0 > 0$ そして $R_0 > 0$ が存在して $\forall \xi \in V(\xi_0)$, $0 \leq \lambda p < P_0$, $0 \leq \lambda t < t_0$, $\lambda \pm \theta \in \text{MS}(Q_\Delta)$ に対して (2.9) が成立し レザも評価 $|R_j(\xi, \theta, p, t)| \leq R_0$ が成立する。

各 $\xi, \theta \in \mathbb{R}^d$ に対し $a_{mN-\delta}(\eta)$ の $\eta = \xi$ における localization $L_\xi(\theta)$ を次で定義する。

$$(2.10) \quad a_{mN-\delta}(\xi + t\theta) = L_\xi(\theta) t^\delta + O(t^{\delta+1})$$

ここで δ は整数 ≥ 1 である $L_\xi(\theta) \neq 0$. このとき次を仮定する。

(A.3) ($L_\xi(\theta)$ の ellipticity). $Q_\Delta \neq 0$ かつ $\Sigma_0(P, m-\Delta) \neq \emptyset$ ならば $\forall \xi \in \Sigma_0(P, m-\Delta)$, $\lambda \pm \theta \in \text{MS}(Q_\Delta)$ に

に対して $L_3(\theta) \neq 0$ である。

$e_j(\eta)$ ($1 \leq j \leq N$) を $p(\eta)$ の固有値とし $r(\eta) = \min_{1 \leq j \leq N} |e_j(\eta)|$ とおく。 $A \subset \mathbb{R}^d$ とし このとき (一般化された) Leray の補助関数 $P(A, P)$ を次によて定義する。

$$(2.11) \quad P(A, P) = \liminf_{|\eta| \rightarrow \infty, \eta \in A \cap \mathbb{N}^d} r(\eta)^{1/|\eta|}.$$

ここでもし $A \cap \mathbb{N}^d$ が有限集合であれば $P(A, P) = 1$ とおく。 $r(\eta)$ は $|\eta| \rightarrow \infty$ のとき高々多項式の増大度しかもたないことに注意すると $0 \leq P(A, P) \leq 1$ である。

$P(A, P)$ の基本的性質はあとで述べる。 $f(x) = \sum f_\eta x^\eta / \eta!$ を原点での解析関数とするとき $MS(f) = \{\eta \in \mathbb{N}^d; f_\eta \neq 0\}$ とおく。 $C \subset \mathbb{N}^d$ を任意に与える。このとき

定理 2.1. 条件 (A.1) ~ (A.3) を仮定する。このとき原点の近傍で正則であって $MS(f) \subset C + MS(Q_s)$ をみたす任意の f に対して 方程式 (2.3) のすべての形式解が収束するための必要かつ十分条件は $P(C + MS(Q_s); P) > 0$

かつ $\det P(\eta) \neq 0$ の有限ヶの η を除いてすべての $\eta \in \mathbb{N}^d$ に対して成立することである。

注意 2.2. 定理 2.1 において一般には条件 (A.1) (A.3) をおとすことはできない。又

(A.2)を満たすようす場合は $d=2$ あるいは $g_j(\eta, p)$ が含まれる場合であることも示すことができる。

注意 2.3. 応用では次の修正も有用である。

$\Sigma'_0 = \Sigma'_0(P, d_0)$ を $\Sigma'_0(P, d_0) = \Sigma_0(P, d_0) \setminus \{\xi \in \mathbb{R}_+^d; |\xi| = 1, a_{m_N-\delta}(\xi) = 0\}$ かつ $\sigma_\xi(P) = d_0\}$ によって定義し $\overline{\Sigma'_0(P, d_0)}$ を $\Sigma'_0(P, d_0)$ の閉包とする。このとき次を仮定する。

(2.12) $\sigma_\xi = m - \delta$ をみたす $\forall \xi$ に対して (2.4) および (2.5)における sup. はある $\varepsilon > 0$ と $c = m - \delta$ によって達成される。

このとき $\Sigma_0(P, m - \delta)$ を $\overline{\Sigma'_0(P, m - \delta)}$ でおき替えても定理 2.1 は正しい。

以下で 定理 2.1 からのいくつかの帰結について述べる。

系 2.2. 条件 (A.1) と $\Sigma_0(P, d_0) = \emptyset$ (もしくは (2.12) と $\Sigma'_0(P, d_0) = \emptyset$) をある d_0 に対して仮定する。このとき原点の近傍で正則な任意の f と (2.3) で与えられる $\forall Q_s(x; x_0)$ で $m-\alpha \leq d_0$ をみたすものに対し 方程式 (2.3) のすべての形式解は収束する。

証明: $C = \text{MS}(Q_s) = \mathbb{R}_+^d$ の場合に 定理を適用する。 (A.2) (A.3) は 明らか

他方 $\Sigma_0 = \emptyset$ より $\sigma_\zeta > -\infty$ $\forall \zeta$
が 成立するか これより $P(\mathbb{R}^d; P) > 0$ が 成立し これより
 $\det P(\eta)$ は 高々有限個の $\eta \in \mathbb{N}^d$ 以外では 0 に ならぬ
ことがわかる。条件 (2.12) と $\Sigma'_0 = \emptyset$ を 仮定したときには Remark 2.3 より 求めることが 従う。

注意 2.4. 条件 $\Sigma_0 = \emptyset$ は 次の ような意味をもつ。
もし $\Sigma_0 = \emptyset$ であれば "small denominator" は $\alpha d Q_s \leq d_0$
i.e. $m-\alpha \leq d_0$ をみたす Q_s に対しては 本質的には あら
われない。もしそうでなければ 一般に あらわれる。

例 2.5. $P(\eta)$ は elliptic すなわち $a_{mn}(\eta) \neq 0$
 $\forall \eta \in \mathbb{R}_+^d$ とする。このとき $\Sigma_0(P, m) = \emptyset$ である。従って (2.3),
すべての形式解は 収束する。

例 2.6. $P(\eta)$ が hypoelliptic 多項式, simple chara-

-characteristic の場合にあてて述べる σ_0 の解析より $\Sigma_0 = \emptyset$ となる必要十分条件、十分条件を与えることができる。

例 2.7. 次の問題を考える。 (2.2) で与えられる symbol をもつがって $\text{perturbation } Q_s(x; x\partial)$ と任意の f に対してすべての形式解が収束するよう P のクラスを求めよ。系 2.2 はこれに対する 1 つの解答を与えてい る。すなわち $\Sigma_0(P, m-s) = \emptyset$ ガつ (A.1) をみたすよう な P が求める 1 つのクラスを与える。

系 2.3. (A.1) ガつ $d=2$ とし $\Sigma_0(P, m-s) \cap \text{MS}(Q_s) = \emptyset$ (or (2.12) と $\Sigma'_0(P, m-s) \cap \text{MS}(Q_s) = \emptyset$) を仮定する。このとき 原点の近傍で正則を任意の f に対して方程式 (2.3) のすべての形式解が収束するための必要かつ十分条件は $P(R; P) > 0$ とあることである。

定理 2.4. $C \subset \mathbb{N}^d$ を有限集合とする。さらに条件 (A.1) と $\Sigma_0(P, m-s) \cap \text{MS}(Q_s) = \emptyset$ を仮定する。このとき 原点の近傍で正則であって $\text{MS}(f) \subset C + \text{MS}(Q_s)$ をみたす任意の f に対して Eq. (2.3) のすべての形式解が 収束するための必要かつ十分条件は 高々有限ヶの γ を のぞいて すべての $\gamma \in \mathbb{N}^d$ に対し $\det P(\gamma) \neq 0$ である ことである。

例 2.9. もし f が多項式を成分とするベクトルで
あれば定理の条件を満足する。

注意 2.10. a) (2.12) を仮定すれば、定理 2.4 に
おいて Σ_0 を $\overline{\Sigma'_0}$ でおきかえることがで“きる。

b) 定理 2.4 において条件 (A.1) および $\Sigma_0(P,
m-\Delta) \cap \text{MS}(Q_\Delta) = \emptyset$ は一般におとすことはでき“ない。

c) ただちにわかるように (A.1) (A.3) より (A.1)
および $\Sigma_0 \cap \text{MS}(Q_\Delta) = \emptyset$ が従い C が有限集合で
あることより $P(C + \text{MS}(Q_\Delta); P) = 1$ が従う。従って特
に f が多項式型のときは 定理 2.1 は定理 2.4 より従う。
よってこの場合には 定理 2.4 は 2.1 の改良にな“っている。

定理 2.4 に関する (P+Q_\Delta) の kernel について
述べておく。原点の近傍で正則なら $\ker(P+Q_\Delta)$
にはいるとは $(P+Q_\Delta)u=0$ が成立することである。
このとき次が成立する。

命題 2.5. 条件 (A.1) と $\Sigma_0(P, m-\Delta) \cap \text{MS}(Q_\Delta) = \emptyset$
(あるいは (2.12) と $\overline{\Sigma'_0}(P, m-\Delta) \cap \text{MS}(Q_\Delta) = \emptyset$) を仮
定する。このとき $\ker(P+Q_\Delta) \neq 0$ となるための必要かつ十分
条件は $\det p(\eta) = 0 \quad \exists \eta \in \mathbb{N}^d$ 。さらに $\ker(P+Q_\Delta)$
が無限次元になるための必要かつ十分条件は無限

に多くの $\eta \in \mathbb{N}^d$ に対して $\det P(\eta) = 0$ となることである。

この応用を述べるために $\lambda \in \mathbb{C}$ が $P + Q_\alpha$ の固有値であるとは $\ker(\lambda - P - Q_\alpha) \neq 0$ することとする。このとき次が成立する。

系 2.6. 条件 $\Sigma_0(P, m-s) \cap \text{MS}(Q_\alpha) = \emptyset$ および
 $(A.1)$ を $s < m$ に対して仮定する。このとき $\lambda \in \mathbb{C}$ が $P + Q_\alpha$ の固有値であるための必要かつ十分条件は $\exists \eta \in \mathbb{N}^d$ に対して $\det(P(\eta) - \lambda) = 0$ 。 λ が $P + Q_\alpha$ の無限多重复の固有値であるための必要かつ十分条件は 無限に多くの $\eta \in \mathbb{N}^d$ に対して $\det(P(\eta) - \lambda) = 0$ となることである。

注意 2.11. $R = P \oplus P + Q_\alpha$ とする。 $E(R)$ を $\lambda \in \mathbb{C}$ で
 あって λ は R の無限多重复の固有値であるか あるいは R の
 固有値の集積点とする。明らかに $E(R)$ は R の Fredholm
 性と関連している。もし P と Q_α が系 2.6 の条件をみたせば
 $E(P + Q_\alpha) = E(P)$ であることがわかる。 $E(P)$ は代数方程
 式の根の集積点であり 知ることができる。

今までのところ私たちは 形式解の収束と small deno-

minatorについて述べてきた。以下では収束半径に関する結果を述べる。このために次の仮定をする。

(A.4) もし $Q_\alpha \neq 0$ かつ $\sum_0(P, m-\alpha) \neq \emptyset$ であれば
 $f(\xi, \theta) \leq \alpha - \tilde{\alpha}$ for all $\xi \in \sum_0(P, m-\alpha)$, $\pm \theta \in MS(Q_\alpha)$
 ここで $\tilde{\alpha} = f(\xi, \theta)$ は (2.10) で与えられる整数である。

$R > 0$ に対して $D_R = \{x \in \mathbb{C}^d; |x_1| + \dots + |x_d| < R\}$, $C \subset \mathbb{N}^d$ とする。このとき

定理 2.7. 条件 (A.1) ~ (A.4) を仮定する。このとき $R_0 > 0$ が存在して、任意の R , $0 < R < R_0$ と任意の $f: holomorphic \text{ in } D_R$ で $MS(f) \subset C + MS(Q_\alpha)$ に対し 方程式 (2.3) のすべての形式解が D_R で正則であるための必要十分条件は $P(C + MS(Q_\alpha); P) = 1$ かつ $\det p(\eta) \neq 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{N}^d$ except for finite number of η 's が成立することである。

注意 2.12. a) (2.12) を仮定すれば \sum_0 を $\overline{\sum'_0}$ でもよい。

b) (A.1) および $\tilde{\alpha} < \alpha$ を仮定し $a_{mN-\tilde{\alpha}}(\xi) = 0$

がある $\xi \in R_+^d$, $\xi > 0$ に対して成立しているとする。このとき 曲面 $\phi(x) = |x_1| + \dots + |x_d| = R$ ($R > 0$) は $|x_j| = \xi_j$ ($1 \leq j \leq d$) をみたす点、 x で $P + Q_s$ に対して 特性的である。すなわち $\det P((x(\partial\phi/\partial x_j))|_{|x_j|=\xi_j} =$

0. 従って 定理 2.7 で考えている問題の中には 特性面を通しての 解析接続の問題も含まれる。上述の定理はこれができるための 1 つの diophantus 的 必要十分条件を与えている。

系 2.8. (A.1) と $\Sigma_0(P, m-s) = \emptyset$ (or (2.12) と $\Sigma'_0(P, m-s) = \emptyset$) を仮定する。このとき $R_0 > 0$ が存在して $0 < \forall R < R_0$ と $(P+Q_s)u$ が D_R で 正則となるよう な 任意の 形式的巾級数 u に対し u は収束して D_R で 正則となる。

§3. σ_ξ と $P(A; P)$ の 基本的性質

$a_{mn}(z)$ を $\det P(z)$ の mN 次 齊次部分とするとき $P(z)$ が $z = \xi$ で elliptic であるとは $a_{mn}(\xi) \neq 0$ である。

Lemma 3.1. $\sigma_\xi = m \Leftrightarrow P$ が ξ で elliptic

さらに P が ξ で elliptic でなければ $\sigma_\xi \leq m-1$.

注意 3.1. この lemma により $\Sigma_0(P, m)$ は 特性集合 と一致することがわかる。

$\xi \in \mathbb{R}_+^d$, $|\xi|=1$ $g_j(\eta, \rho)$ を (2.7) で与えられるとする。
このとき次の条件を考える。

(C.1) $g_j(\xi, 0) = 0$ をみたす g_j に対して $\exists \Gamma(\xi)$: ξ の conical nbd. と $C > 0$, P_j , $-\infty < P_j \leq 1$ が存在して
 $|g_j(\eta, 1)| \geq C(1 + |\eta|)^{P_j} \quad \forall \eta \in \Gamma(\xi) \cap N^d$ が成立する。

(C.2) $g_j(\xi, 0) = 0$ をみたす g_j に対して 関数 $g_j(\eta, \rho)$ は $\rho = 0$, $\eta = \xi$ の近傍で 支めらかである。

このとき次の命題が成立する。

命題3.2. a) (C.1) を仮定する。このとき

$$\sigma_\xi \geq m - \delta - \sum^* (1 - P_j) m_j$$

ここで \sum^* は $g_j(\xi, 0) = 0$ なる j についての和である。

b) (C.1) と (C.2) を仮定する。このとき

$$\sigma_\xi = m - \delta - \sum^* m_j.$$

例3.2. Hypoelliptic の場合。この場合 $\exists \rho > 0$ が存在して $P_j \geq \rho$ が成立している。(Taylor の本参照) 従って $\sigma_\xi \geq m - \delta - (1 - \rho) \sum^* m_j$

例3.3. simple characteristic の場合も (C.1) をみたすよう適当な条件下で $\sigma_\xi = m - 1$ となる。

次に $d=2$ であって m, n , $n < m$ に対して $P(\eta)$ が次の形をしているとき σ_ξ をきめる。

$$(3.1) \quad P(\eta) = P_m(\eta) + P_n(\eta)$$

ここで $p_m(\gamma)$ と $p_n(\gamma)$ は (2.1) でそれぞれ $|\alpha| = m + \alpha_j - \alpha_k$
 $|\alpha| \leq n + \alpha_j - \alpha_k$ としたもので与えられ $\det p_m(\gamma) \neq 0$ とする。
 $w > 0$, $t \in \mathbb{C}$ に対して集合 $F_w(t)$ を次で定義する。

$$(3.2) \quad F_w(t) = \left\{ \begin{array}{l} \{\mu^w(v/\mu - t)\}_{v, \mu \in \mathbb{N}} \text{ の } v, \mu \rightarrow \infty \text{ のときの} \\ \text{すべての積積値} \end{array} \right\}$$

このとき次が成立する。

命題 3.3. $d=2$ であって (3.1) を仮定する。このとき

a) $\xi = (1, 0)$ あるいは $(0, 1)$ のとき. $\sigma_\xi = m$ あるいは

$\sigma_\xi \leq n$ が成立する。

b) $\xi \neq (1, 0), (0, 1)$ のとき. $n < \sigma < m$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$

とする。このとき $\sigma_\xi = \sigma \Leftrightarrow \det p_n(\xi_1/\xi_2, 1) = 0$ かつ
 集合 $F_{(m-\sigma)/m_0}(\xi_1/\xi_2) \ni 0$ ($\forall \tau > 0$) ; $\not\ni 0$ ($n < \tau < \sigma$). ここで m_0 は $t = \xi_1/\xi_2$ の方程式 $\det p_m(t, 1) = 0$ の多重重度である。

注意 3.4. $F_w(t)$ は連分数を用いて解析することが
 できる。ここではこれが 0 を含むか否かということについて
 の結果をまとめておこう。 $t > 0$ で有理数 あるいは
 $t > 0$ で $0 < w < 2$ の場合は $F_w(t) \ni 0$. 他方 $w \geq 2$ で
 t が irrational のときは t を連分数に展開する。 $t = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. ここで

(3.3) $a_0 = [t]$, $\alpha_0 = t - a_0$, $\alpha_1 = 1/\alpha_0$, $a_1 = [\alpha_1]$, $1/\alpha_2 = \alpha_1 - a_1$, $a_2 = [\alpha_2]$, ..., $a_m = [\alpha_m]$, $1/\alpha_{m+1} = \alpha_m - a_m$; ...; ここで $[s]$ は s をこえまい最大の整数. 次に v_n, M_n ($n=1, 2, \dots$) を次によつて定義する.

(3.4) $v_{n+2} = a_n v_{n+1} + v_n$; $M_{n+2} = a_n M_{n+1} + M_n$
ここで $v_1 = 0, v_2 = 1$; $M_1 = 1, M_2 = 0$. このとき次が成立する
 $F_w(t)$ ($w > 2$) が 0 を含むための必要かつ十分条件 は
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{w-2}/a_{n-1} = 0$. さらに $\exists E \subset [0, \infty)$ で "ルベク
測度 0 なるものが存在して $F_w(t) \neq 0$ for all $t \notin E$ カつ
 $w > 2$. カつ成立する.

Lemma 3.4. σ_z は $z \in \mathbb{R}_+^d$ の関数として下半連続である.

Lemma 3.5. $P(A; P)$ は次の性質をもつ.

- a). $0 \leq P(A; P) \leq 1$ for any $A \subset \mathbb{R}_+^d$.
- b).もし $P(A, P-\lambda) = 0$ for some $\lambda \in \mathbb{C}$ ならば $P(\eta)$
の固有値は $|\eta| \rightarrow \infty$, $\eta \in A \cap \mathbb{N}^d$ のとき入に
集積する. もしそうでなければ $P(A; P-\lambda) = 1$.
- c) $A = \bigcup_{k=1}^{k_0} A_k$ のとき $P(A; P) = \min_{1 \leq k \leq k_0} P(A_k; P)$.

次に $P(\eta)$ が invertible のとき次のようにおく。

$$(3.5) \quad P(n)^{-1} = (p^{ij}(n))_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, N}} ; \|P(n)^{-1}\| = \max_{1 \leq i, j \leq N} \|p^{ij}(n)\|.$$

Lemma 3.6. 任意の $A \subset \mathbb{R}^d$ に対して もし $\det P(n)$ が高々有限個の $\eta \in A \cap \mathbb{N}^d$ をのぞいて 0 にならぬいならば

$$(3.6) \quad P(A; P) = \left(\limsup_{|n| \rightarrow \infty, \eta \in A \cap \mathbb{N}^d} \|P(\eta)^{-1}\|^{1/n} \right)^{-1}$$

その他の場合は $P(A; P) = 0$.

Remark 3.5. $P(n)^{-1} = \text{co } P(n)/\det P(n)$ を (3.6) に代入し $\text{co } P(n)$ は高々多項式の増大度であることに注意すれば $P(A; P) \geq \liminf_{|n| \rightarrow \infty, \eta \in A \cap \mathbb{N}^d} |\det P(\eta)|^{1/n}$.

この不等式は A が "cone" $\Gamma = \{r\xi ; r > 0, \sigma_\xi > -\infty\}$ の中に含まれているときには有効である。

例 3.6. $\sigma_\xi > -\infty$ であれば その十分小さな conical nbd. Γ_ξ が存在して $P(\Gamma_\xi; P) = 1$. 特に $\Sigma_0 = \emptyset$ であれば $P(\mathbb{N}^d; P) = 1$ である. 又 $P = \partial_1 - \tau \partial_2$ とすれば $\xi = (\tau, 1)$ $\sigma_\xi > -\infty \Leftrightarrow \tau$ が Liouville number である.

例 3.7. $\Sigma_0 \cap \text{MS}(Q_0) = \emptyset$ とする. このとき 任意の有限集合 $C \subset \mathbb{N}^d$ に対して $P(C + \text{MS}(Q_0); P) = 1$ である.

$\sigma_\xi = -\infty$ の場合の解析をするために次の Lemma を準備しておく。

Lemma 3.7. $\sigma_3 = -\infty$ をみたす各 η に対して $\lambda \in \mathbb{R}$ の錐近傍 Γ_3 , $\exists f_{ij}(\eta)$ ($1 \leq i, j \leq N$) $cOP(\eta)$ の成分が存在して 次が成立すると仮定する。

$$(3.7) \quad \liminf_{|\eta| \rightarrow \infty, \eta \in \Gamma_3 \cap \mathbb{N}^d} |\eta|^{-\alpha} |f_{ij}(\eta)| > 0.$$

そのとき

$$(3.8) \quad P(A; P) = \liminf_{|\eta| \rightarrow \infty, \eta \in A \cap \mathbb{N}^d} |\det p(\eta)|^{1/|\eta|}.$$

例 3.8. $N=1$ の場合が条件 (3.7) を満たす最も簡単な例である。

Lemma 3.8. $d=2$ と仮定する。このとき

$$P(A; P) > 0 \text{ (resp. } = 1) \Leftrightarrow (3.8) \text{ の右辺が } > 0 \text{ (resp. } = 1).$$

注意 3.9. $P(A; P)$ は Leray によって導入された補助関数の一般化であることを示しておこう。このため $d=2$ かつ $P=P_m$: homogeneous とする。 $\det p(\eta) = C \eta^\alpha \prod_j (\eta_j - \tau_j \eta_2)^{m_j}$ ($\alpha \in \mathbb{N}^2$; C, τ_j constants, $\tau_j \neq 0$; $m_j \geq 1$ integer) としこれを (3.8) に代入する。そのときもし無限に多くの $\eta \in A \cap \mathbb{N}^d$ に対して $\eta^\alpha = 0$ となるとすれば " $P(A; P) = 0$ " である。そうでなければ $P(A; P) = \min_{j, \tau_j > 0} \tilde{P}(A; \tau_j)^{m_j/(1+\tau_j)}$, ここで

$$\tilde{P}(A; t) = \liminf_{\nu, \mu \rightarrow \infty, (\nu, \mu) \in A \cap \mathbb{N}^2} |\nu - t\mu|^{1/\mu}$$

$\tilde{P}(\mathbb{N}^2; t)$ は グルーガー問題の Fredholm 性の研究に
関連して J. Leray によって導入され Leray および
Pisot によって研究されている。 (3.3) (3.4) によれば、

$$\tilde{P}(\mathbb{N}^2; t) = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1/\mu_{n+1}}$$

であることがわかっている。 (3.8) によれば $\det p(\gamma)$
 $\sim e(n) |\gamma - \zeta(\gamma_1 + \cdots + \gamma_d)|^c$ ここで $n > 0, e(n) \neq 0$
 なるものにすればさらに高次元の一般化された Leray の
 補助関数が得られる。

1984. 12/27 都立大.

〒158 世田谷区深沢 2-1-1

都立大学理学部数学教室