

Super Grassmann hierarchy & super KP hierarchy

横浜市大・文理 土野喜三雄
(Kimio Ueno)
広島大・理 山田裕史
(Hirofumi Yamada)

0. Introduction

佐藤幹夫氏により導入された Kadomtsev - Petviashvili (KP) hierarchy は、無限次元 Grassmann 多様体上の力学系として自然に解釈された ([0, 1])。その線型化方程式（佐藤方程式）は線型常微分作用素の積への分解という素朴な問題、“時間発展”と記述する t の $t \rightarrow t + 1$ としえることだけであり。この framework は従つ我々は KP hierarchy の超対称化 (supersymmetric extension) を考へて行うこととした。

そもそも超対称化とは物理学の統一場理論に端を発する概念である。通常の時空座標の他に Grassmann 数とも座標として許し、field (函数) も Grassmann 代数値として、Bose 場, Fermi 場と同時に記述しようとする formalism である。子午數字においても、70年代から主にソ連の人々により、リ-

超代数、超多様体などが研究されてきている。この辺で微分方程式の可積分系の超対称化を考えるとも無駄ではない。

1. Grassmann hierarchy & KP hierarchy

本節は通常の KP hierarchy の復習にあたる。これは K が一変数山数体、 $\partial_x: X \rightarrow X$ が derivation, C が定数体とする。 $\mathcal{D} = \sum_{n \geq 0} K \partial_x^n$ を微分作用素環と呼ぶ。積は Leibniz rule で入る。 $\mathcal{D}(N)^{\text{monic}} = \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \partial_x^{N-n}; a_0 = 1 \right\}$ と定める。次の問題を考えよう。 $P \in \mathcal{D}(N)^{\text{monic}}$ が K 上可解である。すなはち線型微分方程式 $P\phi = 0$ が K 内に N 個の (C 上) 一意独立な解を持つとする。 $N = m+n \leq l$ とする。 $W = \sum_{j=0}^m w_j \partial_x^{m-j} \in \mathcal{D}(m)^{\text{monic}}$ とする

$$P = ZW \quad (1)$$

と微分作用素の積に分解せよ。この問題は \mathcal{D} -加群 $M = \mathcal{D}/\mathcal{D}P$ の商 \mathcal{D} -加群 $M' = \mathcal{D}/\mathcal{D}W$ が決定され、この問題と同等である。そして次の事実がわかる。 $V = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, K)$ とおいたとき

$$\{ M \text{ の商 } \mathcal{D}-\text{加群} \} \cong \{ V \text{ の } m \text{ 次元線型部分空間} \}.$$

これは純粹に線型微分方程式の問題であるが $(0) \in W_1, \dots, W_m$ に関する非線型微分方程式と考えてよい。

非線型微分方程式 (0) の解空間 $\cong GM(m, V)$

を意味する。

このことの事情をもう少し詳しく見てみよう。簡単の為、 $P = \partial_x^N$ とする。 $P\phi = 0$ の解の基本系 $\Sigma (\phi_0, \dots, \phi_{N-1})$ をする。 $W\psi = 0$ の解の基本系 $\Sigma (\psi_0, \dots, \psi_{m-1})$ をする。 $\psi_j = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i \xi_{ij}$ と表せばある。ここで $\xi = (\xi_{ij})_{\substack{0 \leq i < N \\ 0 \leq j < m}} \in Mat(N, m; \mathbb{C})$, $\text{rank } \xi = m$ である。このより左の行列 $\xi \in N$ 次元, m -frame と呼ぶ。今、Wronski 行列 $\Phi = (\phi_j^{(i)})_{0 \leq i, j < N}$ を考へれば、

$$W\psi_j = 0 \quad (0 \leq j < m) \Leftrightarrow (w_m, \dots, w_1, 1, 0, \dots, 0) \bar{\Phi} \xi = 0 \quad \dots \quad (1)$$

これが式 (1) の Grassmann 方程式と呼ぶことにしよう。今、我々は P の分解 (0) から出発して Grassmann 方程式 (1) に到達したのである。並に位数の N 次元, m -frame をから出発して (1) の解を得ることにより、 P の右因子 W を求めることである。実際、
 $\det(\xi_0 \bar{\Phi} \xi) \neq 0$ ($\xi_0 = I_m \vdash \xi_0 = [I_m : 0_{m,n}]$) より (1) は
 一意解 w_1, \dots, w_m を持つ。ここで $W = \sum_{j=0}^m w_j \partial_x^{m-j}$ ($w_0 = 1$) と
 定めてやればよ。

次に時間変数 t_1, t_2, t_3, \dots を導入して W の“時間発展”
 をなめらかに变形を考えよう。 $P = \partial_x^N$ の場合为例にとくれば、
 Wronski 行列 Φ は $\partial_x \Phi = \Lambda_N \Phi$ ($\Lambda_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$) を満たす。
 これに鑑みて、重の時間発展を $\partial_{t_\ell} \Phi = \Lambda_N^\ell \Phi$ ($\ell = 1, 2, \dots$) と定めてやる。

このようするに對して(1)を考へる。この結果得られる ψ_1, \dots, ψ_m は對する非線型微分方程式を "Grassmann hierarchy" と呼ぶ。今この解は對して微分作用素 $W \Sigma > c_3$ と $W \psi_k = 0$ ($0 \leq k < m$) を満たす。すなはち $(\psi_0, \dots, \psi_{m-1})$ は行列零。 ψ_0 行目にあらず。この式を t で微分する。

$$\frac{\partial W}{\partial t_k} \psi_k + W \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t_k} \right) = 0 \quad (0 \leq k < m).$$

これは t の時間発展 α 入れ方より明らかに $\frac{\partial \psi_k}{\partial t_k} = \frac{\partial^k \psi_k}{\partial x^k}$ であるから。

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t_k} + W \partial_x^k \right) \psi_k = 0.$$

これは現れる微分作用素 $\Sigma = \frac{\partial W}{\partial t_k} + W \partial_x^k = B_\ell W + R_\ell$ と割り算すれば B_ℓ である。 $B_\ell \in \mathcal{D}(x)^{\text{monic}}$, $\text{ord } R_\ell < m$ である。すなはち

$$(B_\ell W + R_\ell) \psi_k = 0$$

であるから $R_\ell \psi_k = 0$ 。これが $R_\ell = 0$ を意味する。よって

$$\frac{\partial W}{\partial t_k} = B_\ell W - W \partial_x^k \quad (2)$$

を得られる。右の W^{-1} は t の擬微分作用素を表すと。

$$B_\ell = W \partial_x^k W^{-1} + \frac{\partial W}{\partial t_k} W^{-1}.$$

これは $\text{ord} \left(\frac{\partial W}{\partial t_k} \right) W^{-1} < 0$ であるから、結局

$$B_\ell = (W \partial_x^k W^{-1})_+ (= W \partial_x^k W^{-1} \text{ の微分作用素部分}) \quad (3)$$

である。 W の時間発展は (2), (3) とえらべて書けば "0" と "1" である。

KP hierarchy の位藤方程式との t のである。KP hierarchy は、

無限次元 Grassmann 多様体上の運動としらべるが、

Grassmann hierarchy は、その有限次元的軌道に対するものである。

ある。 \mathcal{F} は Grassmann hierarchy の適當な極限 $m, n \rightarrow \infty$ の
ときには KP hierarchy が得られる。

ナレ例を挙げよう。 $W = \partial_x + w \in \mathcal{D}(A)^{\text{monic}}$ とする。 B_L

$\Sigma(3)$ は從つて求めてみよう。

$$\begin{aligned} B_1 &= \partial_x, \quad B_2 = \partial_x^2 - 2w_x, \\ B_3 &= \partial_x^3 - 3w_x\partial_x - 3w_{xx} + 3ww_x, \end{aligned} \quad (w_x = \frac{\partial W}{\partial x} \text{ と })$$

である。(2) はおなじで $\ell=1$ のときと、これは $x=t_1$ と同一視し
てよい事を示してある。 \mathcal{F} は $\ell=2, 3$ のときと同様に、次の方
程式が得られる。

$$w_{t_2} = w_{xx} - 2w^2w_x \quad (4)$$

$$w_{t_3} = w_{xxx} - 3w_x^2 + 3w^2w_x - 3w^3w_{xx} \quad (5)$$

(4) は、Burgers - Hopf 方程式と呼ばれる事である。 $u = -w_x$
とおなじで (4), (5) を連立すると (本来の) KP 方程式

$$3u_{t_2 t_2} + (-4u_{t_3} + u_{xxx} + 12uu_x)_x = 0$$

が得られる。

2. Super manifold, super Grassmann manifold.

本節では Rogers [2], Boyer - Gitter [3] などに従つて
super manifold に関する事項を述べる。まず L を正整数とし、
 $B_L \in \mathbb{R}^L$ 上の Grassmann 空間を定めよう。

$$B_L = \Lambda(\mathbb{R}^L) = B_{L,0} \oplus B_{L,1},$$

$\Sigma \in \mathcal{L}^r$ (*resp.* $B_{L,0}$) は偶数個 (*resp.* 奇数個) の元、外積で書かれて “ Σ ” 3元の全体を表し、 B_L の even part (*resp.* odd part) と呼ばれる。 B_L の位相は \mathbb{R}^L から自然に導入される Σ である。
 $L = \infty$ の場合も同様に定義する。

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty; \sum_{i \geq 0} |\alpha_i| < \infty \right\}$$

とおき、 $B_\infty = \Lambda(\mathcal{L}_1) = B_{\infty,0} \oplus B_{\infty,1}$ とする。次に、

$$B_L^{m/n} = (B_{L,0})^m \oplus (B_{L,1})^n$$

とおく。この空間が我々の舞台である。

微分可能列数は次のように定義される。 $U \subset B_L^{m/n}$ で、
open set とする。連続函数 $f: U \rightarrow B_L$ が “ G^1 -級” である
とは、 $m+n$ 個の連続函数 $G_k f: U \rightarrow B_L$ ($0 \leq k \leq m+n$) と、
 $\eta: B_L^{m/n} \rightarrow B_L$ が存在して、

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k=0}^{m+n-1} h^k (G_k f)(x) + \eta(h) \|h\|$$

$$\|\eta(h)\| \rightarrow 0 \quad \text{as } \|h\| \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} x &= (x^0, \dots, x^{m+n-1}) \in U, & \begin{cases} (x^0, \dots, x^{m-1}) \in (B_{L,0})^m \\ (x^m, \dots, x^{m+n-1}) \in (B_{L,1})^n \end{cases} \\ h &= (h^0, \dots, h^{m+n-1}) \in B_L^{m/n} \end{aligned}$$

を満たすことを定義する。 η が f の G^1 -級とは、 $G_k f$ ($0 \leq k \leq m+n$)
が G^{r-1} -級と定義される。 $t \ll h$ 、 G^0 -級 Σ の “ Σ ” と “ Σ ” 間に定義される。 Σ が有限のとき、 $m \leq k < m+n$ ならば k に Σ は $G_k f$ の “ Σ ” 方は一致的ではないことに注意せねばならない。
 Σ の部分 Σ を Σ と定式化すれば、Boyer-Gitter [3] の。

ように最高次数の部分によく module class を考えなければいけない。我々にとって今必要なことは、 $L = \infty \geq L \geq 0$ ので、よりあくまで微分可能性の定義は上のままにしておく。なお上記 [3] では、 G^∞ -級数と実数と 1 つの偏微分で特徴付けよ。丁度 Cauchy-Riemann 方程式にあたりそのも考察工してある。
 ところで、 \mathbb{R}^m 上の言葉の準備をしておく。自然な射影 $\epsilon: B_L \rightarrow \mathbb{R}$, $\epsilon: B_L^{m/n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ を “肉体写像 (body map)” とし、 $s = 1 - \epsilon$ を “精神写像 (soul map)” とする。これは De Witt による用語である。

$\Sigma \in (m|n) - 1$ 元 G^∞ -supermanifold over B_L とは通常の C^∞ -多様体 Σ と同様に、Hausdorff 空間、局所的には $B_L^{m/n}$ の open set と同様で、それが G^∞ -級数写像で patching ($t = t_0 + 1$) で定義される。Rogers は [2] で $(1|1) - 1$ 元 G^∞ -supermanifold over B_1 の例として 2 元 torus T^2 を挙げてある。これは 2 例の例を挙げよう。

$$\text{Mat}(m|n; B_L) = \left\{ \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix}; \begin{array}{l} A_{00}: m \times m, B_{L,0} \text{ 値}, A_{01}: m \times n, B_{L,1} \text{ 値} \\ A_{10}: n \times m, B_{L,1} \text{ 値}, A_{11}: n \times n, B_{L,0} \text{ 値} \end{array} \right\}$$

とおく。 $\text{Mat}(m|n; B_L)$ は Lie superalgebra の例 $\mathfrak{gl}(1|1, \mathbb{R})$ の中の可逆元の全体を $GL(m|n; B_L)$ と書く。 $\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix}$ が可逆であることは、 $\epsilon(A_{00}) \in GL(m; \mathbb{R})$, $\epsilon(A_{11}) \in GL(n; \mathbb{R})$ と ϵ と同値である。 $GL(m|n; B_L)$ は G^∞ -supermanifold の半分である。

Lie supergroup の例は \mathfrak{sl}_2 , \mathfrak{so}_8 など。

次に Grassmann 多様体の super 版を考える。通常の Grassmann 多様体を \mathbb{P}^k と一度思い出そう。 N 次元, m -frame の全体を $FR(N, m; \mathbb{C})$ で表す。 $FR(N, m; \mathbb{C}) \in GL(m; \mathbb{C})$ に対する右辺の作用で割りたもの。

$$GM(m, n) = FR(N, m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{C}) \quad (m+n=N)$$

この Grassmann 多様体である。これは mn 次元の \mathbb{C}^∞ -多様体 (over \mathbb{C}) である。この方法をとることで super 化する。

$$SFR(M|N, m|n; B_L)$$

$$= \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \bar{\zeta}_{00} & \bar{\zeta}_{01} \\ \hline \bar{\zeta}_{10} & \bar{\zeta}_{11} \end{array} \right] ; \begin{array}{l} \bar{\zeta}_{00}: M \times m, B_{L,0} \text{ 値}, \bar{\zeta}_{01}: M \times n, B_{L,1} \text{ 値} \\ \bar{\zeta}_{10}: N \times m, B_{L,1} \text{ 值}, \bar{\zeta}_{11}: N \times n, B_{L,0} \text{ 值} \\ \text{rank } \epsilon(\bar{\zeta}_{00}) = m, \text{ rank } \epsilon(\bar{\zeta}_{11}) = n \end{array} \right\}$$

とある。これは $M|N$ -次元, $m|n$ -superframe である。

$SFR(M|N, m|n; B_L)$ には右辺 $GL(m|n; B_L)$ による作用がある。

よって

$$GM(m|n, m'|n'; B_L) = SFR(M|N, m|n; B_L) / GL(m|n; B_L) \quad (m+m' = M, n+n' = N)$$

である。これは, $(mm' + nn') / (mn' + m'n)$ -次元, G^∞ -supermanifold over B_L である。この定義は後に述べる。

3. Super Grassmann hierarchy & super KP hierarchy

本節では第1節で述べた Grassmann hierarchy & KP hierarchy の super 化についての定式化と \leftrightarrow の解の表示を述べる。まず記号を準備しよう。 x は通常の（可換な）変数、 α は（反可換な）Grassmann 变数とする。すなはち、（反）交換関係 $[\alpha, \alpha]_+ = 0$, $[x, \alpha] = 0$ が成立し、 α は t の奇偶性をもつ。定数、役割と果たす Grassmann 代数は $A = B_\infty \oplus \text{rest}$ である。此の数体 K は第1節と同じものとし $\mathcal{S} = (K \otimes \mathbb{P}[\alpha])$ $\oplus A = \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_1$ が “superalgebra” となる。 \mathcal{S} の元は superfield と呼ぶ。Superfield f は

$$f = f(x, \alpha) = f_{00} + \alpha f_{01} + f_{10} + \alpha f_{11}$$

と表示される。ここで $f_{00}, f_{11} \in K \otimes A_0$, $f_{01}, f_{10} \in K \otimes A_1$ である。 \mathcal{S} 上の微分作用素 ∂_α は

$$\partial_\alpha(f) = f_{01} + f_{11}$$

により定義し、さらに $\mathbb{D} \equiv \mathbb{D} = \partial_\alpha + \alpha \partial_x$ により定義する。

この \mathbb{D} は ∂_x の “平方根” である。すなはち、容易にわかるように $\mathbb{D}^2 = \partial_x$ が成立する。（Supersymmetry とは物理的に言えば時空、translation の平方根をとることである。これがます。）

空間の方につれて、この操作を行ったことに ragazzi。 \mathbb{D} は odd な微分で super Leibniz rule

$$\mathbb{D} f = \dot{\mathbb{D}} f + f^* \mathbb{D}$$

Σ が Γ です。 $\Gamma = \Gamma^+$ と上で

$$f^* = f_{00} + s f_{01} - f_{10} - s f_{11}$$

であり。 $\dot{\mathcal{H}}f$ は “ f は \mathcal{H} の作用素で f = superfield”, などから,

$$\dot{\mathcal{H}}f = f_{01} + s \frac{\partial f_{00}}{\partial x} + f_{11} + s \frac{\partial f_{10}}{\partial x}$$

をあらわす。微分作用素環の役割を果たすのは、当然 $\mathcal{S}[\mathcal{H}]$ である。これは super Leibniz rule (= あり), superalgebra (= あり) である。 $P \in \mathcal{S}[\mathcal{H}](N)^{\text{monic}}$ は $P = ZW$, $W \in \mathcal{S}[\mathcal{H}](m)^{\text{monic}}$ と分解せよ。この問題を考える。簡単の為、 N, m を偶数, $P = \mathcal{H}^N \geq 1$ とおくと見てよい。 $P\phi = 0$ の解 $\Sigma \phi_j = x^j/j!$ ($0 \leq j \leq N/2$), $\phi_{j+1} = s x^j/j!$ ($0 \leq j < N/2$) とする $\phi_j \in \mathcal{S}_{1,j}$ ($|j| = j \bmod 2$) である。Super Wronski 行列 $\Phi = (\dot{\mathcal{H}}^i \phi_j)_{0 \leq i, j \leq N}$ により定義する。明らかに $\dot{\mathcal{H}}\Phi = \Lambda_N \Phi$ が成立する。 $P = ZW$ と分解を求めるには、第 1 節と同様に次の “super Grassmann 方程式” を解けばよい。

$$(w_m, \dots, w_1, t, 0, \dots, 0) \overset{\vee}{\Phi} = 0 \quad (6)$$

$\Gamma = \Gamma^+$ とし、 $\Sigma = (\Sigma_{ij}) \in \text{Mat}(N, m; A)$, $\text{rank } \Sigma = m$ である,
 $\Sigma_{ij} \in A_{1+i+j}$ である。行, 列を適当に並べかえて、 $\overset{\vee}{\Sigma} \in SFR(N/2 | N/2, m/2 | m/2; A)$ とする。すると Σ は $\overset{\vee}{\Sigma}$ の superframe と呼んでよい ($\Gamma = \overset{\vee}{\Sigma}$)。行, 列を適当に入れかえて、(6) は以下のように書くことができる。
 $(w_m, w_{m-1}, \dots, w_1; w_{m-1}, w_{m-3}, \dots, w_1) \overset{\vee}{\Phi} = -(d_m, d_{m-2}, \dots, d_2; d_{m-1}, d_{m-3}, \dots, d_1)$

— (7)

ここで Ψ は $\Psi = \Phi \circ \varphi$ の行列式を入れかえしての形

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{\infty} & \Psi_{01} \\ \Psi_{10} & \Psi_{11} \end{bmatrix} \quad \Psi_{ij} \text{ 成分} \in S_{i+j, j_1}$$

この形を見てる。また $\alpha_j \in S_{ij_1}$ である。 (6) (or (7))
 はすべての superframe \mathcal{S} に $\#$ 17 一致 可解であり $w_j \in S_{ij_1}$ は
 なる。 \Rightarrow $\#$ 1) super Grassmann 方程式 (6) の解全体は super
 Grassmann の 様体 となる。

次に時間発展を導入する。Evenな時間変数 $\epsilon t_2, t_4, t_6, \dots$, oddな時間変数 $\epsilon s_1, s_3, s_5, \dots$ とし、変数 x, s に関する時間には次の(反)交換関係が成立していいとする。

$$\left\{ \begin{array}{l} [\alpha, t_{2l}] = [\alpha, A_{2l+1}] = [A, t_{2l}] = [A, A_{2l+1}]_+ = 0, \\ [t_{2l}, t_{2k}] = [t_{2l}, A_{2k+1}] = [A_{2l+1}, A_{2k+1}]_+ = 0. \end{array} \right.$$

微分作用素 ∂_t

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{H}_{2l} = \partial_{t_{2l}}, \\ \textcircled{H}_{2l+1} = \partial_{x_{2l+1}} + \sum_{k \geq 0} A_{2k+1} \partial_{t_{2l+2k+2}} \end{array} \right.$$

と定義する。これらは次の(反)交換関係を満たす。

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbb{H}, \mathbb{H}_{2l}] = [\mathbb{H}, \mathbb{H}_{2l+1}]_+ = 0 \\ [\mathbb{H}_{2l}, \mathbb{H}_{2k}] = [\mathbb{H}_{2l}, \mathbb{H}_{2k+1}] = 0 \\ [\mathbb{H}_{2l+1}, \mathbb{H}_{2k+1}]_+ = 2 \mathbb{H}_{2l+2k+2} \end{array} \right.$$

$$\text{Wronski行列 } \Phi \text{ の時間発展を今回は、次で入る}.$$

$$\textcircled{H}_t \Phi = P_N^t \Phi \quad t=t \text{ で } P_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \tilde{P}_N^2 = -\Lambda_N^2$, $[\tilde{P}_N, \Lambda_N]_+ = 0$ に注意せよ。このよりは
 Φ に対して立てた super Grassmann 方程式 (6) から得られる
 w_1, \dots, w_m の非線型微分方程式系を "super Grassmann hierarchy"
 と呼ぶ。第 1 節と同様に微分作用素の割り算を用いて (今度
 は符号に充分に気をつけながら) 次が示される。

Proposition Super Grassmann 方程式 (6) の解 w_1, \dots, w_m は擬
 微分作用素 $W = \sum_{j=0}^m w_j \Theta^{-j}$ ($w_0 = 1$) エルミート W の時間発
 展は次で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Theta}_{2l} W = (-)^l \{ B_{2l} W - W \Theta^{2l} \} \\ \dot{\Theta}_{2l+1} W = (-)^{l+m+1} \{ B_{2l+1} W - W \Theta^{2l+1} \} \\ B_l = (W \Theta^l W)_+ . \end{array} \right. \quad // \quad (8)$$

(8) は super Grassmann hierarchy における佐藤方程式と呼ぶべき
 ことである。これらの積分可能条件は次の Zakharov - Shabat
 方程式である。

$$\left\{ \begin{array}{l} (-)^l \dot{\Theta}_{2k} B_{2k} - (-)^k \dot{\Theta}_{2k} B_{2l} + [B_{2k}, B_{2l}] = 0 \\ (-)^l \dot{\Theta}_{2l} B_{2k+1} + (-)^{k+m} \dot{\Theta}_{2k+1} B_{2l} + [B_{2k+1}, B_{2l}] = 0 \\ -(-)^{l+m} \dot{\Theta}_{2l+1} B_{2k+1} + (-)^{k+m} \dot{\Theta}_{2k+1} B_{2l+1} - [B_{2k+1}, B_{2l+1}]_+ + 2 B_{2k+2l+2} = 0 \end{array} \right.$$

... (9)

無限次元 (つまり意味と明確にしないといけない) の super Grassmann 方程式から生ずる w_j 間に対する非線型微分方程式系を "Super KP hierarchy" と呼ぶ。この上の proposition カテゴリカルなようにこれは、 m の偶奇によつて方程式系が異なつ。これは \bar{P} と $-P$ の 3 次元から来てゐる。従つて odd 時間変数につれて $A_{2l+1} \simeq -A_{2l+1}$, $\bar{A}_{2l+1} \simeq -\bar{A}_{2l+1}$ の 3 次元には相当する。 m が偶数のときは type 0, 奇数のときは type I の SKP hierarchy と呼ぶことになる。SKP hierarchy の佐藤方程式, Zakharov-Shabat 方程式は、それと/or (8), (9) と同じ形である。

例を挙げよう。Type 0 の SKP hierarchy を考えよう。

$$W = \sum_{j \geq 0} w_j \bar{A}^j \quad (w_0 = 1) \quad l = 0 \text{ で } w_j \in \delta_{1,j} \text{ とする} \quad \therefore \text{計算} \quad l = 0$$

$$B_1 = \bar{A} + 2w_1, \quad B_2 = \bar{A}^2 = \partial_x,$$

$$B_3 = \bar{A}^3 + 2w_1 \bar{A}^2 - \dot{w}_1 \bar{A} + (2w_3 - \dot{w}_1 w_1 - 2w_1 w_2 + w_1 x - \dot{w}_2),$$

$$B_4 = \bar{A}^4 - 2w_1 x \bar{A} - (2w_1 x w_1 + 2w_2 x)$$

がわかる。ここで $\dot{w}_1 = \bar{A} w_1$ である。 (8) は $l = 0$ の方程式を書くべやう。

$$\begin{aligned} \dot{\bar{A}}_1 W &= -(B_1 W - W \bar{A}) \\ &= -\left\{ (\dot{w}_1 + w_2 - w_2) \bar{A}^{-1} + (\dot{w}_2 - 2w_3 + 2w_1 w_2) \bar{A}^{-2} \right. \\ &\quad \left. + \dots \right\}. \end{aligned}$$

この \bar{A}^{-1} , \bar{A}^{-2} の係数を比べて。

$$\dot{\Theta}_1 w_1 = -\dot{w}_1, \quad \dot{\Theta}_1 w_2 = -(\dot{w}_2 + 2w_1 w_2 - 2w_3),$$

等々の方程式が得られる。 $2l=2$ の (8) は $\partial_x \varepsilon - \partial_{t_2} \varepsilon$ と同様である。これは $\tilde{P}^2 = -\Lambda^2$ から当然である。また、 $2l=4$ の方程式の $\Theta_1^{-1}, \Theta_2^{-1}$ の係数を比較すると

$$\dot{\Theta}_4 w_1 = w_{1,xx} + 2w_{3,x} - 2w_{1,x}\dot{w}_1 - 2w_{1,x}w_2 - 2w_{2,x}w_1,$$

$$\dot{\Theta}_4 w_2 = w_{2,xx} + 4w_{4,x} - 2w_{1,x}\dot{w}_2 + 2w_{1,x}w_3 - 2w_{1,x}w_1w_2 - 2w_{2,x}w_2$$

となる。第2式の肉体部分 $\Sigma \geq 1$, $w_4 = 0$ を用いて (2-節 Σ 行う) と $f = \epsilon(w_2)$ とおいた $f_{t_4} = f_{xx} - 2ff_x$ と Burgers-Hopf 方程式が得出る。第1式は全体が odd で、肉体部分 $\Sigma \geq 3$ が自明に分かれてしまう。

次に最も簡単な場合に解の表示 Σ をえよう。 $N=3$, $m=2$ の super Grassmann 方程式 Σ をえよう。

$$\Phi = \exp [s \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 + s_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2]$$

$$= \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ \bar{p}_0 & \bar{p}_1 & \bar{p}_2 \\ p_0 & & \end{bmatrix}$$

となる。 $p_0 = \bar{p}_0 = 1$, $p_1 = s + s_1$, $\bar{p}_1 = s - s_1$, $p_2 = x - t_2 + ss_1$ である。Super frame Σ は $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq 3 \\ 0 \leq j \leq 2}}$, $\Sigma_{ij} \in A_{1(i+j)}$ と 17 方程式 Σ と書く。

$$(w_2, w_1) A = -(d, \beta) \quad (10)$$

となる。 $d = \Sigma$,

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \bar{\zeta}_{00} + p_1 \bar{\zeta}_{10} + p_2 \bar{\zeta}_{20} & p_0 \bar{\zeta}_{01} + p_1 \bar{\zeta}_{11} + p_2 \bar{\zeta}_{21} \\ p_0 \bar{\zeta}_{10} + p_1 \bar{\zeta}_{20} & p_0 \bar{\zeta}_{11} + p_1 \bar{\zeta}_{21} \end{bmatrix}, \\ (\alpha, \beta) = (p_0 \bar{\zeta}_{20}, p_0 \bar{\zeta}_{21}) \end{array} \right.$$

である。すなはち $\epsilon(A)$ は可逆であるから、(10) は一直角に解ける。つまり $\epsilon(A)$ が可逆であることをから A が可逆であることを従い、 $(w_2, w_1) = -(\alpha, \beta) A^{-1}$ として解が求まるわけである。それと並んでくわしく説明しよう。

まず $\epsilon(a), \epsilon(d)$ がゼロでないから、 a, d は可逆であることに注意する。すなはち

$$(w_2, w_1) A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d^{-1}c & 1 \end{bmatrix} = -(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d^{-1}c & 1 \end{bmatrix}$$

とし $\epsilon(w_2, w_1)$

$$w_2 = -\frac{a - \beta d^{-1}c}{a - bd^{-1}c} \quad (\epsilon(a - bd^{-1}c) = \epsilon(a) \neq 0).$$

同様に右から $\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{A}^1$

$$w_1 = -\frac{\beta - da^{-1}b}{d - ca^{-1}b} \quad (\epsilon(d - ca^{-1}b) = \epsilon(d) \neq 0)$$

である。このときまた $\epsilon(w_2, w_1) = 0$ 。

$$w_2 = -\frac{\frac{\alpha d - \beta c}{d^2}}{\frac{\alpha d - \beta c}{d^2}}, \quad w_1 = -\frac{\frac{\beta a - d b}{a^2}}{\frac{\beta a - d b}{a^2}}$$

と書かれておく。これらの分子は A の "super-determinant" と呼ばれるべきである。(Manin, Leites などによると A 人は "Berezinian" といふ) $Ber A$ と書かれて讀むべき。

$$s \det A = \frac{ad - bc}{d^2}, \quad s^{-1} \det A = \frac{da - cb}{a^2}.$$

$s \det A \cdot s^{-1} \det A = 1$ であることは、今の場合、簡単になります。さてさて Φ の形より。

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\textcircled{H}}_1 a = -c \\ \dot{\textcircled{H}}_1 b = -d \\ \dot{\textcircled{H}}_1 c = \alpha \\ \dot{\textcircled{H}}_1 d = \beta \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\textcircled{H}}_2 a = -\alpha \\ \dot{\textcircled{H}}_2 b = -\beta \\ \dot{\textcircled{H}}_2 c = 0 \\ \dot{\textcircled{H}}_2 d = 0 \end{array} \right.$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} \dot{\textcircled{H}}_1(s^{-1} \det A) &= \frac{\beta a - \alpha b}{a^2}, \\ \dot{\textcircled{H}}_2(s \det A) &= \frac{-\alpha d + \beta c}{d^2} \end{aligned}$$

であるから結局、

$$w_2 = \frac{\dot{\textcircled{H}}_2(s \det A)}{s \det A}, \quad w_1 = -\frac{\dot{\textcircled{H}}_1(s^{-1} \det A)}{s^{-1} \det A}$$

と、うまいこと表示が得られました。さてに現われた $s \det A$, $s^{-1} \det A$ は super Grassmann hierarchy, SKP hierarchy における “T-函数” にあたります。これについては、現在、計算（実験）が進行中のこともあり結果をまとめるのは、時期尚早と思われるで、ここでは割愛する。

なお KP hierarchy の 超対称化は我々とは別の定式化

で Manin & Radul たり試みられてる。ことに注意してお
< [4] >。

文 献

- 0) M. Sato : 数研講究録 439 (1981), 30-46.
- 1) M. Sato and Y. Sato : Lecture Notes in Num. Appl. Anal. 5 (1982), 259-271.
- 2) A. Rogers : J. Math. Phys. 21 (1980), 1352-1365.
- 3) S. Boyer and C.P. Gilmer : Trans. AMS. 285 (1984), 241-267.
- 4) Yu.I. Manin and A.O. Radul : Commun. Math. Phys. 98 (1985), 65-77.
- 5) 数理・物理 28号 (1985).

1986年5月5日 記.