数理解析研究所講究録
573巻 1985年 1-14

複素領域における微分方程式の解の特異性について

—《Regardez les singularités : il n'y a que ça qui compte.》

Gaston Julia —

京大数理研　米村明芳 (Akiyoshi Yonemura)

0. Introduction

まずはじめに、講究録が非公式出版であることに鑑み、かなり非公式的に書くことをお断りしておきます。

複素領域で(偏)微分方程式(系)を考える。ある領域でその係数は正則(有理型)と仮定する。まず、局所的に考えて、各点で形式的に解けることは勿論、大前提である。更に、必要なら条件をおいて、解が一意的であるとか、有限次元であるとか、がなりたっていることが望ましい。ある1点で、方程式が1つの函数要素を定めるとしよう。函数関係不変の原理により、解は接続され得る限り解である。従って、ここでの中心問題の1つは、この解がどこまで接続されるか、即ち、逆にいうと、解の特異性はどこにあらわれるか、である。この方向の研究は、最終的には大域理論を目指している。

常微分方程式では、古くからこのような視点から研究は行なわれてきた。局所解の一意存在を保証するのは、Cauchyの定理である。線型の場合、解の特異性は方程式の特異性であ

り，解が有限次元であることから，解の多価性を調べる尺度として，モノドロミー群などがあらわれ，それに関して，Riemann-Hilbert(-Birkhoff)の問題などがあり，これらに関する研究は数多くあったし，今後もあり続けるだろう。非線型の場合には，一般には特異点の位置は方程式からは決らない，即ち，動く特異点が存在する。そこで，動く特異点をもたない方程式－それは線型方程式の一般化とも考えられる－は，どんなものか，という問題が考えられる。これがPainlevé等に取りあげられたことは周知である。

以下，線型常微分方程式の多変数への拡張という視点から，偏微分方程式について概説したい。

尚，非線型偏微分方程式についてのCauchy問題で，非線型性により特異性のあらわれる現象については，亀谷氏の仕事[8]を参照して欲しい。

拡張の仕方は大きく2通り考えられる。1つは，単独の方程式に対してCauchy問題を考える(I)，もう1つは，完全積分可能系を考えること(II)，である。 第III章では，(I)に関連した問題について言及する。

最後に，話しをする機会を与えて下った，田島，青木両氏に感謝致します。

I. 単独方程式に対するCauchy問題

§1. 常微分方程式についての次の結果はよく知られている；
Ωを領域$\subset \mathbb{C}$, $a_j \in \mathcal{O}(\Omega)$, $P(z, \frac{d}{dz}) = \sum_{j=0}^{m} a_j(z)(\frac{d}{dz})^j$とする。
このとき，
$\ll P(z, \frac{d}{dz})u(z) = 0 \quad (\Omega で) \Rightarrow u の特異性 \subset \{z ; a_m(z) = 0\} \gg$.
これを拡張すると，次のようになる。Ω領域$\subset \mathbb{C}^n$，Ω上で定義された正則微分作用素$P(z, D)$，Sを非特異超曲面$\subset \Omega$とする。

定理1 (Y. Hamada)

$$\left[\begin{array}{l} P(z,D)u(z) = 0, \ u(z) \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega - S}) \\ u(z) は S 上に特異性をもつ \end{array}\right. \Longrightarrow S は特性面.$$

証明は，[18]を参照。

常微分の場合，局所正則解は方程式の特異点$a_m^{-1}(0)$にぶつからない限りどこまでも接続できる。しかし，次の例は，偏微分方程式では，そうならないことを示している。

例2 (Y. Hamada) 無限遠点から流れこむ特異性

$$P(t, x ; D_t, D_x) = D_t - x^2 D_x$$

$$\begin{cases} Pu = 0 \\ u|_{t=0} = f(x) \end{cases} \Longrightarrow u(t,x) = f\left(\frac{x}{1-tx}\right).$$

勿論，$1 - tx = 0$は特性曲面である。尚，T. Aoki [2]の理論から，このような特異性の出るひとつの理由は与えられると

うである。ここでは次の事実に注意するに止める：$t=0$のとき，$x=x_0$を通る特性曲線$x=\dfrac{x_0}{x_0t+1}$が有限時間$t=-\dfrac{1}{x_0}$で爆発すること，特異性のあらわれる特性曲線$1-tx=0$は∞を通る特性曲線と考えられること。

しかし，例えば次の事は成立する。

<u>定理 3.</u>

「・$P(D)$：定数係数偏微分作用素
・初期面は非特性，初期条件$\in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n-1})$　$\Longrightarrow$ $\exists_1$解$\in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$」

証明は，J. Leray [9] LEMME 9.1 p.339をみればすぐわかる。

§2. Cauchy問題について考えよう。大域的には例2が示すように，特異点は今の所特性曲面であるということ以外はわからない曲面上にあらわれてしまう。従って，まず，初期面Sの近傍で局所的に考えよう。勿論，出発点となるのは，Cauchy-Kowalewskiの定理であり，この定理の条件がなりたたない時に，Sの近傍にあらわれる解の特異性について調べることが問題になる。

このような視点から，Cauchy問題をはじめて扱ったのは，J. Lerayであろう。彼は，Problème de Cauchy I [9] の序文の劈頭で，《我々は，複素領域での線型Cauchy問題を大域的に研究しようと思う》と述べ，線型常微分の初期値問題の解の

基本性質を拡張しようとし，次の主目標を述べた。

《解の特異性は、初期条件の特異性から出発するcaractéristiques又は，初期面に接するcaractéristiquesに含まれる。》

彼自身は，Problème de Cauchy I と VIでこの原理の後半を明らかにした。即ち；

定理4 （J. Leray）

初期面Sが，余次元1の特性的からなる部分多様体Tをもつとき，正則な条件及び右辺のCauchy問題の解の特異性はTから出発する特性面に含まれ，代数的に分岐し、しかも，この解は一意化できる． ⊥

重要な定理であるのに，あまり知られてないと思うので，explicite な命題を述べておく。

定理4' （L. Gårding, T. Kotaké et J. Leray）

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 領域，　$S := \{ z \in \Omega ;\ s(z) = 0 \}$　$ds(z) \neq 0$ (S上)，$s \in \mathcal{O}(\Omega)$，$T := \{ z \in \Omega ;\ s(z) = p(z, ds(z)) = 0 \}$が$S$の部分多様体とし，$p(z, ds(z))$は$T$上頂度$q$回消えるとする。（$p(z, \zeta)$は$P(z, D)$の主要表象）更に，(*) $d_\zeta p(z, ds(z))$は（$\neq 0$）$z \in T$のとき，Tに接しない，とする。このとき，KをTから出発するcaractéristiques全体はΩの部分多様体となり，KはT上でSとq次の接触をする。$K := \{ k(z) = 0 \}$とおくと，

$u(z) = [k(z)]^{m-1} H_1([k(z)]^{\frac{1}{1+q}}, z) + H_2(z)$

ここで，H_1, H_2は正則，$m = P(z,D)$の階数．」

条件㊟は，余接束内で$T^*_S\Omega|_T$（$\subset Ch(P)$）を"flow-out"して Lagrangienを作る時，それがsectionの像となっているために必要な条件で，これがないと上の定理は一般にはなりたたない。

例5（J.Leray）

$P(z,D) = z_1 D_1 + z_2 D_2$，$S = \{z_1^2 - z_2 = 0\}$．このとき

$T = \{0\}$，$d_s P(z, ds(z))|_T = 0$

このとき，$\begin{cases} P(z,D)u(z) = 1 \\ u(z_1, z_1^2) = w(z_1) \end{cases}$ の解は次のようになる。$u(z) = w\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) + \log\left(\dfrac{z_2^2}{z_1}\right)$．このとき，$w$の正則域が$|z_1| < 1$であるとすると，$u(z_1, z_2)$の正則域は，$|z_2| < |z_1|$となり，(原点の近傍)−(超曲面)とはなっていなく，しかも解は無限多価。」

定理4，4'の証明については，[3]を参照．

§3 特異（分岐）Cauchy問題 あるいは，浜田の問題

Lerayの原理の前半を考える。これが普通上の標題の名で呼ばれる問題である。$S = \{x_0 = 0\}$，$T = \{x_0 = x_1 = 0\}$．Ωを$\mathbb{C}^{n+1}$の0の近傍とし，$w_h(x') \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega \cap S - T})$（$0 \le h < m$）に対して，

$$\begin{cases} P(x, D)\, u(x) = 0 \\ D_0^{\,h} u \,\big|_{x_0=0} = w_h(x') \quad (0 \le h \le m) \end{cases}$$ Pはm階，S非特性

を考える。$y \in \Omega \cap S - T$の近傍では，Cauchy-Kowalewskiの定理により正則函数のgermeが定まる。これの接続を調べるのが問題である。Leray自身は，Problème de Cauchy Vで，この問題を扱う予定であったらしい。彼の方法は，上の問題を正則な問題に帰着させる積分変換を考え，その逆変換の特異性を調べようとしていたようにみえる。結局，Vは出発されなかったために詳しいことはわからない。distributionを使った関数解析的微分方程式全盛期であったためか，J. Lerayのこれらの仕事は脚光を浴びなかったように思える。彼自身の方法も難渋を極めていた。それを全く初等的かつ強力な方法で示したのが，浜田雄策教授であった。1969年，[4]において，単純特性という条件の下で，Lerayの原理の前半が正しいことが示された。ここで用いられた手法は，Ludwig等によって双曲型方程式の解析に用いられていた，幾何光学の方法といってよいと思う。定理の主張は偏微分方程式の一般論の中で，最も美しいものの1つである。expliciteということと，一般的ということの，ギリギリの接点にたっている。浜田教授の仕事以後，この方法はC. Wagschal等により整理拡張され，今も進行中である。今の所，最終的な結果は，

C. Wagschal による [17]。そこでは，特性根がすべて正則という仮定の下で解の表示が与えられている。この特異性を調べることが残っているが，まもなく出版されるであろう。この分野では，G. Nakamura，J. Urabe，T. Kobayashi 氏等，多くの日本人が活躍している(た?)．

最後にひとつ注意を与えておく。上に述べた人達の結果は，いつも，原点の近傍から余次元1(複素)の超曲面を除いた残りでの多価解析関数解の存在を示しているが，一般にはそうならない。

例6 (Y. Hamada)

$$\begin{cases} (D_0^2 - D_1 D_2)u = 0 \\ \qquad u|_{x_0=0} = w(x') := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\delta_n\sqrt{x_2+c_n}}\right\}\cdot\dfrac{1}{x_1} \qquad (|x'|<\tfrac{1}{2}) \\ \qquad D_0 u|_{x_0=0} = 0 \qquad\qquad (w(x') \text{ は } |x'|<\tfrac{1}{2} \text{ で正則.}) \end{cases}$$

$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{|z|=1\}$，$\delta_n$ はある選び方が決められる定数(>0)．

この解 $u(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{x_2+c_n}}{\delta_n[4x_1(x_2+c_n)-x_0^2]}$ は，$\mathcal{D}=\{x;\ |x|<\frac{1}{2},\ |x_0^2-4x_1x_2|<4|x_1|\}$ で正則であるけれど，$\mathcal{F}=\{x;\ |x|<\frac{1}{2},\ |x_0-4x_1x_2|\geqq 4|x_1|\}$ へは解析接続できない．」

$x_0=x_1=0$ を通る特性曲面は，$4x_1(x_2+c)-x_0^2=0$，$x_1=0$ であり，媒介変数 c を含む。即ち，無限にある。各特性曲面上に特異性をもつ解は存在するから，c を実1次元動かすことにより，実余次元1の特異性の「カベ」が出来る。これが，自

然境界を作り，解はそれを越えて接続できなくなる。

Lerayの原理の前半は確かに正しいが，状況は相当に複雑である。特性根が正則で包含的の時は，T. Kobayashi [10] 氏により解析されているけれど，この場合も，Y. Hamada - G. Nakamura [7] にあるように，無限遠点から流れこむ特異性がある。非包含的の時は，特異性はもっと増え，かなり複雑になると思える。その原因は，多重相関数が有限個で閉じないことによる。実際，C. Wagschal [17] の解の表示は無限積分の無限和である。又，J. Urabe [16] 氏によりTricomi型及びそれに関連する作用素についての解析がなされているが，それには超幾何函数のモノドロミーなどの性質が用いられ，かなり複雑である。こうみてくると，一般の作用素に対してよい結果が出せるか，というのは，少なくとも筆者には疑問である。浜田教授の方法は，実双曲型方程式の解析にも有効（hyperfunctionのカテゴリーでの）であることはいうまでもないが，最近の西和田氏の仕事ではlacunaの研究にも用いられたり，或いは，溝畑教授により違った角度から研究されていることに注意しておく（有理伝播(meromorphic propagation) ⇒ Levi条件．この逆は，De Parisによる）。

II 完全積分可能系

§1 1階

この場合，常微分方程式の時と同じようなことがなりたつ。従って，もっと細い情報についての一般化ということが問題になる。確定，不確定特異点，モノドロミー群，Riemann-Hilbert-(Birkhoff)が中心問題となるだろう。最近，H.Majima [11] 氏により，ひとつの結着はついたようにみえる。

§2 高階

I-§1で述べたことを拡張すると，次の様に定式化できる。

X：複素多様体　$\mathcal{M}$：微分方程式系　S：超曲面$\subset X$

問題7　$\mathcal{M}$のsolutionがS上に特異性をもつならば，Sは特性か？(c.à.d. $T^*_S X \subset Ch(\mathcal{M})$)．」

まず，方程式系が大域的に与えられ，更に，決定系であるときにやるべきだろう。

問題8　$P(x,D) = (p_{ij}(x,D))_{q\times q}$ ：Ω上の微分方程式系，KをΩの超曲面とし，$\exists u \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega - K})^q$，K上に特異性をもつとする。$Pu = 0 \implies$ K：特性か？」

このときは，$m = \sup \sum_{i=1}^{q} m_{i\pi(i)}$ $(\pi \in \mathfrak{S}_q)$ とおくと，$\mathrm{d\acute{e}t}(p_{ij}(x,\xi))$ のm次斉次部を$p(x,\xi)$とおくと，$Ch(P) = \{p(x,\xi) = 0\}$である (E. Andronikof [1])。

III. おまけ.

§1. 解の解析接続について

≪ $P(z,D)u(z)=0$ が $\Omega(\subset\mathbb{C}^n)$ でなりたっているとき($u\in\mathcal{O}(\Omega)$), Pと$\partial\Omega$のどのような条件の下で$u(z)$が$\partial\Omega$を越えて解析接続できるか?≫という問題がある。これに関しては Y. Tsuno [15] 氏をあげるに止める。(実は、僕はよく知りません。) 又, 田島氏の仕事[13]は, これと関係があるように見える。

§2 特解構成の問題

≪ $K\subset\Omega$ 超曲面, $P(z,D)$: Ω上の微分作用素とする。KとPのある条件の下で, $\exists\Omega_1\subset\Omega$, $\forall f\in\mathcal{O}(\widetilde{\Omega-K})$, $\exists u\in\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_1-K})$; $P(z,D)u(z)=f(z)$ ≫ という問題がある。これは, 特異Cauchy問題を扱うときに部分的に出てくる。以前から知られていたのは, K: 非特性 [18], K: 特性多重度一定 [6] であった。あと, Fuchs 型の退化特性曲面に対してもH. Tahara [14] 氏により知られていた。最近, Ōuchi 氏 [12] により, 特性のうちかなり広いクラスのKに対して成り立つことが示された。次に一般の曲面についてはどうであろうか? 一般には$u(z)$の特異性は, Kよりもひろがることを許さなければならないことを, 次の例が示している。

例9.

$$\left(2y\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y)=\frac{1}{x}$$

このとき、 $u(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y^2-x}}\log\dfrac{y-\sqrt{y^2-x}}{y+\sqrt{y^2-x}}+f(x-y^2)$

が一般解である。

右辺の特異性 $=\{x=0\}$ だが、解の特異性 $=\{x=0,\ x=y^2\}$

定理4（on 4'）との類似から次の予想ができる。

予想10

「$K\subset\Omega$ 超曲面，K 内の $P(z,D)$ についての特性点全体 L が余次元 1 の部分多様体をなすとする。このとき，L を通る特性面を H とする（Th4' の㊉と同じような条件はおくべきであろう。）このとき，$\exists\Omega'$，$\forall f\in\mathcal{O}(\widetilde{\Omega-K})$，$\exists u\in\mathcal{O}(\widetilde{\Omega'-(K\cup H)})$; $P(z,D)u(z)=f(z)$.」

IV 参考文献

[1] E. Andronikof. : Systèmes déterminés d'équations aux derivées partielles.
Sém. J. Vaillant, Univ. de Paris VI Octobre 1981

[2] T. Aoki : dans ce volume.

[3] L. Gårding, T. Kotake et J. Leray : Bull. Soc. math. France, 92, 1964, pp 263 à 361

[4] Y. Hamada ; Publ. RIMS Kyoto Univ. vol 5 (1969) pp 21—40

[5] Y. Hamada ; 〃 vol (1970) pp 357—384

[6] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal : J. Math. pures et appl. 55, 1976, pp 297 à 352

[7] Y. Hamada - G. Nakamura : Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 4 1977, pp 725 - 755

[8] 亀谷睦 : 斉次多項式が定める非線型偏微分方程式の解の分岐特異性 1982, 2月, 東大修士論文.

[9] J. Leray : Bull. Soc. Math. France, 85, 1957 pp. 389 à 429.

[10] T. Kobayashi : J. Fac. Sci. of Tokyo Sect 1A. Math vol 29. No. 1 1982, pp 97—142

[11] H. Majima : Proc. Japan Acad. vol LIX. Ser A, No. 4, 1983 pp 146 — 153.

[12] S. Ōuchi : Proc. Japan Acad vol 57 Ser A No. 10 1981 pp 481—484

[13] S. Tajima : dans ce volume.

[14] H. Tahara : Japan. J. Math. Vol 5. No. 2, 1979. pp 245— 347

[15] Y. Tsuno : Hiroshima Math. J. 10 (1980) pp 539—551

[16] J. Urabe : J. Math. Kyoto Univ. 21-3 (1981) pp 517 - 535.
[17] C. Wagschal : J. Math. pures et appl. 62, 1983, pp 99 à 127.
[18] 米村明芳 : 京大修士論文 (1981)