

一次元非線形 Schrödinger 方程式  
の Cauchy 問題の解について

早大理工 堤 正義 (Masayoshi Tsutsumi)

早大理工 仲光 邦昭 (Kuniaki Nakamitsu)

早大理工 林 仲夫 (Nakao Hayashi)

1. Introduction. 我々は次の非線形 Schrödinger 方程式の  
Cauchy 問題を考えることにする。

$$(1.1) \quad i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda |u|^{p-1} u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$(1.2) \quad u(0, x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

我々の目的は  $\lambda > 0$ ,  $p > 1$  が奇数,  $\phi \in H^1(\mathbb{R})$  であらば  
 $|x| \rightarrow \infty$  のとき  $\phi$  が十分速く減少しているという条件のもと  
で (1.1), (1.2) の解が  $t \neq 0$  で ほぼ明らかに存在ということ。  
すなわち, 非線形放物形方程式の解のもつ *smoothing effect*  
や, T. Kato [7] によって示された *kdV* 方程式の解の  
*smoothing effect* と類似の性質を (1.1), (1.2) の解が持つこと  
を示すことにある。我々は上記のことを次の2つの事実を  
もちいることにより示すことが出来る。

1. 方程式 (1.1) は次の2つの保存量をもつ。

$$E_0(t) = \int |u(t,x)|^2 dx,$$

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int |Du(t,x)|^2 dx + \frac{\lambda}{p+1} \int |u(t,x)|^{p+1} dx.$$

2. 作用素  $J \equiv e^{ix^2/4t} (2it) D (e^{-ix^2/4t})$

が Schrödinger 作用素  $L = i\partial_t + \frac{1}{2}\partial_x^2$  と  
交換可能である。すなわち

$$LJ = JL.$$

ここで  $D = \partial_x$  である。

注) 初期値  $\phi \in H^1(\mathbb{R})$  という条件を  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  という  
条件に変えても  $p=3$  であれば、ある程度同様の結果が  
得られる。その場合は上の事実が必要としない。  
(くわしくは論文 [4] を参照。)

以下この論説で用いる記号の説明及び有用な補題を述  
べることにする。

$n \in \mathbb{N}$  (自然数),  $1 \leq p \leq \infty$  とし  $[s]$  を  $s$  に近いが  
 $s$  に等しい最小の整数をあらわすことにする。  $L^p = L^p(\mathbb{R})$ ,  
 $H^{n,p} = H^{n,p}(\mathbb{R})$  とそれぞれ次の norm を持つ通常の  
Sobolev 空間とする。

$$\|f\|_p = \left( \int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess. sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad p = \infty,$$

$$\|f\|_{m,p} = \sum_{j=0}^m \|D^j f\|_p$$

$\mathbb{R}$  の区間  $I$  と  $1 \leq p$  なる norm を持つ Banach 空間  $B$  に対して  $C(I, B)$  (あるいは  $C_b(I, B)$ ) により、 $I$  から  $B$  への連続関数 (あるいは有界連続関数) の空間を表わす。

$C^l(I, B)$  (あるいは  $C_b^l(I, B)$ ) を  $I$  から  $B$  への  $l$  回連続微分可能 (あるいは  $l$  回有界連続微分可能) な空間とする。

簡単のため  $H^{m,2} \in H^m$  であらわすことにする。又  $C(a, b, \dots)$  により、 $a, b, \dots$  に依存した定数をあらわすことにし、とくに  $a, b, \dots$  を明示する必要がないときは  $C$  で表わすことにする。

次の Gagliardo-Nirenberg の不等式 (以下簡単のため G-N の不等式とする。) は  $J^m(|u|^{r+1})$  の評価を行なうときに有用である。

補題 1.  $1 \leq q, r \leq \infty$ ,  $j, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  かつ  $j \leq m$  とする。そのとき次の不等式が成立する。

$$(1.3) \quad \|D^j u\|_p \leq M \|D^m u\|_r^a \|u\|_q^{1-a},$$

ここで  $\frac{1}{p} = f + a((\frac{1}{r}) - m) + (1-a)/q$  で  
 $a$  次の不等式を満足するものとする。

$$(1.4) \quad f/m \leq a \leq 1$$

なお (1.3) における  $M$  は  $m, f, q, r, a$  へのみ依存した定数である。

証明は Friedman [1] 参照。

2.  $H^1$ -solutions. 最初に我々の得た結果を述べることにする。

定理 1.  $\lambda > 0$  のとき  $1 < p < \infty$ ,  $\lambda < 0$  のとき  $1 < p < 5$ .  $\phi \in H^1$ ,  $x^m \phi \in L^2$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) とし, もし  $p$  が奇数でなければ  $p > m+1$  とする。以上の仮定のもと, (1.1), (1.2) の解  $u = u(t, x)$  が一意的に存在し次の性質を満足する。

$$(2.1) \quad u \in C_b(\mathbb{R}; H^1)$$

$$(2.2) \quad J^m u \in C(\mathbb{R}; L^2), \quad m = 1, 2, \dots, n$$

$$(2.3) \quad \|u(t)\|_2 = \|\phi\|_2$$

$$(2.4) \quad \|Du(t)\|_2^2 + \frac{2\lambda}{p+1} \|u(t)\|_{p+1}^{p+1} \\ = \|D\phi\|_2^2 + \frac{2\lambda}{p+1} \|\phi\|_{p+1}^{p+1}$$

$$(2.5) \quad |Ju(t)|_2^2 + \frac{8t^2\lambda}{p+1} |u(t)|_{p+1}^{p+1} \\ = |x\phi|_2^2 + \frac{4\lambda(5-p)}{p+1} \int_0^t \tau |u(\tau)|_{p+1}^{p+1} d\tau$$

さらに次の不等式を満足する。

$$(2.6) \quad |J^m u(t)|_2^2 \leq C_m \eta_m(t), \quad m=1, 2, \dots, n$$

ここで  $C_m$  は  $p, \lambda, m, |\phi|_{1,2}, |x^m \phi|_2$  により依存する定数である。又  $\eta_m(t)$  は次のとおりである。

$$\lambda > 0, \quad p > (3 + \sqrt{17})/2 \quad \text{のとき} \quad \eta_m(t) = 1$$

$$\lambda > 0, \quad p = (3 + \sqrt{17})/2 \quad \text{のとき} \quad \eta_m(t) = (1+|t|)^{C_m}$$

$$\lambda > 0, \quad 1 < p < (3 + \sqrt{17})/2 \quad \text{のとき} \quad \eta_m(t) = \exp[C_m(1+|t|)^{-\frac{(p-1)^2}{p+3}}]$$

$$\lambda < 0, \quad 1 < p < 5 \quad \text{のとき} \quad \eta_m(t) = \exp[C_m(1+|t|)]$$

注 1.1.  $J^m u = e^{ix^2/4t} (2it)^m D^m (e^{-ix^2/4t} u)$  であるから

(2.2) より

$$e^{-ix^2/4t} u \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; H^m)$$

系 1.1. 定理 1 の仮定の下 (1.1), (1.2) の解  $u$  は

$$u \in \bigcap_{m=0}^{[n/2]} C^m(\mathbb{R} \setminus \{0\}; C^{n-2m-1}(\mathbb{R}))$$

を満足する。

系 1.2. 定理 1 において  $p \in$  奇数とし, 任意の  $m \in \mathbb{N}$  に対して  $x^m \phi \in L^2$  とすれば (1.1), (1.2) の解は  $t \neq 0$  で  $t$  と  $x$  に関して無限回微分可能である。

注 1.2. 多次元に関する類似の結果については論文 [5] 参照。

以下定理 1 の証明をすることにする。

定理 1 の証明.  $t > 0$  だけを考えることにする。(存在せよ  $t < 0$  は同様に扱うことが出来るから。) 以下我々は (1.1), (1.2) に対する次の近似方程式を考えることにする。

$$(2.7) \quad i u_t + D^2 u = \lambda \varphi_k(|u|^2) u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(2.8) \quad u(0, x) = \varphi_k(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ここで  $p$  が奇数のとき  $\varphi_k(s) = s^{(p-1)/2}$ ,  $p$  が奇数でないとき  $\varphi_k(s) = s^{(p-1)/2} \exp(-s^{-\delta/2}/k)$ ,  $\delta > 0$  とし  $\varphi_k(x) \in \mathcal{S}$  (急減少関数) の要素で  $\varphi_k \rightarrow \phi$  in  $H^1$ ,  $x^m \varphi_k \rightarrow x^m \phi$  in  $L^2$  as  $k \rightarrow \infty$  とする。

M. Tsutsumi [8] によつておのづかの  $k$  に対して

(2.7), (2.8) の一意的解  $u_k = u_k(t, x)$  が存在して  $u_k \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}))$  が示されているので、我々は定理 1 の結果を得るために必要な a-priori 評価を (2.7), (2.8) の解に対して示せばよい。

補題 2.1.  $u_k$  を (2.7), (2.8) の解とすると次の評価式を得ることが出来る。

$$(2.9) \quad \|u_k(t)\|_2 = \|\phi_k\|_2$$

$$(2.10) \quad \|Du_k(t)\|_2^2 + \lambda \int G_k(|u_k(t, x)|^2) dx \\ = \|D\phi_k\|_2^2 + \lambda \int G_k(|\phi_k|^2) dx$$

$$(2.11) \quad \|Ju_k(t)\|_2^2 + 4t^2 \lambda \int G_k(|u_k(t, x)|^2) dx \\ = \|x\phi_k\|_2^2 + 4\lambda \int_0^t \int H_k(|u_k(s, x)|^2) ds dx$$

ここで  $G_k(s) = \int_0^s f_k(\sigma) d\sigma$ ,  $H_k(s) = 3G_k(s) - f_k(s)s$  である。

証明 (2.9), (2.10) は (2.7) の両辺に  $\bar{u}_k$  及び  $\overline{(u_k)_t}$  をかけて部分積分を行なうことによつて得られる。又 (2.11) は Ginibre - Velo [2] によつて得られた pseudo-conformal law である。 Q.E.D.

以下  $u_k$  は (2.7), (2.8) の解とする。

補題 2.2.  $u_k$  は次の不等式を満足する。

$$(2.12) \quad |u_k(t)|_{1,2} \leq C,$$

さらにもし  $\lambda > 0$  ならば

$$(2.13) \quad |u_k(t)|_{\infty} \leq C(1+t)^{-\sigma}, \quad t > 0$$

ここで  $C$  は  $k, t$  に依存しない定数である。又

$$\sigma = \min \left\{ \frac{1}{2}, (p-1)/(p+3) \right\}.$$

証明 (2.12) は (2.9), (2.10) よりあきらか。  $p \geq 5$ ,  $\lambda > 0$  のとき (2.11) より

$$|Ju_k(t)|_2 \leq C,$$

よって  $G-N$  の不等式 及び (2.12) より

$$|u_k(t)|_{\infty} \leq Ct^{-1/2} |Ju_k(t)|_2^{1/2} |u_k(t)|_2^{1/2} \leq Ct^{1/2},$$

又 (2.12) より  $|u_k(t)|_{\infty} \leq C$  であるから (2.13) が得られる。次に  $1 < p < 5$ ,  $\lambda > 0$  を考える。(2.11) より次の不等式が得られる。

$$t^2 |u_k(t)|_{p+1}^{p+1} \leq \frac{p+1}{8} |\chi\phi_k|_2^2 + \frac{5-p}{2} \int_0^t s |u_k(s)|_{p+1}^{p+1} ds$$

Kadokawa [6] により

$$(2.14) \quad |u_k(t)|_{p+1} \leq C t^{-(p-1)/2(p+1)}, \quad t > 1$$

これと (2.11) より

$$(2.15) \quad |Ju_k(t)|_2 \leq C t^{1-\frac{1}{4}(p-1)}, \quad t > 1$$

G-N の不等式 より

$$|u_k(t)|_\infty \leq C t^{-\frac{2}{p+3}} |Ju_k(t)|_2^{\frac{2}{p+3}} |u_k(t)|_{p+1}^{\frac{p+1}{p+3}}$$

これと (2.14), (2.15) より

$$|u_k(t)|_\infty \leq C t^{-(p-1)/(p+3)}, \quad t > 1$$

以上より補題は示された。

Q. E. D.

補題 2.3.  $u_k$  は次の不等式を満足する。

$$(2.16) \quad |J^m u_k(t)|_2 \leq C_m \eta_m(t), \quad m=1, 2, \dots, n,$$

ここで  $\eta_m(t)$  は定理 1 にあるものと同じである。又  $C_m$  は  $p, \lambda, m, |\phi|_1, |\phi|_2, |x^m \phi|_2$  により依存した定数で  $k, t$  には依存していない。

証明.  $J$  と  $L$  が交換可能であるから  $J^m u_k = w_{m,k}$  とおくと  $w_{m,k}$  は次の方程式を満足する。

$$(2.17) \quad i(w_{m,k})_t + D^2 w_{m,k} = \lambda J^m (\phi_k(|u_k|) u_k)$$

$$(2.18) \quad w_{m,k}(0) = x^m \phi_k, \quad m=1, 2, \dots, n.$$

$\lambda < 0$  のときも  $\lambda > 0$  のときと同様に扱うことが出来るので  $\lambda > 0$  だけを考えることにする。(2.17) に  $\bar{w}_{m,k}$  をかけて

$x$  に関して部分積分をし虚数部をとれば次の式を得ることが出来る。

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad \frac{d}{dt} |W_{m,k}(t)|_2^2 &= 2\lambda I_m \int [J^m(f_k(|u_k(t,x)|^2)u_k(t,x)) \bar{w}_{m,k}(t,x)] dx \\
 &\leq C |(2tD)^m f_k(|v_k|^2)v_k|_2 |W_{m,k}(t)|_2
 \end{aligned}$$

ここで  $v_k = e^{-ix^2/4t} u_k$  である。G-N の不等式より

$$\begin{aligned}
 |(2tD)^m f_k(|v_k|^2)v_k|_2 &\leq C_m |v_k|_\infty^{p-1} |W_{m,k}|_2 \\
 &\leq C_m |u_k|_\infty^{p-1} |W_{m,k}|_2
 \end{aligned}$$

上の式と (2.19), 及び (2.13) より

$$(2.20) \quad \frac{d}{dt} |W_{m,k}(t)|_2^2 \leq C_m (1+t)^{-\sigma(p-1)} |W_{m,k}(t)|_2^2$$

これから " $\sigma(p-1) > 1$  のときは"

$$|W_{m,k}(t)|_2^2 \leq C_m,$$

$\sigma(p-1) = 1$  のときは"

$$|W_{m,k}(t)|_2^2 \leq C_m (1+t)^{C_m},$$

$0 < \sigma(p-1) < 1$  のときは"

$$|W_{m,k}(t)|_2^2 \leq C_m \exp[C_m (1+t)^{1-\sigma(p-1)}],$$

以上より (2.16) がいえたことになる。

B. E. D.

次に  $W_{m,k}$  の収束について考えることにする。

補題 2.4.  $p > 2$  とする。そのとき任意の  $T > 0$

に対して  $\{u_k\}$  は次の不等式を満足する。

$$(2.21) \quad |u_k(t) - u_j(t)|_{1,2}^2 \leq C(T) \left\{ |\phi_k - \phi_j|_{1,2}^2 + A_p^2 \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{j} \right)^2 \right\}$$

ここで  $C(T)$  は  $k, j$  に依存しない定数,  $A_p$  は  $p$  が奇数のとき  $0$ ,  $p$  が偶数でないとき  $1$  とする。

証明.  $v_{k,j} = u_j - u_k$  とする。方程式 (2.7) より次の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |v_{k,j}(t)|_{1,2}^2 &= 2\lambda \operatorname{Im} \int [f_k(|u_k|^2)u_k - f_j(|u_j|^2)u_j] \overline{v_{k,j}} dx \\ &\quad + 2\lambda \operatorname{Im} \int [D(f_k(|u_k|^2)u_k - f_j(|u_j|^2)u_j)] D\overline{v_{k,j}} dx \\ &\leq C(|u_k|_\infty^{p-1} + |u_j|_\infty^{p-1}) |v_{k,j}|_2^2 \\ &\quad + CA_p \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{j} \right) (|u_k|_\infty^{p-1-\delta} + |u_j|_\infty^{p-1-\delta}) \\ &\quad \times (|u_k|_{1,2} + |u_j|_{1,2}) (|v_{k,j}|_2 + |Dv_{k,j}|_2) \\ &\quad + C(|u_k|_\infty^{p-2} + |u_j|_\infty^{p-2}) (|Du_k|_2 + |Du_j|_2) \\ &\quad \times (|v_{k,j}|_\infty |Dv_{k,j}|_2 + |Dv_{k,j}|_2^2) \end{aligned}$$

(2.12) より

$$\frac{d}{dt} \|U_{k,j}(t)\|_{L^2}^2 \leq C \|U_{k,j}(t)\|_{L^2}^2 + CA_p^2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{j}\right)^2$$

これより (2.21) は容易に得られる。

Q.E.D.

補題 2.5.  $p$  が奇数でないとき  $p > n+1$  とする。そのとき任意の  $T > 0$  に対し  $w_{m,k}$  は次の不等式を満足する。

$$(2.22) \quad \|w_{m,k}(t) - w_{m,j}(t)\|_2^2 \leq C(T) \left[ |x^m(\phi_k - \phi_j)|_2^2 + \|\phi_k - \phi_j\|_{L^2}^2 + A_p^2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{j}\right)^2 \right].$$

ここで  $C(T)$  は  $k, j$  に依存しない定数  $A_p$  は  $p$  が奇数のとき  $0$ ,  $p$  が奇数でないとき  $1$  とする。

証明.  $W_{k,j} = w_{m,k} - w_{m,j}$  とする。方程式 (2.17) より我々は次の不等式を得る。

$$\begin{aligned} i(W_{k,j})_t + D^2 W_{k,j} &= \lambda J^m \left( \frac{1}{k} (|v_k|^2) u_k - \frac{1}{j} (|v_j|^2) u_j \right). \end{aligned}$$

$\overline{W_{k,j}}$  を両辺にかけて、 $\lambda$  に関して積分し、虚数部分をとり次の不等式が得られる。

$$\frac{d}{dt} |W_{kj}(t)|_2^2 \leq C | (2tD)^m (f_k(|v_k|^2)v_k - f_j(|v_j|^2)v_j) |_2 \\ \times |W_{kj}(t)|_2.$$

ところで

$$(2.23) \quad | (2tD)^m (f_k(|v_k|^2)v_k - f_j(|v_j|^2)v_j) |_2 \\ \leq | (2tD)^m (f_k(|v_k|^2)v_k - f_j(|v_k|^2)v_k) |_2 \\ + | (2tD)^m (f_j(|v_k|^2)v_k - f_j(|v_j|^2)v_j) |_2$$

(2.23) の第一項は次の式によって上から評価される。

$$CA_p \left[ \left(\frac{1}{k}\right) |u_k|_\infty^{p-1} + \left(\frac{1}{j}\right) |u_k|_\infty^{p-1} \right] |w_{m,k}|_2 \\ \leq C(T) A_p \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{j} \right).$$

ここで補題 2.2, 補題 2.3 を用いた。(2.23) の第二項は G-N の不等式を用いることにより次の式によって上から評価される。

$$C \left( |w_{m,k}|_2^{p-1} + |w_{m,j}|_2^{p-1} + |u_k|_\infty^{p-1} + |u_j|_\infty^{p-1} \right) \\ \times \sum_{l=1}^m |v_{kj}|_\infty^{1-\alpha_l} |W_{kj}|_2^{\alpha_l}$$

ここで  $\alpha_l$  は  $0 \leq \alpha_l \leq 1$  を満足する実数である。補題 2.2, 補題 2.4 と以上の計算により我々は次の不等式を得ることが出来る。

$$\frac{d}{dt} |W_{k,j}(t)|_2^2 \leq C(T) \{ A_p^2 (\frac{1}{k} + \frac{1}{j})^2 + |\phi_k - \phi_j|_{L^2}^2 + |W_{k,j}(t)|_2^2 \}$$

これより (2.22) は容易に得らる。

Q. E. D.

補題 2.4, 2.5 を用いることにより以下定理 1 を証明することにする。補題 2.4 より (2.1), (2.2) を満足する  $u$  が一意に決まることはあきらか、又それが (1.1) の解であることは容易にわかる。  $u$  が性質 (2.3) - (2.6) を満足することは補題 2.1 - 2.3 より得らる。

Q. E. D.

最後に系 1.1 の証明を与えようとする。

系 1.1 の証明 注 1.1 より  $e^{-ix^2/4t} u \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; H^m(\mathbb{R}))$

Sobolev の不等式より  $e^{-ix^2/4t} u \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; C^{m-1}(\mathbb{R}))$

よって  $u \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; C^{m-1}(\mathbb{R}))$ . 方程式 (1.1) を用いれば次の結果が得らる。

$$u \in \bigcap_{m=0}^{[n/2]} C^m(\mathbb{R} \setminus \{0\}; C^{n-2m-1}(\mathbb{R}))$$

次に  $L^2$ -solutions について考えよう。

3.  $L^2$ -solutions 最初にこの章で用いる記号及び補題について述べることにする。  $\mathbb{R}$  の区間  $I$  に対して  $L^p(I; B)$  で  $I$  上で定義された Banach 空間  $B$  に値をとる強可測関数  $u(x)$  で  $|u(x)|_B \in L^p(I)$  を満足する関数空間を表わすことにする。  $\mathcal{F}$  を Fourier 変換,  $\mathcal{F}^{-1}$  を逆 Fourier 変換とし  $V(x)$  を次のように定義することにする。

$$V(x)\phi = \mathcal{F}^{-1} e^{-i|\beta|^2 x} \mathcal{F}\phi$$

$V(x)\phi$  に関する補題はこの章の結果を得るために重要である。

補題 3.1. 任意の  $\phi \in L^{p'}$  に対して

$$|V(x)\phi|_p \leq C |x|^{-(p-2)/2p} |\phi|_{p'}$$

ここで  $2 \leq p \leq \infty$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ .

補題 3.2. 任意の  $\phi \in L^2$  に対して

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} |V(x)\phi|_r^2 dx \right)^{1/2} \leq C |\phi|_2$$

ここで  $2 \leq r \leq \infty$ ,  $2/q = 1/2 - 1/r$ .

補題 3.2 の証明については [3], [10] 参照。

次に我々の結果を述べることにする。

定理 2.  $1 < p < 5$ ,  $\phi \in L^2$ ,  $x^m \phi \in L^2$  ( $m \in \mathbb{N}$ )  
とし,  $p \neq 3$  ならば  $p > m+1$  とする。そのとき (1.1), (1.2)  
の一意的な解  $u = u(t, x)$  が存在し, 次の性質を満足する。

$$(3.1) \quad u \in C_b(\mathbb{R}; L^2)$$

$$(3.2) \quad J^m u \in L_{loc}^{\frac{2}{\beta}}(\mathbb{R}; L^{p+1}) \cap C(\mathbb{R}; L^2)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, m,$$

ここで  $\beta = 4(p+1)/(p-1)$ 。

証明 第2章の  $H^1$ -solutions のときと同様に補題 3.1, 3.2  
及び G-N の不等式を用いることにより我々は近似方程式  
(2.7)-(2.8) の解  $u_k$  に対して次の不等式を得ることが出来  
る。任意の  $T > 0$ , 及び  $m = 0, 1, 2, \dots, m$  に対して

$$(3.3) \quad \left( \int_0^T |J^m u_k(t)|_{p+1}^{\frac{2}{\beta}} dt \right)^{\frac{\beta}{2}} \leq C(T)$$

$$(3.4) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} |J^m u_k(t)|_2 \leq C(T)$$

ここで  $C(T)$  は  $k$  に依存しない定数である。次に補題 3.1,  
3.2, 及び (3.3), (3.4) 式と G-N の不等式を用いると  
次の不等式が得られる。

任意の  $T > 0$  と,  $m=0, 1, 2, \dots, n$  に対して

$$(3.5) \quad \left( \int_0^T |J^m(u_k(t) - u_j(t))|_{p+1}^q dt \right)^{1/q} \\ \leq C(T) (A_p (V_k + V_j) + |\phi_k - \phi_j|_2 + |\chi^m(\phi_k - \phi_j)|_2).$$

$$(3.6) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} |J^m(u_k(t) - u_j(t))|_2 \\ \leq C(T) (A_p (V_k + V_j) + |\phi_k - \phi_j|_2 + |\chi^m(\phi_k - \phi_j)|_2)$$

ここで  $C(T)$  は  $k, j$  に依存しない定数及び  $A_p$  は  $p=3$  のとき  $0$ ,  $p \neq 3$  のとき  $A_p=1$  である。不等式 (3.3) - (3.6) に関するくわしい証明については [4] 参照。

定理 1 の議論と同様にして定理 2 は不等式 (3.5), (3.6) より得らる。

Q. E. D.

系 1.1 と同様にして次の系 2.1 が定理 2 より得らる。

系 2.1. 定理 2 の仮定の下 (1.1), (1.2) の解  $u$  は

$$u \in \bigcap_{m=0}^{[n/2]} C^m(\mathbb{R} \setminus \{0\}; C^{m-2m-1}(\mathbb{R}))$$

を満足する。

References

- [1] A. Friedman : *Partial Differential Equations* : Holt-Rinehart and Winston New-York, 1969.
- [2] J. Ginibre and G. Velo : On a class of nonlinear Schrödinger equation I, II, *J. Functional Analysis*, 32 (1979), 1-32, 33-71 ; III, *Ann. Inst. Henri Poincaré Sect. A*, 28 (1978), 287-316.
- [3] J. Ginibre and G. Velo : Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations, Preprint (1984).
- [4] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi : On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, to appear (1985).
- [5] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi : On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations, submitted (1985).
- [6] S. Kadekawa : Ph. D. Thesis, Indiana University, (1980).

- [7] T. Kato : On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equations, in "Studies in applied mathematics", edited by V. Guillemin, advances in mathematics supplementary studies, Vol. 8, Academic press, (1983), 93-128.
- [8] M. Tsutsumi : Weighted Sobolev spaces and rapidly decreasing solutions of some nonlinear dispersive wave equations, J. Differential Equations, 42 (1981), 260-281.
- [9] Y. Tsutsumi : Scattering problem for nonlinear Schrödinger equations, to appear (1985)
- [10] Y. Tsutsumi :  $L^2$ -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups, preprint, (1985)
- [11] V. E. Zakharov and A. B. Shabat : Exact theory of two dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, Sov. Phys. JETP. 34 (1972), 62-69.