

## Scholz の Number Knot の中心解について

名大教養部 三宅 克哉 (Katsuya Miyake)

### §1. 序

代数的数体の巡回拡大に対する Hasse Norm Theorem は、いわゆる「Hasse principle」を具現するもののひとつであり、誠に美しい定理である。この定理を Hasse が [3] で証明したとき、彼は同時に、この定理はもはや一般のアーベル拡大に対する拡張ができないことを例示している。従ってこの定理の意味を十分に理解するためにも、例えば、一般のアーベル拡大における何が生じているのかを見る必要がある。Scholz [13] は中心拡大との関連を見抜いて、この新しい世界への先駆者をつけた。類体論をめぐる代数の十分な整備がなかつた当時にあっての彼の業績には確かに注目すべきものがある。

さて最近にな、て Lorenz, Opolka, Steinke 等がこれを精力的に研究し、特に Steinke [16] は奇数次アーベル拡大

関して著しい結果を与えた。更に、それについて、Opolka [12] が見事な分析を果して、その背後にある構造を指摘した。この小節では、これらを紹介するとともに、更により精緻な分析を進め、興味ある結果と問題を提示する二とに努める。

## §2. Scholz の Number knot

有限次代数的数体の拡大  $K/k$  を定め、 $K_A^\times, k_A^\times$  をそれを  
れよりテル群とし、 $N_{K/k}: K_A^\times \rightarrow k_A^\times$  をルム写像とする。  
このとき、剩余群

$$\tilde{R}(K/k) = k^\times \cap N_{K/k}(K_A^\times) / N_{K/k}(K^\times)$$

を、Scholz [13] にならって、 $K/k$  a Number knot という。

定理 (Hasse [3]).  $\exists \subset K/k$  が巡回拡大であれば、 $\tilde{R}(K/k) = 1$ , i.e.  $k^\times \cap N_{K/k}(K_A^\times) = N_{K/k}(K^\times)$ .

以下では  $K/k$  がガロウ拡大であるとし、そのガロウ群を  $g = \text{Gal}(K/k)$  とあらわす。体  $k$  の各素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対し、 $K$  の素イデアル  $\mathfrak{P}$  が  $\mathfrak{p}$  上にあるものをひとつずつ定めておき、半分解群を  $g(\mathfrak{p})$  と表わすことにする。加法群  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  は  $g, g(\mathfrak{p})$  に作用するととき

定理 (Scholz [13], Tate [17]).

$$\widehat{K}(K/k) \cong \widehat{\text{Ker}}\left(\Lambda_{K/k}: H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_p H^2(g(p), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right).$$

左辺  $\Lambda_{K/k}$  は  $g$  から  $g(p)$  への制限写像の直和として得られる局所化準同型写像であり,  $\widehat{\text{Ker}}$  は dual kernel の dual group をみる。巡回群に対しては, その Schur multiplier  $H^2(g(p), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  は消えるから, 左辺の直和は分歧する有限個の  $p$  に対するものとしえよう。Scholz の場合にはモロジーは無へつたが, 本質的には二の結果が得られておりと見えたが妥当である。

### §3. Number knot の中心解

まず定義を与える。

定義. 有限次拡大体  $L/K/k$  が  $\widehat{K}(K/k)$  の中心解であるとは, これが  $K/k$  の中心拡大, 即ち  $L/k$  がガロウ拡大である, 且  $\text{Gal}(L/K)$  が  $\text{Gal}(L/k)$  の中心に含まれてゐる, つまりして,

$$k^\times \cap N_{L/k}(L_A^\times) \subset N_{K/k}(K^\times)$$

が成り立つとする。

さて  $L$  が  $\widehat{R}(K/k)$  の中心解であるとき,  $K/k$  に関する genus field  $L^* = L \cap K \cdot k_{ab}$  (但し  $k_{ab}$  は  $\mathbb{Q}_\ell$  の代数的閉包  $\mathbb{F}_{\ell^\infty}$  の最大アーベル拡大) をとれば,  $\text{Gal}(L/L^*)$  から  $\widehat{R}(K/k)$  上への自然な準同型写像が存在する. 実際,  $K$  上のアーベル拡大  $K \cdot k_{ab}$  と  $L$  とを, 類体論を用いて,  $K_A^\times$  の閉部分群と対応させれば,  $K^\# \in K_A^\times$  内の  $K^\times \cdot K_{\infty+}^\times$  の閉包とすらとき, それにはともあれ,  $N_{K/k}(k^\times) \cdot K^\# \subset N_{L/K}(L_A^\times) \cdot K^\# = N_{L/K}(L_A^\times) \cdot K^\times$  と対応する. 従って  $L^* = L \cap K \cdot k_{ab}$  は  $N_{K/k}(k^\times) \cdot N_{L/K}(L_A^\times) \cdot K^\times$  の対応し, 故に

$$\begin{aligned}\text{Gal}(L/L^*) &\simeq N_{K/k}^\perp(k^\times) \cdot N_{L/K}(L_A^\times) \cdot K^\times / N_{L/K}(L_A^\times) \cdot K^\times \\ &\simeq N_{K/k}^\perp(k^\times) / N_{K/k}^\perp(k^\times) \cap N_{L/K}(L_A^\times) \cdot K^\times\end{aligned}$$

であるが, 最後の剰余群は  $N_{K/k}$  による

$$k^\times \cap N_{K/k}(K_A^\times) / (k^\times \cap N_{L/K}(L_A^\times)) \cdot N_{K/k}(K^\times)$$

と上に準同型がつさえ. ところが,  $L$  が  $\widehat{R}(K/k)$  の中心解であることはない,  $k^\times \cap N_{L/K}(L_A^\times) \subset N_{K/k}(K^\times)$  である, て, 二の剰余群は  $\widehat{R}(K/k)$  に他ならない.

従って, 二の準同型  $\text{Gal}(L/L^*) \rightarrow \widehat{R}(K/k)$  の kernel に対応する  $L/L^*$  の中間体と  $L$  とをとりかえれば, 今度は,  $\text{Gal}(L/L^*) \cong \widehat{R}(K/k)$  となる型になる.

定理.  $\widehat{R}(K/k)$  の中心解  $L \in Gal(L/L^*)$  が自然に  $\widehat{R}(K/k)$  と同型ならずとするが存在する。

注意. 中心拡大の関連には、 $H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  が dual group となる  $g$ 、それを  $\mathcal{X}(g)$  とすると、 $K/k$  の中心拡大  $L \in Gal(L/L^*)$  が自然に  $\mathcal{X}(g)$  と同型ならずとするが存在し、更に、どんな中心拡大  $L$  に対して、 $\mathcal{X}(g)$  が  $Gal(L/L^*)$  上への準同型写像が定まる。よって特に  $\mathcal{X}(g)$  から  $\widehat{R}(K/k)$  上への準同型写像が定まる。これは丁度  $H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  への Scholz-Tate の定理における部分群  $\text{Ker } \Lambda_{K/k}$  の inclusion map に対する dual map である。 (Cf. Miyake [6].)

問題. この定理によるような  $\widehat{R}(K/k)$  の中心解  $L$  は、  
その genus field  $L^* = L \cap K \cdot k_{ab}$  をどの程度小さくできるのか?  
次数は? 分岐は? 分歧は?

注意. 同様な問題を、 $\widehat{R}(K/k)$  のかわりに  $\mathcal{X}(g)$  に関する考察もしておきたいが、それについては Miyake [7] および Miyake and Ormerod [8] を参照のこと。特に  $K/k$  が不分岐であれば  $\widehat{R}(K/k) \cong \mathcal{X}(g)$  であり、このときもし、各自然数  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $k^\times \cap k_A^{\times m} = k^{\times m}$  が成り立つれば、

$L^* = K$  となる  $L$  が存在する。

#### §4. Einbettungsproblem $\Leftrightarrow L \hookrightarrow \mathbb{P}^n \otimes k - \text{子}$

いま有理数体  $\mathbb{Q}$  の代数的閉包  $\bar{\mathbb{Q}}$  に対し,  $O_f(k) = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/k)$ ,  $O_f(K) = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K)$  とおく。後者は前者の正规部分群である,  $g_f = \text{Gal}(K/k) = O_f(k)/O_f(K)$  である。

いま,  $g_f$  の階数は有限で、一元群  $A$  の  $g_f$  による拡大  $G$  が存在するとき, 洋同型写像  $\varphi: O_f(k) \rightarrow G$  なる

$$\begin{array}{ccccccc} & & O_f(k) & & & & \\ & & \downarrow \varphi & & & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & g_f \longrightarrow 1 \end{array}$$

が可換四形図形を得られるときを見出せといふ。この Einbettungsproblem である。かかる  $\varphi$  が存在すれば,  $\varphi$  の kernel  $\in f_f$  である, これは当然  $O_f(k) \rightarrow g_f$  の kernel  $O_f(K)$  の包含である。従って  $\varphi$  は自然に  $O_f(K)$  と  $A$  の間に写す。 $\varphi = \varphi_f$  とおき,  $\varphi_f$  は  $\bar{\mathbb{Q}}/K$  の中間体を  $L$  とすれば,  $\varphi_f$  は  $k$  上がコア拡大である,  $\varphi_f$  は,  $\text{Gal}(L/k)$  および  $\text{Gal}(L/K)$  は, それぞれ  $G$  および  $A$  の部分群と同型である。

以下では中心拡大, 即ち  $g_f$  が  $A$  の自明な作用する場合を考

之3. 群拡大  $O_f(K) \rightarrow O_f(k) \rightarrow g \curvearrowright$  因子団  $\xi(\sigma, \tau)$ , ( $\sigma, \tau \in g$ ) を定めよとす.  $\varphi \circ \xi$  は  $H^2(g, A)$  の元とする類を定めよ.  $\eta = \varphi \circ \text{Hochschild-Serre} \circ \text{完全列}$

$$\rightarrow \text{Hom}(O_f(k), A) \rightarrow \text{Hom}(O_f(K), A) \xrightarrow{\text{ind}} H^2(g, A) \rightarrow H^2(O_f(k), A)$$

とす'. 拡大  $A \rightarrow G \rightarrow g$  に対する  $H^2(g, A)$  の類  $\bar{\eta}$  をとす' とす,  $\bar{\eta}$  は  $\varphi \circ \xi$  の類 ( $= -\tau(\varphi|_{O_f(k)})$ ) と一致する. 従, 2,  $\text{ind}(\bar{\eta}) = 0$  である. 逆に  $\bar{\eta} \in \text{Ker } \text{ind}$  ならば, ある準同型写像  $\varphi_0: O_f(K) \rightarrow A$  が  $O_f(k)$  不変なもんとして  $\bar{\eta} = -\tau(\varphi_0)$  となる. これが,  $\varphi_0 \circ \xi: O_f(k) \rightarrow G$  を構成して  $\varphi \circ \xi$  の類と  $\bar{\eta}$  と常に一致するが; これは矛盾. よって  $\bar{\eta} \in H^2(g, A)$  に対応する群拡大  $A \rightarrow G \rightarrow g$  に対する Einbettungsproblem の解と等しいわけである.

命題. 群拡大  $A \rightarrow G \rightarrow g$  に対する Einbettungsproblem の解をもつための必要十分条件は, その群拡大に対応する類  $\bar{\eta} \in H^2(g, A)$  が  $\text{Ker}(\text{ind}: H^2(g, A) \rightarrow H^2(O_f(k), A))$  に属すことをいうある.

この特の類  $\bar{\eta}$  の属す 2-cocycle  $\eta$  がとる形は選んで  $\eta \in A = \langle \eta(\sigma, \tau) | \sigma, \tau \in g \rangle$  となれば, 对応する準

同型写像  $\varphi: G_f(k) \rightarrow G$  やび  $\varphi_0: G_f(K) \rightarrow A$  は上への写像  
である。

さて中心拡大の関しては、 $\eta$  の Schur multiplier  $H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$   
の決定的な役割を果す。すなはち  $H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  の類  $\bar{\eta}$  と  $\eta$ 、  
 $\eta$  の位数を  $l(\bar{\eta})$  とする。一方で 2-cocycle  $\eta \in Z^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$   
の値が丁度  $\frac{1}{l(\bar{\eta})} \cdot \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  全体になれば  $\eta$  は  $H^2(g, \frac{1}{l(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z})$   
の類である。従って  $\eta$  の位数  $l(\bar{\eta})$  である。したがって  $\eta$  は  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$   
 $\rightarrow G \rightarrow g$  なる Einbettungsproblem の解  $L(\bar{\eta})/K/K$   
を得られるなら、 $G_{\text{ad}}(L/K)$  は  $\frac{1}{l(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  の部分群  $\frac{1}{l(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$   
の同型が写される。一方で  $\eta$  と  $\bar{\eta}$  では  $G/( \frac{1}{l(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z})$  は自  
明な中心拡大である T-ペル群  $(\frac{1}{l(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \times g$  と同一視する  
こと = 交換子群  $[G, G]$  中心  $\mathbb{Z}(G)$  とす  
る。

$$[G, G] \cap \mathbb{Z}(G) = \frac{1}{l(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

となる。したがって  $\mathbb{Z}(G)$  は  $\frac{1}{l(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  である。

$$G_{\text{ad}}(L(\bar{\eta})/L(\bar{\eta}) \cap K \cdot k_{\text{ab}}) \cong \frac{1}{l(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

を得られる。最後の群が自然に  $H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  の部分群  $\langle \bar{\eta} \rangle$   
の dual group に対応する。また  $\mathcal{X}(g)$  の dual group  $\mathcal{X} \in H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$   
と同一視して  $\bar{\eta}$  を  $\mathcal{X}(g)$  と  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  の写像と見る。

$$\text{Gal}(L(\bar{\eta})/L(\bar{\eta}) \cap K_{\text{ab}}) \cong \mathcal{V}(\eta)/\text{Ker } \bar{\eta} \cong \langle \bar{\eta} \rangle$$

自然な像の形は  $\gamma = \bar{\eta} \in H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$   
 の各々に付して解が存在する; すなはち  $\bar{\eta}$  の倍数  $m$  を選んで  $L(\bar{\eta})$   
 を作り、その合併体を  $L$  とすれば、 $K/k$  の中心拡大である。  
 $\Rightarrow \text{Gal}(L/L \cap K_{\text{ab}}) \cong \mathcal{V}(\eta)$  となるべきである。

二二 12 前節と最後の未解問題 12.1.2, 次を得る:

問題. 各  $\bar{\eta} \in H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  に対し、 $\bar{\eta}$  の倍数  $m$  で、対応する群拡大  $\frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow g$  への  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  の Embedding - problem の解をもつとするには  $m$  の最小値  $m = m(\bar{\eta})$  を決定せよ。

特に  $R(K/k)$  の中心解の限界をすれば、それは、部分群  
 $\text{Ker } \Lambda_{K/k}$  に属する  $\bar{\eta}$  について考察すればよいことになる。

### § 5. コホモロジー群 $H^2(O_f(k), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ の分析

自然数  $m$  を定め、 $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  に対して  $\pi(x) = \pi(m; x) = m \cdot x$   
 による準同型写像  $\pi: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  を定め。完全列

$$0 \rightarrow \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

より  $O_f(k)$  のコホモロジー群の完全列

$$\rightarrow \text{Hom}(O_f(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}(O_f(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^2(O_f(k), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(O_f(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

が得られる。最後の項は、よく知られており  $\cong 0$  である  
 すなはち (Cf. Serre [14], p227.)

定理. (Tate)  $H^2(O_f(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ .

さて  $O_f(k)$  の交換子群を  $[O_f(k), O_f(k)]$  と書けば

$$\text{Hom}(O_f(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}(O_f(k)/[O_f(k), O_f(k)], \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

“より、更に類似論より”

$$O_f(k)/[O_f(k), O_f(k)] \cong k_A^\times / k^\#$$

“ある。 $\chi = \pi = \pi(m; \cdot) : k_A^\times \rightarrow k_A^\times$  で  $\pi(x) = x^m$  ( $x \in k_A^\times$ ) とする。これは自然である。”

$$H^2(O_f(k), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \cong \text{Coker}(\pi^* : \text{Hom}(k_A^\times / k^\#, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(k_A^\times / k^\#, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$$

が得られる。更に完全列

$$1 \rightarrow \pi^*(k^\#) / k^\# \rightarrow k_A^\times / k^\# \xrightarrow{\pi} k_A^\times / k^\#$$

$\text{rk } \mathcal{L}^{\#} = \text{a Coker}(\pi^*)$  は  $\text{Hom}(\pi^*(k^{\#})/k^{\#}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  の  
型である。 $\mathcal{L}^{\#}$

$$X(k; m) = k^{\times} \cap k_A^{\times m} / k^{\times m}$$

と置けば、 $|X(k; m)| \leq 2$  であり、 $|X(k; m)| = 2$  となる条件  
を調べて明確にする、 $\mathcal{L}^{\#}$  (Artin-Tate [1], pp 93-98). ま  
たよく  $k_A^{\times} / k^{\times}$  は  $\mathcal{L}^{\#}$  の  $m$  次の部分群である (例題 [5], p 272),  $k^{\#} \cap k_A^{\times m}$   
 $= (k^{\times} \cap k_A^{\times m}) \cdot k^{\# m}$ ,  $k^{\times} \cap k^{\# m} = k^{\times m}$  より  $\{x \in k^{\#} \mid x^m = 1\}$   
 $\subset k^{\times} \cdot k_{\infty+}^{\times}$  が成り立つ。従って、 $\mathcal{L}^{\#}$  の完全列

$$1 \rightarrow \pi^*(1)/\pi^*(1) \cap k^{\times} \cdot k_{\infty+}^{\times} \rightarrow \pi^*(k^{\#})/k^{\#} \xrightarrow{\pi} X(k; m) \rightarrow 1$$

が得られる。見落し。 $\mathcal{L}^{\#}$  は dual groups である。  
 $0 \rightarrow \text{Hom}(X(k; m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\pi^*(k^{\#})/k^{\#}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$   
 $\rightarrow \text{Hom}(\pi^*(1)/\pi^*(1) \cap k^{\times} \cdot k_{\infty+}^{\times}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow 0$

を得る。各素点  $p$  に対して  $\pi_p = \pi_p(m; \cdot) : k_p^{\times} \rightarrow k_p^{\times}$  を  $\pi_p(x)$   
 $= x^m (x \in k_p^{\times})$  とする。従って  $\pi^*(1) = \prod_p \pi_p^*(1)$  を得る。  
 $\mathcal{L}^{\#}$  の  $\ell_p : k_p^{\times} \hookrightarrow k_A^{\times}$  は自然な埋め込みとし、 $\mathcal{L}^{\#}$  の dual  
 $\mathcal{L}^{\#}$  の  $\widehat{\ell}_p$  と呼ぶ。

$$\bigoplus_p \widehat{\ell}_p : \text{Hom}(\pi^*(1)/\pi^*(1) \cap k^{\times} \cdot k_{\infty+}^{\times}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_p \text{Hom}(\pi_p^*(1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

は injective である。 $\mathcal{L}^{\#}$  の完全列

$$0 \rightarrow \text{Hom}(X(k; m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(O_f(k), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_g \text{Hom}(\pi_g^{-1}(1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

が得られる。また上で  $H^2(O_f(k), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_g^{-1}(k^\#)/k^\#, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  と同型を得たときの条件を簡略化すれば、やはり Tate の定理が成り立つこと分かる。

$$H^2(O_f(k_g), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_g^{-1}(1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

が得られる。ここで  $O_f(k_g) = \text{Gal}(\bar{k}_g/k_g)$ ,  $\bar{k}_g$  は  $k_g$  の代数的閉包, である。従って次を得る:

命題. 代数的整数体  $k$  の  $p$ -進完備化  $k_g$  について,  $\mu_m(k_g) = \{\zeta \in k_g^\times \mid \zeta^m = 1\}$  とすると,  $H^2(O_f(k_g), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$  は  $\mu_m(k_g)$  の dual group と同型である。

定理. 上記の記号のもとで, 各自然数  $m$  について, 自然な

$$0 \rightarrow \text{Hom}(X(k; m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(O_f(k), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_g H^2(O_f(k_g), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$$

が完全列である。すなはち最終の準同型写像は、埋込み  $k \hookrightarrow k_g$  について  $\bar{k} \hookrightarrow \bar{k}_g$  である。従ってこの定理より  $O_f(k_g) \hookrightarrow O_f(k)$ , 即ち  $\sigma \in O_f(k_g)$  なら  $\sigma|_{\bar{k}} \in O_f(k)$  が成り立つ。従って  $\bar{k}$  から定まる  $\mathbb{Z}$  变換。

注意. 特に  $X(k; m) = 1$  のとき, 二点定理は Höchsmann [4] および Neukirch [9] など, 2 章から導かれたとある.

この用語をもとに、自然な埋込み  $j: \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \rightarrow \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  は、  
 より  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  で  $j^*: H^2(\mathcal{O}_j(k), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_j(k), \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$   
 は上記  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  の  $\text{Hom}(X(k; m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  上の  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  による部分群  $\text{Hom}(X(k; m), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  に射影される。上記の射影を  $\text{id}$  と呼ぶ。  
 また  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  の  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  に対する射影  $\overline{\text{id}}: X(k; 2m) \rightarrow X(k; m)$  は  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  による  
 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  の  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  に対する射影  $\text{id}: X(k; 2m) \rightarrow X(k; m)$  の逆像である。  
 これは  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  の  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  に対する射影  $\overline{\text{id}}: X(k; 2m) \rightarrow X(k; m)$  は  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  の  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  に対する射影  $\text{id}: X(k; 2m) \rightarrow X(k; m)$  の逆像である。

命題: 自然数埋込  $j: \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \rightarrow \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  は  $\mathbb{Z}$  の半同型である。 (1)

上に定理より  $\text{Hom}(X(k; m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  の像は  $\text{Ker } j^*$   
 に含まれる。

二、n 次可換圓形心得之大意：

可換圖式

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \Lambda_{K/k} & \longrightarrow & H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Lambda_{K/k}} & \bigoplus_p H^2(g(p), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
 & & i^* \uparrow & & & & i^* \uparrow \\
 & & H^2(g, \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Lambda_{K/k}^{(m)}} & \bigoplus_p H^2(g(p), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) & & \downarrow \oplus \lambda_p \\
 & & \lambda = \lambda_m \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(X(k; m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(O_j(k), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Lambda_m} & \bigoplus_p H^2(O_j(k_p), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \\
 & & \widehat{id} = 0 \downarrow & & j^* \downarrow & & j^* \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(X(k; 2m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(O_j(k), \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Lambda_{2m}} & \bigoplus_p H^2(O_j(k_p), \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}).
 \end{array}$$

## § 6. Steinke, Opolka の結果とその改良

上記可換圖式を § 12, 34 の最後にとり出した問題, 特に  $\mathbb{R}(K/k)$  の中で解く問題とする。また  $\bar{\eta} \in H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  とする、 $\bar{\eta}$  の位数  $\lambda(\bar{\eta})$  の倍数  $m$  をとる。加法的の要素  $\gamma$  が  $m \cdot \bar{\eta} = 0$  である。すなはち  $\gamma \in H^2(g, \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$  である。 $i^*(\bar{\eta}) = \bar{\eta}$  となる  $\bar{\eta}$  がある。今  $\bar{\eta}$  をうまく選べば  $\lambda(\bar{\eta}) = 0$  となるかどうかが問題である。

$\bar{\eta}$  を  $\gamma$  によって分析すれば  $\Lambda_m \circ \lambda = \oplus \lambda_p \circ \Lambda_{K/k}^{(m)}$  となり、局所化が可能となる。 $\bar{\eta}$  は  $\lambda(\bar{\eta}) = 0$  となる  $\bar{\eta}$  である。すなはち  $\lambda(\bar{\eta}) = 0$  となる  $\bar{\eta}$  は、 $|X(k; m)| \cdot \lambda(\bar{\eta}) = 0$  となる。したがって  $\lambda(\bar{\eta}) = 0$  である。今  $|X(k; m)| = 2$  の場合は、更に  $j^* \circ j \circ \gamma \circ j^* \circ \lambda(\bar{\eta}) = 0$

を得る = とします. すると  $m \geq 2m$  で置き換えればよ..

もし  $K/k$  の不完全拡大であれば (アーベル拡大ではなく  $\mathbb{Z}$ ), とある  $m$  に対して  $t \oplus \lambda_f = 0$  である = とおもひえんとする.

しかも = おこさ  $\widehat{R}(K/k) \cong \widehat{\text{Ker}} \Lambda_{K/k} = \widehat{H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$  である.

したがつて、従つて Miyake [7] の結果を改良され、次を得る.

定理 もし  $K/k$  の不完全拡大が「ロリ拡大」あれば、 $H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  ある  $\alpha \in \overline{\eta} \in \mathbb{Z} \cap m(\bar{\eta}) \mid 2 \cdot l(\bar{\eta})$  である. 特に  $k^\times \cap k_A^{\times l(\bar{\eta})} = k^{\times l(\bar{\eta})}$  であるは  $m(\bar{\eta}) = l(\bar{\eta})$  が成立する.

Opolka [12] の結果は、次のように改良される.

定理 有限次アーベル拡大  $K/k$  に対して、次が成り立つ.

(1)  $\exists \bar{\eta} \in \text{Ker} \Lambda_{K/k} \cap 2 \cdot H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  ありは  $m(\bar{\eta}) \mid 2 \cdot l(\bar{\eta})$ .

特に  $k^\times \cap k_A^{\times l(\bar{\eta})} = k^{\times l(\bar{\eta})}$  であるは  $m(\bar{\eta}) = l(\bar{\eta})$ .

(2) 従つて  $\bar{\eta} \in \text{Ker} \Lambda_{K/k}$  なら  $\exists \bar{\eta} \in \text{Ker} \Lambda_{K/k}$  が奇数である  $m(\bar{\eta}) = l(\bar{\eta})$ .

（2）の証明は Steinke の結果を用いた.

定理 (Steinke [16]) 奇数次アーベル拡大  $K/k$  に対して

は  $\mathcal{R}(K/k)$  の中心解  $L$  で  $L \cap K \cdot k_{ab} = K$  と等しいとする。  
たゞたゞ。

問題.  $K/k$  のアーベル拡大のとき、一般に  $\bar{\eta} \in \text{Ker } \Lambda_{K/k}$   
ならば  $m(\bar{\eta}) | 2 \cdot l(\bar{\eta})$  成り立つか？

### § 7. Yamazaki [18] による。

上記定理 a (1) を証明するにあたり、2次類  $\bar{\eta} \in H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$   
の2倍  $2\bar{\eta}$  が 2-cocycle  $\eta \in Z^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  の選択方の本質的である  
が、Yamazaki [18] の §2, pp 155–161 で  
復習し、Lemma 2.6 ～ 2.8 によればわかる。

すなはち  $g$  のアーベル群としての性質である。

さて、cocycle  $\eta \in Z^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  が、 $\sigma, \tau, \omega \in g$   
に対して

$$\begin{cases} \eta(\sigma, \tau\omega) = \eta(\sigma, \tau) + \eta(\sigma, \omega), \\ \eta(\sigma\tau, \omega) = \eta(\sigma, \omega) + \eta(\tau, \omega), \end{cases}$$

を満たすとき、 $\eta$  は pairing と呼ばれる； すな

$$\eta(\sigma, \tau) = \eta(\tau, \sigma) \quad (\sigma, \tau \in g)$$

を満たすとき、 $\eta$  は abelian 2-cocycle； 特に

$$\eta \in B^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \eta \text{ は abelian}$$

2-cocycle； また  $\eta$  の属する  $H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  の類を  $\bar{\eta}$  とする。

Σの位数は  $\ell(\bar{\eta})$  と表すと

$$\rho(\sigma, \tau) := \eta(\sigma, \tau) - \eta(\tau, \sigma) \quad (\sigma, \tau \in g)$$

とすれば  $\rho \in Z^2(g, \frac{1}{\ell(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z})$  となる; ただし  $\eta \in Z^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  なら  $\rho \in Z^2(g, \frac{1}{\ell(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z})$  は「 $\bar{\eta}$  の pairing」

$\eta_0$  となる, すなはち  $\sigma, \tau \in g$  に対して

$$\eta_0(\sigma, \tau) - \eta_0(\tau, \sigma) = \eta(\sigma, \tau) - \eta(\tau, \sigma)$$

となるが、これは  $\eta_0 = \eta - \bar{\eta}$  が abelian である、すなはち  $\eta_0$  は  $\bar{\eta}$  と組んで cocycle となる。且つ  $\bar{\eta}$  は「normalized」, i.e.  $\eta(1, \tau) = \eta(\sigma, 1) = 0$  ( $\sigma, \tau \in g$ ), となる。

Yamazaki [18], p160, Remark で  $\gamma$ ,  $\eta$  は lemma により

Lemma. Cocycle  $\eta \in Z^2(g, \frac{1}{m} \mathbb{Z}/\mathbb{Z})$  が pairing となると、  
すなはち  $2 \cdot \eta$  が abelian となるとき  $2 \cdot \eta \in B^2(g, \frac{2}{m} \mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ 。

### §8. 定理 (1) の証明

$K/R$  がアーベル群である、すなはち  $\eta$  がアーベル群の pairing となると、  
 $\bar{\eta} \in \text{Ker } \Lambda_{K/R} \cap 2 \cdot H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  となる。すなはち  $2$ -cocycle  
 $\xi \in Z^2(g, \frac{1}{\ell(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z})$  が pairing となる,  $\bar{\eta} = 2 \cdot \bar{\xi}$  となる  
ことである。したがって、すなはち  $\rho \in Z^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  で  $\bar{\eta}$

$= 2 \cdot \bar{p} \in \text{ker } \varphi$ ;  $\varphi \circ \psi = 0$ ,  $\Rightarrow \psi \in Z^2(g, \frac{1}{l(\bar{p})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z})$  a pairing  
 $\xi$  す, すなは  $\sigma, \tau \in g$  に て

$$\xi(\sigma, \tau) - \xi(\tau, \sigma) = \rho(\sigma, \tau) - \rho(\tau, \sigma)$$

$\Rightarrow \xi(\sigma, \tau) - \xi(\tau, \sigma) = 0 \Leftrightarrow \xi - \bar{\rho} \in B^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  すなは

す;  $l(\bar{\xi}) = l(\bar{\rho})$  すなは.  $\bar{\eta}$  は属す cocycle  $\eta$   
 $\xi$  すなは

$$\begin{aligned}\eta(\sigma, \tau) - \eta(\tau, \sigma) &= 2\rho(\sigma, \tau) - 2\rho(\tau, \sigma) \\ &= 2\xi(\sigma, \tau) - 2\xi(\tau, \sigma)\end{aligned}$$

すなは  $\sigma, \tau \in g$  に て 成り立つ, すなは,  $\xi = 2 \cdot \bar{\eta} - 2 \cdot \bar{\xi}$   
 $\in B^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  は属す; すなは  $\bar{\eta} = 2 \cdot \bar{\xi}$ .  $\xi = 2 \cdot \eta =$   
 $2\xi$  すなは すなは.  $\Rightarrow \xi \in Z^2(g, \frac{1}{l(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z})$  a pairing  
 $\in B^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ .  $m = l(\bar{\eta})$  に て  $\xi$  は可換四式 すなは.  
 $\Rightarrow \Lambda_m \circ \lambda(\bar{\eta}) \in \text{ker } \varphi$ .  $\Rightarrow \eta \in \text{ker } \varphi$  すなは  
 $\Rightarrow \eta \in \text{ker } \varphi$  すなは  $\eta_f$  は属す,  $Z^2(g(f), \frac{1}{m} \mathbb{Z}/\mathbb{Z})$  a pairing す  
 $\Rightarrow \eta_f = 2 \cdot \xi_f$  すなは.  $\Rightarrow \bar{\eta}_f \in \text{Ker } \Lambda_{K/K}$  す  
 $\Rightarrow \eta_f \in H^2(g(f), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  すなは  $\bar{\eta}_f = 0$ , i.e.  $\eta_f \in B^2(g(f), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ,  
 $\Rightarrow \eta_f$  はabelian すなは, 前の lemma すなは

$$\eta_f = 2\xi_f \in B^2(g(f), \frac{2}{l(\bar{\xi})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z})$$

すなは

$$\frac{2}{l(\bar{\xi})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \frac{1}{l(\bar{\eta})} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \frac{1}{m} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

であることは見易い。故に各  $\eta_i$  は  $\widehat{\eta}_j = 0$  となる。すなはち、 $A_m \circ \lambda(\widehat{\eta}) = 0$  を得る。以下は  $\mathbb{F}_\ell$  の不分岐拡大の場合の用いた論議とくわしく述べよう。

### 3.9. 最大不分岐拡大

この節では  $K/k$  が有限次不分岐ガロフ拡大であるとし、 $C(K/k)$  が  $K/k$  の最大不分岐拡大であるとする。また  $\mathcal{O}^\times(k)$  が  $k$  の单数群を、 $\widehat{k}$  が  $k$  の絶対類体上である類体群を、(3) では Furuta [2] で見られるように、次が得られる：

定理 上記の仮定と記号のもとで、次の完全列が成り立つ。

$$1 \rightarrow \mathcal{O}^\times(k)/\mathcal{O}^\times(k) \cap N_{K/k}(K^\times) \rightarrow \widehat{K}(K/k) \rightarrow \text{Gal}(C(K/k)/K \cdot \widehat{k}) \rightarrow 1.$$

ここで  $C(K/k)$  が  $K/k$  に関する genus field は  $K \cdot \widehat{k}$  である。

問題  $K/k$  の不分岐アーベル拡大とは

$$[\mathcal{O}^\times(k) : \mathcal{O}^\times(k) \cap N_{K/k}(K^\times)] = 1$$

が必ず成り立つことは?

$t \in K/k$  の分歧巡回群大ならず, Hasse norm theorem  
 により答は Yes である. 一方  $t \in k^\times \cap k_A^{\times [K:k]} = k^{\times [K:k]}$   
 であるないか;  $K/k$  の中心核  $L$  で  $L \cap K \cdot k_{ab} = K$  である  
 が, 従,  $\sim \text{Gal}(L/K) \cong R(K/k)$  となる  $k$  の倍数でないか.  
 だから  $L$  で,  $L \cdot \widehat{k} \supset C(K/k)$  となる  $k$  の倍数でないか?  
 $t \in [\mathcal{O}^\times(k) : \mathcal{O}^\times(k) \cap N_{K/k}(K^\times)] \neq 1$  ならば,  $K/k$  の  
 中心核大を考慮すると  $C(K/k)$  では十分大さくはないか  
 か. そういふとしない, 上のように  $L$  の分歧が極小である  
 もう一つ, その分歧と  $k$  の單数の剰余群  
 $\mathcal{O}^\times(k) / \mathcal{O}^\times(k) \cap N_{K/k}(K^\times)$   
 との関係はいかなる  $k$  か?

### 文献

- [ 1 ] E.Artin and J.Tate, Class Field Theory, Benjamin(1967).
- [ 2 ] Y.Furuta, On nilpotent factors of congruent ideal class groups of Galois extensions, Nagoya Math. J.62(1976),13-28.
- [ 3 ] H.Hasse, Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol, Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.H1(1931),64-69 = Math. Abhand. Bd.1, 155-160.
- [ 4 ] K.Hoechsmann, Zum Einbettungsproblem, J. reine angew. Math. 229(1968),81-106.
- [ 5 ] K.Miyake, Models of certain automorphic function fields, Acta Math.126(1971),245-307.
- [ 6 ] —————, Central extensions and Schur's multiplicators of Galois groups, Nagoya Math. J.90(1983),137-144.

- [ 7 ] ———, On central extensions of a Galois extension of algebraic number fields, Nagoya Math. J. 93(1984), 133-148.
- [ 8 ] K.Miyake and N.Ormerod, Abundant central extensions of non-trivial genera, Nagoya Math. J. 95(1984), 51-62.
- [ 9 ] J.Neukirch, Über das Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie, Invent. math. 21(1973), 59-116.
- [ 10 ] H.Opolka, Zur Auflösung zahlentheoretischer Knoten, Math. Z. 173(1980), 95-103.
- [ 11 ] ———, Some remarks on the Hasse norm theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 84(1982), 464-466.
- [ 12 ] ———, Normenreste in relative abelschen Zahlkörpererweiterungen und symplektischen Paarungen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 54(1984), 1-4.
- [ 13 ] A.Scholz, Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nichtabelscher Körpererweiterungen I, II : I, J. reine angew. Math. 175(1936), 100-107; II, 182(1940), 217-234.
- [ 14 ] J.-P.Serre, Modular forms of weight one and Galois representations, in A.Fröhlich(ed.), Algebraic Number Field, Acad. Press (1977), 193-268.
- [ 15 ] S.Shirai, On the central class field mod  $\pi$  of Galois extensions of an algebraic number field, Nagoya Math. J. 71(1978), 61-85.
- [ 16 ] G.Steinke, Über Auflösungen zahlentheoretischer Knoten, Schriftenreihe des Math. Inst. Univ. Münster, Ser.2,25, Univ. Münster, Math. Inst., Münster(1983).
- [ 17 ] J.Tate, Global class field theory, in J.W.S.Cassels and A. Fröhlich(ed.), Algebraic Number Theory, Acad. Press(1967), 162-203.
- [ 18 ] K.Yamazaki, On projective representations and ring extensions of finite groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.IA Math. 10(1964), 147-195.