

Neukirch の bijection

東京農工大 小松 格一 (Keiichi Komatsu)

\mathbb{Q} を有理数体, $\bar{\mathbb{Q}}$ を \mathbb{Q} の代数的閉包, \mathfrak{A} を $\bar{\mathbb{Q}}$ の部分体
 $G_{\mathfrak{A}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathfrak{A})$ を \mathfrak{A} の絶対ガロア群とする。Neukirch は
[] において次の定理を証明した。

定理 1. \mathfrak{A} と \mathfrak{A}' を $\bar{\mathbb{Q}}$ の有限次ガロア拡大とする。このとき $G_{\mathfrak{A}}$ と $G_{\mathfrak{A}'}$ が位相群として同型ならば $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ となる。

上の定理は内田 [] により次のように一般化された。

定理 2. \mathfrak{A} と \mathfrak{A}' が $\bar{\mathbb{Q}}$ の有限次拡大とする。 $G_{\mathfrak{A}}$ と $G_{\mathfrak{A}'}$ が位相群として同型ならば \mathfrak{A} と \mathfrak{A}' は同型になる。

さて、定理 1 の証明のためには次の定理が非常に重要な役割をえらした。

定理 A (Neukirch []) F を $\bar{\mathbb{Q}}$ の部分体, P を素数, \mathbb{Q}_P を P 進体とする。このとき次の (1) と (2) は同値である。

(1) \mathbb{Q}_P の有限次拡大して G_L と G_F が位相群として同型になるものがある。

(2) P の上にある F の付値 v で次の性質をもつものが同値なものを除いてただ1つある。

(a) v の $\bar{\mathbb{Q}}$ への延長はただ1つである。

(b) v は discrete である。

(c) v の residue field は有限である。

(2) \Rightarrow (1) は F_v/\mathbb{Q}_P が有限次といふことと $F_v\bar{\mathbb{Q}}=\bar{\mathbb{Q}}$ および $F_v\bar{\mathbb{Q}}=F$ なることから明らかである。ただし F_v は F の v についての完備化である。

(1) \Rightarrow (2) について。 $B_F = H^2(G_F, \bar{\mathbb{Q}}^\times)$ を F のブーラウ - 群とする。このとき $0 \rightarrow B_F \rightarrow \prod_w B_{F_w}$ (exact) が成立する。 w は F のすべての素点をわたる。さて (1) より $ed_p(G_F) = 2$ となり、従って B_F の p -torsion part が 0 でないことがわかる。従って上の完全系列から B_{F_w} の p -torsion part が 0 でない v の存在がわかる。この v が (2) の条件を満たす v である。

さて、 \mathbb{A} を \mathbb{Q} の有限次拡大とせよ。 $S_{\mathbb{A}}$ を \mathbb{A} のすべての素イデアルの集合とする。 $G_{\mathbb{A}}$ から $G_{\mathbb{A}'}$ の上への位相群としての同型写像 φ があるとき、Neukirchは次のようにして、 $S_{\mathbb{A}}$ から $S_{\mathbb{A}'}$ へのbijectionを構成した。 \wp を $S_{\mathbb{A}}$ の元として、素数 P の上にあるとする。 \wp に対応する \mathbb{A} の付値を v とする。 v の \mathbb{A} への延長を \bar{v} とする。 \bar{v} の \mathbb{A}/\mathbb{Q} での分解群 $D_{\mathbb{A}}(\bar{v})$ を $D_{\mathbb{A}}(\bar{v}) = \{\wp \in G_{\mathbb{A}} \mid \bar{v}(x^\wp) = \bar{v}(x) \quad \forall x \in \mathbb{A}\}$ で定義する。定理Aをもちいて、 P の上にある \mathbb{A} のdiscreteな付値 \bar{v}' で $\bar{v} \in D_{\mathbb{A}}(\bar{v}') = D_{\mathbb{A}'}(\bar{v}')$ となるものがあることがわかる。 \bar{v}' の \mathbb{A}' への制限に対応する \mathbb{A} の素イデアルを \wp' とする。ここで、 $S_{\mathbb{A}}$ から $S_{\mathbb{A}'}$ への写像 φ を $\varphi(\wp) = \wp'$ によって定めれば、 φ はwell-definedであり、bijectiveになることわかる。この φ をわれわれはNeukirchのbijectionとよぶ。

$\wp \in S_{\mathbb{A}}$ に対して、 $e_{\mathbb{A}}(\wp)$ を \mathbb{A}/\mathbb{Q} での \wp の分歧指数、 $f_{\mathbb{A}}(\wp)$ を \mathbb{A}/\mathbb{Q} での \wp の相対次数とする。このときNeukirchのbijection φ は次の性質をもつ。

(1) $\wp \in S_{\mathbb{A}}$ とする。 P を素数とする。

$$\wp | P \iff \varphi(\wp) | P$$

$$(2) e_{\mathbb{A}}(\wp) = e_{\mathbb{A}'}(\varphi(\wp)) \quad \forall \wp \in S_{\mathbb{A}}$$

$$(3) f_{\mathbb{A}}(\wp) = f_{\mathbb{A}'}(\varphi(\wp)) \quad \forall \wp \in S_{\mathbb{A}}$$

$G_{\mathbb{A}} \cong G_{\mathbb{A}'}$ のとき (3) をもちいれば定理1はすぐにならる。

わかる。即ち \mathfrak{f}_L と $\mathfrak{f}_{L'}$ を \mathbb{Q} 上の有限次がロア拡大とすれば、 \mathfrak{f}_L , $\mathfrak{f}_{L'}$ で完全分解する素数が同じになるので $\mathfrak{f}_L = \mathfrak{f}_{L'}$ となる。さて $\zeta_{\mathfrak{f}_L}$ を \mathfrak{f}_L の zeta- 関数とするとき、 $G_{\mathfrak{f}_L} \xrightarrow{\sim} G_{\mathfrak{f}_{L'}}$ ならば (3) より $\zeta_{\mathfrak{f}_L} = \zeta_{\mathfrak{f}_{L'}}$ なることもわかる。

さてわれわれは次のような場合に Neukirch の bijection を構成し、代数体の性質をしらべてみたい。 ℓ を素数とし、 $\mathfrak{f}_L(\ell)$ を \mathfrak{f}_L の最大 ℓ - 拡大とする。即ち \mathfrak{f}_L を \mathbb{Q} の有限次拡大とし、 $G(\mathfrak{f}_L(\ell)/\mathfrak{f}_L) \cong G(\mathfrak{f}_{L'}(\ell)/\mathfrak{f}_{L'})$ のときに上記のことをしてみる。このとき次が成立する。

補題 1. (広中 [・]) ℓ を奇素数とする。 \mathfrak{f}_L を \mathbb{Q} の有限次拡大で 1 の原始 ℓ 乗根 ω_L を含むとする。 F を $\mathfrak{f}_L(\ell)$ と \mathfrak{f}_L の中間体とする。このとき次の(1) と (2) は同値である。

(1) \mathbb{Q}_ℓ の有限次拡大で 1 の原始 ℓ 乗根を含み。
 $G(\mathfrak{f}_L(\ell)/F) \times G(L(\ell)/L)$ が位相群として同型になるものがある。

(2) \mathfrak{f}_L の上にある F の付値 v が次の性質をみたすものが同値なものと除いてただ 1 つある。

(a) v の $\mathfrak{f}_L(\ell)$ への延長はただ 1 つである。

(b) v は discrete である。

(c) v の residue field は有限である。

さらに次も成立する。

補題2. ℓ を奇素数とする。たとえ \mathbb{Q} の有限次拡大で ω_ℓ を含むものとする。 F を $\mathbb{Q}(\ell)$ と \mathbb{Q} の中間体とする。このとき次の(1)と(2)は同値である。

(1) ℓ と異なる素数 ℓ' との原始 ℓ 乗根を含む $\mathbb{Q}_{\ell'}$ の有限次拡大 L で $G(L(\ell)/L)$ と $G(\mathbb{Q}(\ell)/F)$ が位相群として同型になるものがある。

(2) ℓ の上にない F の付値 v で次の性質をもつ付値 v が同値なものを除いてたた1つある。

(a) v の $\mathbb{Q}(\ell)$ への延長はたた1つである。

(b) v は discrete である。

(c) v の residue field は有限である。

さて、 ℓ を奇素数とし、たとえ \mathbb{Q} の有限次拡大体で ℓ の原始 ℓ 乗根 ω_ℓ を含むものとする。 $G(\mathbb{Q}(\ell)/\mathbb{Q})$ と $G(\mathbb{Q}(\ell')/\mathbb{Q})$ が位相群として同型ならば、補題1と補題2をもちいて $S_{\mathbb{Q}}$ から $S_{\mathbb{Q}'}$ への bijection で次の性質をもつものを作ってくれる。

(1) $\exists \in S_{\mathbb{Q}}$

$$\exists | \ell \iff \text{重}(\exists) | \ell$$

$$(2) \exists \in S_{\mathbb{Q}} \Rightarrow e_{\mathbb{Q}}(\exists) f_{\mathbb{Q}}(\exists) = e_{\mathbb{Q}'}(\text{重}(\exists)) f_{\mathbb{Q}'}(\text{重}(\exists))$$

この bijection をもちいて次を証明することになります。

命題1 (小松 []) た, ℓ' を ℓ の有限次拡大とする。素数 ℓ について ω_ℓ を原始 ℓ -乗根とする。有限個の素数 ℓ を除いて $G(K(\omega_\ell)(\ell)/K(\omega_\ell))$ と $G(K'(\omega_\ell)(\ell)/K'(\omega_\ell))$ が位相群として同型ならば $\zeta_\ell = \zeta_{\ell'}$ となる。

系 命題1と同じ仮定でさらに、た, ℓ が ℓ 上が ℓ の拡大ならば $\zeta_\ell = \zeta_{\ell'}$ となる。

命題2. ℓ を奇素数とする。 n を自然数とし、 ω_ℓ^n を原始 ℓ^n -乗根とする。 K, K' を \mathbb{Q} の有限次拡大で ω_ℓ^n を含むものとする。 $G(K(\ell)/K)$ から $G(K'(\ell)/K')$ の上への位相群としての同型写像入があるとする。このとき、

$$\omega_{\ell^n}^g = \omega_{\ell^n}^{g(\ell)} \quad \forall g \in G(K(\ell)/K) \\ \forall n; \text{自然数}$$

系 命題2と同じ仮定が成立しているとする。

K_n, K'_n を K, K' の cyclotomic \mathbb{Z}_ℓ -拡大とする。 Ω, Ω' を ℓ の外で不分岐な K_n, K'_n の最大 Abel ℓ -拡大とする。このとき $\pi(G(K(\ell)/K_n)) = G(K'(\ell)/K'_n)$

$$\chi(G(K(\ell)/\mathbb{Q})) = G(K(\ell)/\mathbb{Q}) \times \mathbb{Z}/3.$$

References

- [1] Hironaka-kobayashi Y.: On the Galois groups of the maximal p -extensions of algebraic number fields.
Natural Sci. Rep. Ochanomizu, 27, 99-105, (1976)
- [2] Komatsu K.: The maximal p -extensions and zeta-functions of algebraic number fields, to appear.
- [3] Neukirch J.: Kennzeichnung der p -adischen und der endlichen algebraischen Zahlkörper. Inv. Math., 6, 296 - 314, (1969)
- [4] Uchida K.: Isomorphisms of Galois groups, J. Math. Soc. Japan, 28, 617 - 620 (1976)