

\mathbb{R}^n における Navier-Stokes 方程式の弱解の L^2 -decay

広島大 理 梶木屋 龍治 (Ryuji Kajikawa)
広島大 理 宮川 鉄朗 (Tetsuro Miyakawa)

次の Navier-Stokes 方程式の初期値問題を考える。

$$(NS) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u + (u, \nabla) u + \nabla p = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

本稿では (NS) の弱解の $t \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動について述べる。

Schonbek [8] は、 $n=3$ のとき Caffarelli, Kohn, Nirenberg [1] によって構成された弱解に対してその L^2 -decay を考察した。彼らは初期値が $L^2 \cap L^r$ に属するとき [1] の弱解が $t \rightarrow \infty$ のとき $t^{-\frac{1}{r}}$ の order で減衰することを示した。(Kato [3] も参照せよ。)

我々はこれを改良し、かつ一般化した結果を得た。実際 $n \geq 2$ $u_0 \in L^2 \cap L^r$ ($1 \leq r < 2$) のとき [1] によって構成された弱解の L^2 ノルムは $t \rightarrow \infty$ のとき $t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}$ の order で減衰することを示す。これは $n=3, r=1$ のとき先にあげた order よりも良い評価である。これは線形熱方程式の解と同じ減衰の order である。

さらに [1] による弱解と、同じ初期値に対する線形熱方程式の解との差を評価する。これにより、弱解がただ単に decay するのではなく、熱方程式の解に近づいていきながら減衰するということがわかる。

§1 記号と定義 超関数の意味で $\operatorname{div} u = 0$ なる $u \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ の全体を L^r_0 で表す。同様に $u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ であって $\operatorname{div} u = 0$ なる関数の全体を H^1_0 で表す。次の性質をもつ関数 u を (NS) の弱解と呼ぶ。

- (i) $u \in L^\infty(0, T : L^2_0) \cap L^2(0, T : H^1_0)$ ($\forall T > 0$) 及び
- (ii) $\int_0^T \{ - (u, \Phi_t) + (\nabla u, \nabla \Phi) + ((u, \nabla) u, \Phi) \} dt = (a, \Phi(0))$
 $\forall T > 0, \forall \Phi \in C^1([0, \infty) : H^1_0 \cap L^2_0), \Phi(t) \equiv 0 \quad (t \neq T)$

ここに (u, v) は、 L^r と $L^{r'}$ ($\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$) の duality pairing である。

弱解に関しては、いくつかの構成の方法が知られている。

[1]において次のような弱解が作られた。非線形項を時間遅れの入った mollification によって近似して、遅れ $\delta \rightarrow 0$ として弱解を求めるようとするものである。

$$(1.1) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_k - \Delta u_k + (w_k, \nabla) u_k + \nabla p_k = 0 \\ \operatorname{div} u_k = 0, \quad u_k(x, 0) = a(x) \quad (k=1, 2, \dots) \end{cases}$$

$$\text{ここで } w_k(x, t) = \delta^{-n-1} \iint \psi\left(\frac{x}{\delta}, \frac{s}{\delta}\right) \tilde{u}_k(x-y, t-s) dy ds, \quad \delta = \frac{1}{k}$$

$$\tilde{u}_k(x, t) = \begin{cases} u_k(x, t) & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

$$0 \leq \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), \quad \iint \psi dx dt = 1, \quad \text{Supp } \psi \subset \{(x, t) : |x|^2 < t, 1 < t < 2\}$$

ψ の Support に注意すれば、 $w_k(x, t)$ は $u_k(\cdot, s)$ の $s \in [t-2\delta, t-\delta]$ の値によってきまることがわかる。こうして (1.1) は 時間遅れの入った方程式として解くことができる。このとき $\{u_k\}$ から 適当な部分列 $\{u_{k_j}\}$ をとれば、それはある関数 u に $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ の意味で収束する。 u は (NS) の弱解になる。この弱解に対して我々は次のような decay の評価を得た。

§2 主結果

定理 1 $n \geq 2$ (i) $a \in L^2_\sigma$ のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_2 = 0$

(ii) $a \in L^r_\sigma \cap L^2_\sigma$ ($1 \leq r < 2$) のとき

$$\exists C = C(n, r, \|a\|_r, \|a\|_2) : \|u(t)\|_2 \leq C(t+1)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})}$$

[3]において、Leray の解 ([4] 参照) に対して、 $n \leq 4$ のとき (i) が、 $n \leq 4$ かつ $1 < r < 2$ のとき (ii) が示されている。我々の結果は $n \geq 5$ の場合や $r=1$ の場合なども含んでいる。次に $a \in L^2_\sigma$ を初期値とする線形熱方程式 (\mathbb{R}^n の場合には Stokes 方程式と一致する。) の解を $u_0(x, t)$ と表すと、

定理2 (iii) $\alpha \in L^2_\sigma$ のとき $\|U(t) - U_0(t)\|_2 = O(t^{\frac{1}{2} - \frac{n}{4}})$ ($t \rightarrow \infty$)

(iv) $\alpha \in L^r_\sigma \cap L^2_\sigma$ ($1 \leq r < 2$) のとき $\|U(t) - U_0(t)\|_2 = O(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})})$ ($t \rightarrow \infty$)

[3]において次のような結果が示されている。

$$\|U(t) - U_0(t)\|_2 = O(t^{-\varepsilon}) \text{ for } 0 < \varepsilon < \frac{n}{4} - \frac{1}{2}, n \leq 4$$

(iii) はこれより精密な評価である。

§ 3 定理の略証 (1.1) の各 U_k に対して k に無関係な評価式を導く。この不等式において $k \rightarrow \infty$ とすることにより U に対しての求めるべき評価式を得る。このようにして証明する。 k を任意に固定し、 $U = U_k, W = W_k$ とかくと、(1.1) は次式になる。

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + AU + P(W, D)U = 0, & t > 0 \\ u(0) = \alpha \in L^2_\sigma \end{cases}$$

ここに P は $(L^r(\mathbb{R}^n))^n$ から L^r_σ ($1 < r < \infty$) への射影であり、 A は $A = -\Delta, D(A) = (H^2(\mathbb{R}^n))^n$ なる作用素である。 A と P は可換になる。 A のスペクトル分解を $A = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$ とする。定理を証明する前に補題を一つ準備する。

補題 ([2] 参照) (1) $\int_0^t \|W(s)\|_2^2 ds \leq \int_0^t \|U(s)\|_2^2 ds$

$$(2) \|U(t)\|_2^2 + 2 \int_0^t \|\nabla U(s)\|_2^2 ds = \|a\|_2^2$$

$$(3) \exists C = C(n) > 0 : \|E(\lambda) P(w, \nabla) U\|_2 \leq C \|w\|_2 \|U\|_2 \lambda^{\frac{n+2}{4}} \quad (\lambda > 0)$$

定理1の証明 簡単のために以下において、 $n, r, \text{初期値 } a$ にのみ依存する定数は、すべて C とかく。 (3.1) に U をかけて \mathbb{R}^n 上で積分すれば、

$$\frac{d}{dt} \|U\|_2^2 + 2 \|A^\frac{1}{2} U\|_2^2 = 0$$

$$\rho > 0 \text{ に対して } \|A^\frac{1}{2} U\|_2^2 \geq \int_\rho^\infty \lambda d \|E(\lambda) U\|_2^2 \geq \frac{\rho}{2} (\|U\|_2^2 - \|E(\rho) U\|_2^2)$$

この不等式を使えば、

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} \|U\|_2^2 + \rho \|U\|_2^2 \leq \rho \|E(\rho) U\|_2^2$$

上式右辺を評価するため (3.1) を次式に書きなおす。

$$U(t) = e^{-tA} a + \int_0^t e^{-(t-s)A} F(w, U)(s) ds,$$

$$F(w, U) = -P(w, \nabla) U.$$

ここに $\{e^{-tA}; t \geq 0\}$ は A によって生成される半群である。

両辺に $E(\rho)$ を作用させ補題を使えば

$$(3.3) \quad \|E(\rho) U(t)\|_2 \leq \|e^{-tA} a\|_2 + C \rho^{\frac{n+2}{4}} \int_0^t \|U(s)\|_2^2 ds$$

補題 (2) より $\|U(s)\|_2 \leq \|a\|_2$ ($\forall s \geq 0$) が成り立つから、(3.2), (3.3) を使って $\rho = \alpha t^\alpha$ ($\alpha > 0$) とおくと、

$$(3.4) \quad \|U(t)\|_2^2 \leq C [\alpha \cdot t^{-\alpha} \int_0^t s^{\alpha-1} \|e^{-sA} a\|_2^2 ds \\ + (\alpha + 1 - \frac{n}{2})^{-1} \alpha^{\frac{n+4}{2}} t^{1-\frac{n}{2}}] \quad (\alpha > \frac{n}{2} - 1)$$

この式から定理1(i)が出る。(ii)を示すには、次のよく知られた不等式を使う。

$$\|e^{-tA}a\|_q \leq t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\|a\|_r, \quad 1 \leq r \leq q \leq \infty$$

これを(3.4)に適用すれば次の評価式が得られる。

$$(3.5) \quad \|U(t)\|_2^2 \leq C(t^{-n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}\|a\|_r^2 + t^{1-\frac{n}{2}})$$

$n \geq 3$ と仮定する。もし $n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}) \leq \frac{n}{2}-1$ ならば(3.5)式は(ii)が成り立つことを意味している。そうでないときは、

$$n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}) > \frac{n}{2}-1 \geq \frac{1}{2} \text{だからこの不等式(3.5)から}$$

$$\|U(t)\|_2^2 \leq C \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

が出てくる。これを(3.3)に代入して、(3.2)を使って前と同様に進めていくと、(3.5)より良い評価式

$$\|U(t)\|_2^2 \leq C[t^{-n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})} + t^{-\frac{n}{2}}]$$

が得られる。これより(ii)が示される。

$n=2$ のときに(ii)を示す。この場合はもう少し複雑になる。それは $n=2$ のとき(3.5)式から解の減衰に関する情報が何も得られないためである。 $n=2$ の場合には、強解の大域的 existence 及び弱解のクラスでの解の一意性が知られている。(11) 今後はこの解について考へるので(3.1)において $w=U$ とする。

まず $a \in L^2_0 \cap L^r_0$ ($1 < r < 2$) の場合を考える。このとき $U(t) \in L^2_0 \cap L^r_0$ ($\forall t \geq 0$) なることが示される。(2) 従って定理1(i)により今後 $a \in L^2_0 \cap L^r_0$ かつ $\|a\|_2$ は十分小さいと

仮定してよい。次に $2 < q < (\frac{1}{r} - \frac{1}{2})^{-1}$ なる q を固定して、 $\|a\|_2$ が十分小さいことをえは次の評価が得られる。(詳しい証明は[2]を見よ。)

$$\left[\int_0^t \|U(s)\|_2^q ds \right]^{\frac{1}{q}} \leq C \|a\|_r t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2}}$$

従って(3.3)より

$$\begin{aligned} \|E(P)U(t)\|_2 &\leq t^{-(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})} \|a\|_r + C \cdot P \cdot t^{1-\frac{2}{q}} \left[\int_0^t \|U(s)\|_2^q ds \right]^{\frac{2}{q}} \\ &\leq t^{-(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})} \|a\|_r + C \cdot P \cdot \|a\|_r^2 \cdot t^{2-\frac{2}{r}} \end{aligned}$$

(3.2)にこれを代入し、 $P = \alpha \cdot t^{-1}$ ($\alpha > \frac{4}{r} - 2$)として $n \geq 3$ のときと同様の手法により求める不等式が導かれる。最後に $n=2$, $r=1$ の場合を考える。 $a \in L_\sigma^2 \cap L_\sigma^1 \subset L_\sigma^2 \cap L_\sigma^{\frac{4}{\alpha}}$ であるからすでに示したことから $\|U(t)\|_2^2 \leq C t^{-\frac{1}{2}}$ が出てくる。従って(3.3)により $\|E(P)U(t)\|_2 \leq C(t^{-\frac{1}{2}} + P \cdot t^{\frac{1}{2}})$ が得られるので、これを(3.2)に代入し、 $P = \alpha t^{-1}$ ($\alpha > 1$)として前と同様の論法により求める評価が得られる。

定理2の証明 $V(t) = U(t) - U_0(t)$, $U_0(t) = e^{-tA}a$ とおくと、次の式が成り立つ。

$$(3.6) \quad \frac{dV}{dt} + Av = -P(w, \nabla)U, \quad V(0) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \|V\|_2^2 + 2 \|A^{\frac{1}{2}}V\|_2^2 = 2B(w, U, V),$$

ところで $B(w, u, v) = -(\mathbb{P}(w, v)u, v) = -((w, v)u, v)$ である。

簡単な計算により $B(w, u, v) = -B(w, v, u_0)$ がわかる。

$\|u_\alpha(t)\|_\infty \leq t^{-\frac{n}{2r}} \|a\|_r$ を使えば

$$2|B(w, v, u_0)| \leq \|a\|_r^2 \|w\|_2^2 t^{-\frac{n}{r}} + \|A^{\frac{1}{2}}v\|_2^2$$

であるから次の式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \|v\|_2^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|_2^2 \leq \|a\|_r^2 \|w\|_2^2 t^{-\frac{n}{r}}$$

定理1の証明と同じように $\|A^{\frac{1}{2}}v\|_2^2 \geq \rho (\|v\|_2^2 - \|E(\rho)v\|_2^2)$

($\rho > 0$) を代入すれば、

$$\frac{d}{dt} \|v\|_2^2 + \rho \|v\|_2^2 \leq \rho \|E(\rho)v\|_2^2 + \|a\|_r^2 \|w\|_2^2 t^{-\frac{n}{r}}$$

(3.6) より $v(t) = \int_0^t e^{-(t-s)AF(w, u)(s)} ds$ であるから、補題を用いて

$$\|E(\rho)v(t)\|_2 \leq \rho^{\frac{n+2}{4}} C \cdot \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds$$

従って、

$$(3.7) \quad \frac{d}{dt} \|v\|_2^2 + \rho \|v\|_2^2 \leq C \cdot \rho^{\frac{n+4}{2}} \left(\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds \right)^2 + \|a\|_r^2 \|w\|_2^2 t^{-\frac{n}{r}}.$$

(iii) を示す。 $a \in L_\sigma^2$ を仮定する。 $r=2$, $\rho = \alpha t^{-1}$ ($\alpha > \frac{n}{2} + 2$) とすれば (3.7) より

$$\|v(t)\|_2^2 \leq C t^{1-\frac{n}{2}} \left[\left(t^{-1} \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds \right)^2 + t^{-1} \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds \right]$$

が得られる。 $\|u(t)\|_2^2 \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) であるから (iii) が成り立つ。

(iv) を示すには $\rho = \alpha t^{-1}$ として (3.7) を今までと同様に変形する。その際に定理1(ii) 及び補題(I)に注意して $\|u(t)\|_2$, $\|w(t)\|_2$ を評価すれば次の命題が導かれる。(詳しい証明は [2] を見よ。) この命題から (iv) は明らかである。

命題 $a \in L_0^2 \cap L_\sigma^r$ ($1 \leq r < 2$) とする。 $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\|U(t)\|_2^2 = \begin{cases} O(t^{1+\frac{n}{2}-\frac{2n}{r}}) & (\frac{n}{r}-\frac{n}{2} < 1) \\ O(t^{1-\frac{n}{2}}(\log t)^2) & (\frac{n}{r}-\frac{n}{2} = 1) \\ O(t^{1-\frac{n}{2}}) & (\frac{n}{r}-\frac{n}{2} > 1) \end{cases}$$

参考文献

- [1] L.Caffarelli, R.Kohn and L.Nirenberg : Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations.
Comm. Pure Appl. Math. 35, 771-831 (1982)
- [2] R.Kajikiya and T.Miyakawa : On L^2 decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^n . preprint
- [3] T.Kato : Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions. Math.Z. 187, 471-480 (1984)
- [4] J.Leray : Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math. 63, 193-248 (1934)
- [5] J.L.Lions : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris. Dunod et Gauthier-Villars 1969

- [6] K. Masuda : Weak solutions of the Navier-Stokes equations
Tôhoku Math. J. 36, 623-646 (1984)
- [7] M. Reed and B. Simon : Methods of modern mathematical physics
Vol. II. ; Fourier analysis, self-adjointness. New York-London-San Francisco : Academic Press 1975.
- [8] M.E. Schonbek : L^2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations. Arch. Rational Mech. Anal. 88, 209-222 (1985)
- [9] M.E. Schonbek : Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations. preprint
- [10] H. Sohr : On the decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations. To appear in J. Funct. Anal.
- [11] R. Temam : Navier-Stokes equations. Amsterdam : North-Holland Publ. Co. 1977.