

無限階方程式の最近の話題から

近畿大理工 青木貴史
AOKI Takashi

無限階擬微分作用素の可逆性定理 ([1], Théorème 5.1) の応用
として 正則函数の germs の空間において 指数 (index) が有限となる
ような無限階微分作用素の存在がわかる。以下ではこのことについて
述べる。詳しく述べ [2] を参照されたい。

1. 可逆性定理の書き換え. 表象 $P(z, \zeta)$ はより定義される
擬微分作用素 : $P(z, \zeta)$: は $1/P(z, \zeta)$ がまた表象となるとき
 ζ^R で可逆となる ([1], Théorème 5.1). ここに 仮定した条件は
 $P(z, \zeta)$ の下からの評価 $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon > 0 \quad |P(z, \zeta)| \geq C_\varepsilon \exp(-\varepsilon |\zeta|)$
と同値である。 $P(z, \zeta)$ が $\zeta \mapsto z$ entire なとき, すなはち
 $:P(z, \zeta): = P(z, D_z)$ が 微分作用素の場合は 表象 $P(z, \zeta)$
の零点分布 $\zeta \mapsto z$ の条件に書き換えることができる ([5], Lemma
4.1.3 参照). 従って [5], Theorem 4.1.8 の複数係数への拡張が
得られる:

定理 1. $z^* \in \dot{T}^*\mathbb{C}^n$ の点, $U \in z^*$ の 錐近傍とする.

$P(z, D_z) \in \pi(U)$ ($\pi: T^*\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 射影) で定義された微分作用素 (無限階でもよい), $P(z, \zeta)$ を ζ の 表象とする. 正定数 R が存在して $\{(z, \zeta) \in U; |\zeta| > R\}$ 上 $P(z, \zeta) \neq 0$ とするならば

$P(z, D_z)$ は $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n, z^*}^R$ において可逆である.

2. 指数が有限となるための条件

補題 2. $P(z, D_z) \in \mathbb{C}^n$ の原点 0 の近傍で定義された (有限階または無限階) 微分作用素とする. 0 に十分近い任意の $t \neq 0$ に対して P は $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n, (z, \bar{z})}^R$ において可逆と仮定すると

$$\dim \text{Ker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) < \infty$$

$$\dim \text{Coker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) < \infty$$

従って $\text{ind}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) = \dim \text{Ker } P - \dim \text{Coker } P < \infty$ となる. 特に $P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ は closed range である. ここで $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ は \mathbb{C}^n における正則函数の層 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ における germ を表す.

証明の方針 $t > 0$ に対して $\Omega_t = \{z \in \mathbb{C}^n \mid t - |z|^2 > 0\}$ とおくと $z \in \partial \Omega_t$ は $\partial \Omega_t$ の conormal は $(z, \bar{z}) \in \dot{T}^*\mathbb{C}^n$ である. 仮定より $\mathcal{E}_{\otimes m}^R: 0 \leftarrow \mathcal{E}^R \xrightarrow{P} \mathcal{E}^R \leftarrow 0$ は (z, \bar{z}) は exact である. 従って 相似-Schauder の接続定理 ([4], Theorem 4.5.1) が適用でき十分小さな任意の t と 任意の j について 同型

$$\text{Ext}_{\mathcal{B}^m}^j(\overline{\Omega}_t; m, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{B}^m}^j(\Omega_t; m, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$$

が得られる. $T = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_n$, $\bar{\Omega}_t \subset \Omega_t \cap T_j$ と
を表す. 特に $j=0, 1, \dots, n$ のときを書きかえよと

$$\text{Ker}(P : \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t) \rightarrow \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t)) \cong \text{Ker}(P : \mathcal{O}(\Omega_t) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_t)),$$

$$\text{Coker}(P : \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t) \rightarrow \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t)) \cong \text{Coker}(P : \mathcal{O}(\Omega_t) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_t))$$

である (compact perturbation についての古典的結果 (Bony-Schapira [3] 参照) によると Ω が t への空間には有限次元となる).

したがって $t > 0$ について成立する限り補題をすれば

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(P : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) < \infty$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Coker}(P : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) < \infty$$

である.

上の補題 2 と定理 1 を組みあわせると次の定理が得られる. これは Bony-Schapira による指數有限性の定理 ([3], Théorème 5) の無限階への自然な拡張を与える.

定理 3 $P(z, D_z)$ が \mathbb{C}^n の原点の近傍で定義され (有限階または無限階) 微分作用素とする. 任意の十分小さな定数 $c > 0$ に対してある正定数 δ , R が存在し $P(z, D_z)$ の表象 $P(z, \zeta)$ は

$$\{(z, \zeta) \in T^*\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n - \{0\}) \mid \frac{c}{2} < |z|^2 < \frac{3}{2}c, |\zeta| > R, \left| \frac{\zeta}{|\zeta|} - \frac{\bar{z}}{|z|} \right| < \delta\}$$

で消えないと仮定する. さて

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(P : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) < \infty,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Coker}(P : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) < \infty$$

従って $\text{ind}(P : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) < \infty$ となる.

実際、上の仮定と定理1を組合せると原論に十分近似的に
 $\zeta \neq 0$ かつ $\zeta = \bar{z}$ に対する P は $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n, (z, \zeta)}^{\mathbb{R}}$ 上で可逆である
 こととなり、補題2の仮定が満たされると定理3の結論が ζ に得られる。

定理3の条件を満たす作用素が存在することも知られる（[2], Proposition 1 参照）。

X 南工

- [1] T. Aoki, Calcul exponentiel des opérateurs microdifferentialis d'ordre infini, II, à paraître.
- [2] T. Aoki, M. Kashiwara & T. Kawai, On a class of linear differential operators of infinite order with finite index, to appear.
- [3] J. M. Bony & P. Schapira, Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, Inventiones math., 17 (1972), 95-105
- [4] M. Kashiwara & P. Schapira, Microhyperbolic systems, Acta Math., 142 (1979), 1-55.
- [5] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 17 (1970), 467-517.