

BRONSTEIN 作用素と双曲型初期値問題

防衛大 打越 敏祐

KEISUKE UCHIKOSHI

佐藤超函数の構造において、任意の双曲型初期値問題の解が存在することはよく知られている (Bony-Schapira [1])。

しかし、この場合、解の存在は正則函数の解析接続の結果を用いて抽象的に示されている。この論説では、Bronstein [2] の論法により、超函数解の定義函数が、具体的に構成されることを説明する。

$x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (or $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$) , $D = \partial/\partial x$
とする。解析的係数をもつ偏微分作用素

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

において、 $a_{(m, 0, \dots, 0)} = 1$ とし、 $P(x, \xi)$ は双曲型とする。

$$\begin{aligned} P_m(x, \xi) &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha = 0, \quad (x, \xi') \in \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\mathbb{R}^{n-1} \\ \Rightarrow \quad \xi_1 &\in \sqrt{-1}\mathbb{R}. \end{aligned}$$

$P_m(x, \zeta) = 0$ の根を $\zeta_1 = \lambda_1(x, \zeta'), \dots, \lambda_m(x, \zeta')$ とし、
二の重複度は高々 r であるとする。各 $\lambda_j(x, \zeta')$ は (x, ζ')
の函数である。以下 $r \geq 2$ とする ($r=1$ のときは易しい)。

さて、local Bochner の定理により、

$(x, \zeta') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-1}$, $|x| \ll 1$, のとき

$$|\operatorname{Re} \lambda_j(x, \zeta')| \leq \frac{C}{2} (|\operatorname{Im} x| \cdot |\operatorname{Im} \zeta'| + |\operatorname{Re} \zeta'|)$$

となる。従って、 a, C を十分大とし、 $1 < s < 2$, $s \leq \frac{r}{r-1}$ なら、

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \zeta_1 > C(|\operatorname{Im} x| \cdot |\operatorname{Im} \zeta'| + |\operatorname{Re} \zeta'| + C|\operatorname{Im} \zeta'|^{1-s} + C) \\ a|\operatorname{Re} x_j| < 1, a|\operatorname{Im} x_j| < 1, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

のとき、

$$|P_m(x, \zeta)| = \prod_{j=1}^m |\zeta_1 - \lambda_j| \geq \prod_{j=1}^m (\operatorname{Re} \zeta_1 - \lambda_j) \neq 0.$$

低階項まで含めて考えても、(1) $\Rightarrow P(x, \zeta) \neq 0$ となる。

そこで、(1) の領域において、形的的上、

$$E_0(x, \zeta) = \frac{1}{P(x, \zeta)}$$

$$E_j(x, \zeta) = -\frac{1}{P(x, \zeta)} \sum_{\substack{\alpha+\alpha'=j \\ \alpha \neq j}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha P(x, \zeta) \partial_x^\alpha E_\alpha(x, \zeta)$$

とおく。このとき、次のことが成立する：

命題1. 領域(I)において、

$$|\partial_x^\beta E_j(x, \zeta)| \leq C^{\frac{m}{2} + |\beta| + 1} (\frac{2}{3} + \frac{2}{3} |\beta|)^{|\beta|} (1 + |\zeta|)^{-\frac{m}{2} - \frac{2-5}{3} |\beta| + \frac{2-5}{3} |\beta|}$$

以下、二のシンボルのもつ意味を説明するが、簡単のため、
 $n = 2$ の場合に限定する。このとき、 $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ を、

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_+ \cup \Omega_-$$

$$\begin{aligned} \Omega_0 = \{x \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}; & \quad a_0 |x_1| < 1, \\ & \quad a_1 |Re x_2| < 1, \quad a_1 |Im x_2| < 1, \\ & \quad Im x_2 \neq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_\pm = \{x \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}; & \quad a_0 |x_1| < 1, \\ & \quad a_1 |Re x_2| < 1, \quad a_1 |Im x_2| < 1, \\ & \quad \pm Re x_2 > a_1 (x_1 - R_0) + R\} \end{aligned}$$

とする。ここで、 $a_0 \gg a \gg 1$, $1 \gg R, R_0 > 0$ とする。

$x_1 = \text{const.} > 0$ における

Ω の断面図を右に示す。

この図から分かるよって、

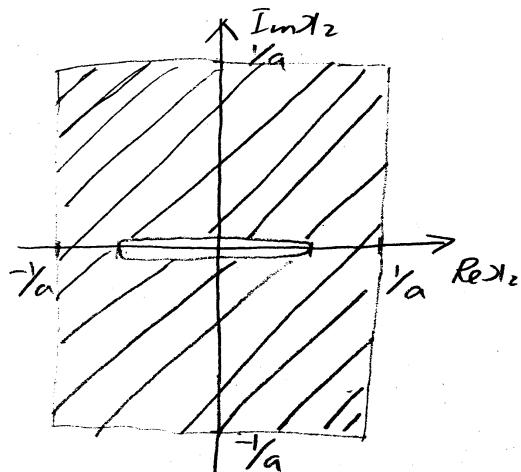
Ω 上の函数で、 x_2 について

正則なものは、(x_2 について

境界値をとれば)

$$|Re x_2| < a_1 (x_1 - R_0) + R$$

といふ領域上の超函数を与える。



さて、 γ をある決まりた正数として、函数空間 $\mathcal{O}^{s,q}(\Omega)$ ($s > 1$, $q \in \mathbb{Z}_+$) を、次のように定めよ:

$$f(x) \in \mathcal{O}^{s,q}(\Omega)$$

\Leftrightarrow ① $f(x)$ は Ω 上の函数で、 x_1 について C^∞ 級。

② $D_{x_1}^{\alpha} f(x)$, $0 \leq \alpha \leq q$, は x_1 について正則。

③ $f(x) = 0 \quad \text{if } x_1 \leq R_0.$

④ $|Re x_2| < a(x_1 - R_0) + R$ のとき,

$$|D_{x_1}^{\alpha} f(x)| \leq \exists C \exp |f(x)|^{\frac{s}{s-1}} |Im x_2|^{\frac{-1}{s-1}} \quad (0 \leq \alpha \leq q).$$

④' $|Re x_2| > a(x_1 - R_0) + R$ のとき,

$$|D_{x_1}^{\alpha} f(x)| \leq \exists C, \quad 0 \leq \alpha \leq q.$$

$f(x)$ は、 $x_1 \geq R_0$ に沿つても ultradistribution の空間である、あえて、次の定理を証明する:

定理2. a_0 を十分大きさにしておきと、 $\forall f(x) \in \mathcal{O}^{s,q}(\Omega)$ に対して、 $\exists u(x) \in \mathcal{O}^{s,q}(\Omega)$ が存在して、 $P[u] = [f]$ をみたす ($[u]$ は x_2 について u の境界値をとった超函数)。

次に、 $\phi(x) \in \mathcal{O}^{s,q}(\Omega)$ ($q \in \mathbb{Z}_+$) の Fourier 変換を考えよ、 $\psi(x_1) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ が、 $0 \leq \psi(x_1) \leq 1$,

$$\psi(x_1) = \begin{cases} 1 & |x_1| \leq 1/4a_0 \\ 0 & |x_1| \geq 1/2a_0 \end{cases}$$

をみたすとき、

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{\lambda})^n} \int_{\Gamma} e^{-x_1 \zeta_1} \varphi(x_1) f(x) dx$$

とする、但し、

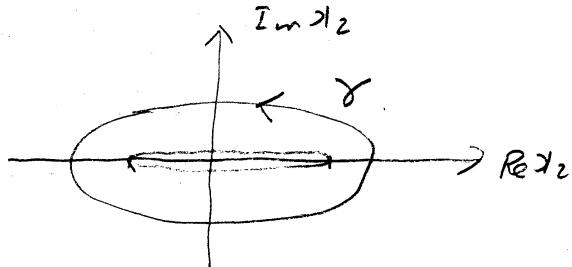
$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}; |x_1| \leqslant 1/a_0, x_2 \in \gamma\}$$

とする (γ は右図の通り)。

このとき、 $\hat{f}(\zeta)$ は

$$U = \{z \in \mathbb{C}^2;$$

$$Re z_1 > a_0 |Re z_2| + \left(\frac{\ell}{s-1}\right)^{\frac{s-1}{s}} s |Im z_2|^{\frac{1}{s}}\}$$



において正則で、 U 上

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq a_0^{2s} \exp \left(\ell a_0^{\frac{1}{s-1}} a^{\frac{1}{s-1}} \right)$$

をみたす。

さて、一般に、 $Q(x, \zeta)$ が

$$V = q(x, \zeta) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2;$$

$$a |Re z_j| < 2, a |Im z_j| < 2, 1 \leq j \leq n,$$

$$Re z_1 > a_1 |Re z_2| + a_1 |Im z_1| \cdot |Im z_2|$$

$$+ \ell_1^2 (Im z_2)^{\frac{1}{s}} + a_1^2$$

において正則で、 V 上 $|Q(x, \zeta)| < C$ をみたすとする。

ここで、 $a_1, \ell_1 \gg 1, a_1^2 \ll a, \ell_1^2 \ll \ell^{(s-1)/s}$ とする。

さて、このような $Q(x, \xi)$ に対して、「Borestein 作用素」
 $Q(x, D)$ を次式で定める：

$$Q(x, D) f(x) = \int_{\Delta} e^{x\cdot\xi} Q(x, \xi) \hat{f}(\xi).$$

ここで、 $f \in \mathcal{O}^{s,q}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ とし、

$$\Delta = \{ \xi \in \mathbb{C} \times \sqrt{\mathbb{R}}_+ ;$$

$$\operatorname{Im} \xi_1 \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{Re} \xi_1 = \max \left(a_1 |\operatorname{Im} \xi_1| \cdot |\operatorname{Im} \xi_2| + b_1^2 |\operatorname{Im} \xi_2|^2, \left(\frac{b_1}{s-1} \right)^{\frac{s-1}{s}} \cdot |\operatorname{Im} \xi_2|^s \right),$$

とする。

このとき、次の二ことがわかる：

命題3、① $f(x) \in \mathcal{O}^{s,q}(\Omega) \Rightarrow Q(x, D)f(x)$ は
 Ω 上の函数で、 x' について正則り。

② $Q(x, \xi)$ の上

$$|Q(x, \xi)| \leq C |\xi_1|^{-sn-1}$$

を満たせば、 $Q(x, D)f(x) \in \mathcal{O}^{s,q}(\Omega)$ となる。

$$\|Qf(x)\|_{\mathcal{O}^{s,q}(\Omega)}$$

$$\leq 2(2a_0^2)^q C \exp \left(2a_0^{\frac{s}{s-1}} a^{\frac{1}{s-1}} + 1 \right) \|f(x)\|_{\mathcal{O}^{s,q}(\Omega)}$$

③ $Q(x, \beta) \equiv 1$ のとき、対応する作用素を $I(x, D) f(x)$ とすると、 $I(x, D) f(x)$ と $f(x)$ は、 α_2 について境界値をともに同じ超函数になる(=のとき、 $I(x, D) f(x) \equiv f(x)$) modulo O-class(書くことにする)。

以上の議論により、冒頭の形式的な計算の意味がわかる。
 $N \in \mathbb{Z}^+$ を十分大として、

$$E(x, \beta) = \sum_{j=0}^N E_j(x, \beta)$$

とする。 $E(x, \beta)$ は Bronstein 作用素 $E(x, D)$ を与える。

$$P(x, D) E(x, D) = I(x, D) - S_N(x, D)$$

となる。ここで、 a_0 と N を十分大きくとると、

$$|S_N(x, \beta)| < \varepsilon |\beta|^{-s_0-1} \quad (\varepsilon: \text{任意})$$

とできる。従って、 $S_N(x, D)$ のノルムはいくらでも小さくとれる。

次に定理2を証明す�: $\forall f(x) \in \mathcal{O}^{S, \tilde{f}}(\mathbb{R})$ に対し、

$$u(x) = E(D, D) \sum_{j=0}^{\infty} (S_N(x, D))^j f(x)$$

とすると、

$$\begin{aligned}
 P u(x) &= P E \sum_{j=0}^{\infty} S^j f(x) \\
 &= (I - S) \sum_{j=0}^{\infty} S^j f(x) \\
 &\equiv f(x) \quad \text{modulo } O(\text{class})
 \end{aligned}$$

$$\therefore P[u(x)] = [f(x)] \quad Q.E.D.$$

この定理は、未来方向に台をもつ超函数の空間で、 $P(u,D)$ が可解になることを示している。この定理から、標準的議論により、双曲型初期値問題を解くことができる。

文献

- [1] Bony-Schapira, Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, Lecture Notes in Math. 287, Springer, 82-98.
- [2] Bronstein, The Cauchy Problem for hyperbolic operators with characteristic of variable multiplicity, Trudy Moskov. Mat. Obšč., 41(1980), 83-99.

なお、本稿のより詳しい解説は、数理研講究録、578

短期共同研究「Infinite analysis」

にある。