

Monopole の幾何

島大数理研 島谷 健一郎 (Shimatani Ken'ichiro)

Monopole は数学的には、 Bogomolny 方程式と呼ばれる非線型偏微分方程式の、ある境界条件を満たす解として定義される。この解の構成および解全体のホ奇因形 (Monopole の Moduli space) の形状については既に種々の結果が知られており、かつこれとは互いに有機的に結がる。Monopole の非線型方程式の解析には、諸々のアプローチ相互の関係が正確に把握され、多角的に方程式を取り組むことが必要である。

これらの一につき、 Nahm 方程式と呼ばれる非線型常微分方程式の解が Monopole 解を構成する理論と、 spectral curve と呼ばれる代数曲線が Monopole 解全体をパラメトリーズする理論が知られている。Hitchin ([8]) は既に二つの両者の関係、対応を調べたことより、 Monopole に関する結果をいくつか証明しているが、これは、それをさらに意味して、 Hitchin による spectral curve が Nahm 方程式の解を対応させた手順が、実际、ソリトン理論における、コンピクトリーマン面、即ち

上の基準点、 $\eta = \infty$ の漸近挙動、および positive divisor χ の
データから Baker-Akhiezer 函数を使、 χ 方程式の準周期解
を構成する理論 ([3][4][6][10]) の枠組に完全に乗る。この
事、同時に Nahm 方程式の解を特殊な場合トテータ函数を
用いて、ある程度記述がきることを示す。

以下、§1 と §2 で、定義と Nahm-Hitchin の結果をごく
簡単にまとめる。§3 で、準周期解構成の理論の枠組に乗る、
之れを示し、§4 でテータ函数による解の記述を示す。
了りとする。

§1 Monopole の定義

Monopole は、携手した次元リーマン多様体とコンパクト
一群の定義がきるが、ここは簡単にするため、 \mathbb{R}^3 上の SU(2)
Monopole に限る。大定義を省略してこのようにする。

定義 (1.1) k -Monopole ($k = 1, 2, 3, \dots$)

(A_1, A_2, A_3, Ψ) 、 A_i, Ψ は \mathbb{R}^3 上の $AM(2)$ ($SU(2)$ の 1)-
環) 値を持つ函数で、次の連立非線型偏微分方程式 (=
Bogomolny 方程式と言ふ) や、2つの境界条件を満たす。

ただし $\|\Psi\|^2 = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Psi^2$ $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ は半径
整数 k のことを Monopole の topological charge と言ふ。

$$(1.2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + [A_1, \Phi] = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} + [A_2, A_3] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + [A_2, \Phi] = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} + [A_3, A_1] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + [A_3, \Phi] = \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + [A_1, A_2] \end{array} \right.$$

$$(1.3) \quad \| \Phi \| = 1 - \frac{k}{2r} + O(r^{-2}) \quad r \rightarrow +\infty$$

$$(1.4) \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + [A_i, \Phi] \right\| = O(r^{-2})$$

つまり、方程式 (1.2) の、境界条件 (1.3) (1.4) の下での特殊解 (A_0, Φ) は、topological charge k の $SU(2)$ -Monopole over $\mathbb{R}^3 \times S^3 = \mathbb{C}P^2$ である。

定義 (1.5) gauge 同値

(A_0, Φ) が (1.2) (1.3) (1.4) を満たす時、 g を \mathbb{R}^3 上の $SU(2)$ -値函数 χ で $\widetilde{A}_i = g^{-1} A_i g + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}$ $\widetilde{\Phi} = g^{-1} \Phi g$ $\chi < \pi$ ($\widetilde{A}_i, \widetilde{\Phi}$) がまた (1.2) (1.3) (1.4) を満たす事は容易に確かめられる。したがって $SU(2)$ Monopole 解を豆(1.1) gauge 同値で表す。すなはち

定義 (1.6) Moduli space

$\{ \text{fix-Monopole 解} \}_{\text{gauge 同値}} / \text{gauge 同値} \cap \text{fix gauge 同値} \}$ (fix-Monopole 解全体からこの集合を除いた部分) のことを、fix-Monopole の Moduli space と呼ぶ。

Monopole における基本的問題は、方程式 (1.2) や (1.3) (1.4) の下の解の事実、Moduli space の形状の決定にあると言える。

Remark (1.7)

\mathbb{R}^3 上の Bogomolny 方程式 (1.2) は、 $\mathbb{R}^4 = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 上の自己双対 Yang-Mills 方程式 $= \lambda_0$ によって λ_i の λ 同値である。この事は方程式を書き下せばすぐわかる。

Remark (1.8)

理論物理の Yang-Mills-Higgs の理論で、gauge 場と Higgs 場に対する作用積分が定義されるが、定義 (1.1) の A_i が gauge 場、並びに Higgs 場に対応し、方程式 (1.2) は (A_i, Φ) の作用積分の critical point を表す事を、境界条件 (1.3) (1.4) は作用積分の有界性を保証する。したがって、このように gauge 場と Higgs 場の作用積分が、(1) は Dirac の ψ 和 $\bar{\psi}$ に起因する事である。以上のように言葉の定義が得られる。

§2 Nahm × Hitchin の結果

また、Monopole 解の構成に関して、次の Nahm の構成法がある。

定理 [2.1)

次のようにデータ (T_1, T_2, T_3) から k -Monopole 解が構成できる。

逆にデータの k -Monopole 解は、このデータから構成される。

(2.2) T_1, T_2, T_3 は開区間 $(0, 2)$ 上の $M(k, \mathbb{C})$ -値実解系的函数

$$(2.3) \quad T_1' = [T_2, T_3]$$

$$T_2' = [T_3, T_1]$$

$$T_3' = [T_1, T_2]$$

二つの非線型常微分方程式を Nahm 方程式と言ふ。

$$(2.4) \quad T_i^* = -T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$(2.5) \quad T_i(2-z) = -\bar{T}_i(z) \quad i = 1, 2, 3 \quad z \in (0, 2)$$

(2.6) T_i は端点 0, 2 で simple pole を持つ

± 5 となる z の residue を $a_1, a_2, a_3 \in M(k, \mathbb{C})$ とする

と (2.3) より $-a_1 = [a_2, a_3]$ 等の式が成り立つ。

よって $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{sp}(1)$ の表現 $\rho: \mathfrak{sp}(1) \rightarrow M(k, \mathbb{C})$

$$\text{左. } \rho(x_1\partial_x + x_2\partial_y + x_3\partial_z) = -2(x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3) \quad \text{左定義}$$

左の式

(2. 7) ρ は既約

証明の概略 ([8] [2])

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{左の式}$$

$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ で $\|x\| = 1$ のとき ρ が左の微分作用素

$$A(x) = -\sum_{j=1}^3 x_j \otimes e_j + i \frac{1}{2} \nabla - i \sum_{j=1}^3 T_j \otimes e_j$$

左の元 ψ , (2. 6), (2. 7) の kernel が複素 2 次元存在する。

これが示すように $\psi \in L^2$ の上に左の正規直交基を

$$\psi(x_1, x_2, x_3; z) \text{ が } (A(x)\psi(x, z) = 0, \int_0^2 \psi^* \psi dz = 1)$$

左の ψ

$$A_i(x_1, x_2, x_3) = \int_0^2 \psi^*(x_1, x_2, x_3; z) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3; z) dz \quad i=1, 2, 3$$

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = i \int_0^2 (z-1) \psi^*(x_1, x_2, x_3; z) \psi(x_1, x_2, x_3; z) dz$$

左の式は, (A_i, Φ) が \mathbb{R}^3 -Monopole の条件を満たす。

後半の証明には, これらが上述の Hitchin の結果が必要となる。

この定理により, 非線型偏微分方程式 (1. 2) が非線型常微分方程式 (2. 3) に帰着されることは, Nahm 方程式 (2. 3) が左の 3 つの解法を持つことから、またデータ (T_1, T_2, T_3) が左

Monopole 解 (A_μ, Ψ) を explicit に作了には線型常微分方程式を解く操作と定積分の計算があるため計算の遂行は困難な場合が多い。

一方、Monopole の Moduli space は $\mathbb{H}^{1,1}$ では、代数曲線 \mathbb{P}^3 + トライアズミキス $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ Hitchin の結果があるが、 \mathbb{H}^n 前に記号を下へ土し用意する。

記号

$\mathbb{C}\mathbb{P}^1$: 1 次元複素射影空間

$T\mathbb{C}\mathbb{P}^1$: $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ tangent bundle, non-compact な 2 次元複素多様体である。

$\pi: T\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$: projection

$c(\ell)$: $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 上の Chern class ℓ の line bundle

$\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ は $\mathbb{C}\mathbb{P}_0 = \{[z_1, z_2] | z_2 \neq 0\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}_\infty = \{[z_1, z_2] | z_1 \neq 0\} \times 2$ 扱の chart で cover され、 $T\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ は多様体 $\times (\cong \pi^{-1}(v_0)) \times \pi^{-1}(v_\infty)$ $\times \pi^{-1}(v_\infty)$ の 2 扱で cover される。以後、 $\pi^{-1}(v_0) \times T\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ の standard な chart と呼ぶことにする。

$\pi^{-1}(v_0) \cong \mathbb{C}^2 = (x, y)$ x は $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 方向、 y は $T\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 方向

L^\pm : $\pi^{-1}(v_0)$ 上と $\pi^{-1}(v_\infty)$ 上の trivial line bundle + transition function $e^{\frac{\eta}{2}}$ で張り合おうとした $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 上の正則な line bundle。ただし $\eta \in \mathbb{C}$ は定数

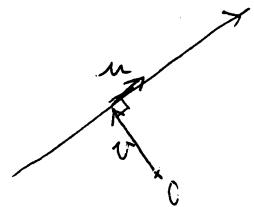
$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong S^2 \text{ かつ } T\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong \{(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|u\|=1, u \cdot v=0\}$$

つまり、 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^3$ の向きを込めた直線は、単位方向下
カトル u と原点からの垂線でワト

$$\text{且} u \text{を使}, \exists \{tu + v \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$u \text{ 表} u \pm h, \|u\|=1, u \cdot v=0 \quad \text{で}$$

ある。つまり



\mathbb{R}^3 の向きを込めた直線全体 $\cong T\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ が成り立つ。

$\pi: T\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow T\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 上へ同一視の下で、直線の向きを逆
にしたがう像。 $\pi^2 = \text{id}$, anti-holomorphic $\pi \neq \text{id}$, $\pi \notin T\mathbb{C}\mathbb{P}^1$
の real structure $\pi \neq \text{id}$, $\pi \parallel \text{id}$.

定理 (2.8)

反-Monopole 全体 γ . 次の条件を満たす $T\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ の部分集合 S
の全体 γ は同値である。

(2.9) S は、ある $\psi \in H^0(T\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \pi^* \mathcal{O}(2k))$ の 0 点集合で

定義された $T\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ の部分集合: $S = \{p \in T\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \mid \psi(p)=0\}$

(2.10) multiple component を持たない

(2.11) $\gamma \cong \mathbb{P}^1$ かつ

(2.12) π 不変

(2.13) $L^2|_S$ は holomorphically trivial

(2.14) $L^1 \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1)$ は real structure ($\tilde{\tau}$: anti-linear $\tilde{\tau} \circ$
 $\tau^2 = \text{id}$ かつ bundle automorphism) を持つ。

$$(2.15) \quad H^0(S, L^z \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-2)) = 0 \quad z \in (0, 2) \subset \mathbb{R}$$

証明の概略 ([7] [8])

先に説明したように $P \in \mathbb{CP}^1$ と γ_P (\mathbb{R}^3 の直線) は同一視される。 $\nabla = \sum_{i=1}^3 (\partial_i + A_i)$ とおき、各 $P \in \mathbb{CP}^1$ に対し ∇ の微分作用素 $\nabla - \gamma_P$ を直線 γ_P 上に制限せよ。この kernel $(\nabla - \gamma_P)|_{\gamma_P} \varphi = 0$ は、線型 1 階常微分方程式が常に複素 2 次元である。次のように \mathbb{CP}^1 の部分集合 S を定める。
 $S = \{P \in \mathbb{CP}^1 \mid (\nabla - \gamma_P)\varphi = 0 \text{ を満たす } \gamma_P \text{ 上の函数 } \varphi \text{ の中}\}$
 $\leftarrow 2 \text{ 乗可積分性} \text{ が存在する}\}$

前回の議論からこれにより、このように \mathbb{CP}^1 の部分集合が (2.9) ~ (2.15) を満たすこと、異なった Monopole 解には異なる代数曲線 S が得られるなど、(2.9) が必要十分であることが示された。また、Monopole 解は S によって定められる S も、Hitchin は Monopole の spectral curve と呼んでいた。

系 (2.16)

S は代数曲線である

証明 (2.9) より明らか

系 (2.17)

S は standard chart (S, η) 上で表示され、次の形の $P \gamma_1$

この平面曲線が $\gamma^k < 2$ または 5 である。

$$\begin{aligned} \eta^k + (a_1^1 s^2 + b_1^1 s - \bar{a}_1^1) \eta^{k-1} + (a_2^1 s^2 + b_2^1 s - \bar{a}_2^1) (a_3^2 s^2 + b_3^2 s - \bar{a}_3^2) \eta^{k-2} + \dots \\ + (a_k^1 s^2 + b_k^1 s - \bar{a}_k^1) \dots (a_k^k s^2 + b_k^k s - \bar{a}_k^k) = 0 \\ a_i^j \in \mathbb{C}, \quad b_i^j \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

証明の概略

γ が η^k の多項式によって表される (γ は (2.9) の S , $b_m^l \in \mathbb{R}$ かつ \bar{a}_i^j の所定 (2.12) が S 導かれる)。 (2.11) より S は η^k の像数が 0 であることを示す。

Remark (2.18)

(2.10) 以上の式を因数分解 (たまに重複因子を持つたり) しても意味がある。また、他の条件が上の式の像数の外のよろづや条件で表されるときは、それも S である。

系 (2.19)

S が non-singular の時、genus は $(g-1)^2$ である

証明は [7]

± 2, spectral curve と Nahm 方程式との結びつきは、次の 4 つの命題とまとめられる。 $= n$ が S である。定理 (2.1), (2.9) の残りが導かれるのは明了である。

命題 (2.20)

(2.9) (2.10) (2.11) (2.13) (2.15) を用いた代数曲線 S が Nahm 方程式 (2.3) の解 ω (2.6) (2.7) を用いたときの構成法を、太長 L 是非行列 $P \in GL(k, \mathbb{C})$ の相似変換の自由度を残す ($T_P \omega$ (2.3) を用いたとき、 $P^{-1}T_P P$ がまた (2.3) を満たす。この自由度を除くと unique な (2.3) の解が定まる、 ω は意味)

証明の概略 ([8])

(a) まず、主な条件 (2.15) を使った

$$(2.21) \quad d\pi^* M H^0(S, L^z \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1)) = 0 \quad z \in (0, 2)$$

を導く。

(b) 実開区間 $(0, 2)$ 上の複素な次元下のトル束 V が

$$V = \bigcup_{z \in (0, 2)} H^0(S, L^z \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$$

を定義されることを示す。

(c) V 上の次のより複雑な性質を持つ bundle automorphism $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ が唯一で定まる事を示す。

勝手な $\psi_z \in H^0(S, L^z \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$ (i.e. $\psi \in \Gamma((0, 2), V)$)

に対する

$$\eta \psi(z; s, \eta) + (\tilde{A}_0 \psi)(z; s, \eta) + \gamma (\tilde{A}_1 \psi)(z; s, \eta) + \gamma^2 (\tilde{A}_2 \psi)(z; s, \eta) = 0$$

$= z^\alpha \gamma$, η は 1 成分, γ^2 成分への射影を定義する

$\pi^{-1}(v_0) = (S, \eta)$ 上の函数, ψ も $\tilde{A}_i \psi$ も $H^0(S, L^z \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$

の元であるが $\pi^{-1}(v_0)$ 上の函数表示となる。これは

$\psi(z; \bar{z}, \eta)$, $(\tilde{A}^1\psi)(z; \bar{z}, \eta)$ と書かれた時に ψ は \bar{z} の函数である

和積 ψ が、た結果 $\psi(0)$ が等しいことを意味

(d) V に接続 ∇ が、 $\psi \in \Gamma((\mathcal{O}_2), V)$ に属する、 ψ が $\pi^{-1}(U_0)$ 上

$\psi_0(z; \bar{z}, \eta)$, $\pi^{-1}(U_0)$ 上 $\psi_0(z; \bar{z}, \eta)$ と函数表示して

$$\forall \psi = \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \left(\frac{1}{2}\tilde{A}^1\psi\right)(z; \bar{z}, \eta) + S(\tilde{A}_2\psi)(z; \bar{z}, \eta) \quad \text{on } \pi^{-1}(U_0)$$

$$= \frac{\partial \psi_0}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2}\tilde{A}^0\psi - \frac{1}{2}\tilde{A}^1\psi \quad \text{on } \pi^{-1}(U_0)$$

で、well-defined は $\psi_0(z; \bar{z}, \eta) = \psi(\bar{z}; \bar{z}, \eta)$ 。

(e) ψ が接続 ∇ covariant constant な V の section で 1 次独立
に定められる。すなはち ψ が V の global frame である。

(ψ の選択には $GL(k, \mathbb{C})$ の自由度がある)。方程 ψ bundle Automorphism \tilde{A}^1 が
行列表示式を。 ψ の転置を $A_0(z), A_1(z), A_2(z)$ とする
次の式が成り立つことを示す。

$$\begin{cases} (\eta + A_0(z) + SA_1(z) + S^2 A_2(z)) \begin{pmatrix} \psi(z; \bar{z}, \eta) \\ \vdots \\ \psi_k(z; \bar{z}, \eta) \end{pmatrix} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{1}{2}A_1(z) + S A_2(z) \right) \right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_k \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

(f)

$$\frac{\partial}{\partial z} (A_0 + SA_1 + S^2 A_2) = [A_0 + SA_1 + S^2 A_2, \frac{1}{2}A_1 + SA_2]$$

を示す。(Nahm 方程式の Lax 表示)

(g)

今のがはこの像数式に等しくなくてはならぬことを示す。

$$(h) \begin{cases} A_0 = T_1 + i T_2 \\ (2.21) \quad A_1 = -2i T_3 \\ A_2 = T_1 - i T_2 \end{cases}$$

T_1, T_2, T_3 を走らすと, Nahm 方程式 (2.3) を満たす
(i) T_i たゞは条件 (2.6) (2.7) を満たすことを示す。

命題 (2.22)

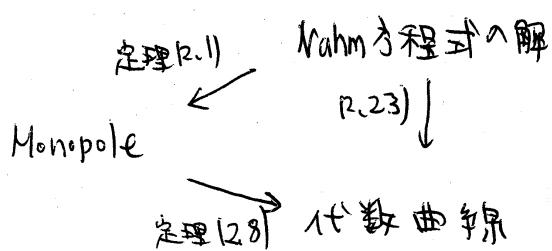
今、帰る $\eta + A_0(z)$ は $A_i(z)$ の定数倍

$$(2.23) \quad \det (\eta + A_0(z) + s A_1(z) + s^2 A_2(z)) = 0$$

これが、Lax 表示がこれを満たすときの η に関する式にな
ったが、これは最初の代数曲線の standard chart 上にあ
る子表示式と一致する。

命題 (2.24)

右の図式は可換



命題 (2.25)

命題 (2.20) はまだ、代数曲線 S に $\pm \zeta$ 上条件 (2.16) (2.18) を加えたとき、 ζ が λ の根または μ の根ではないときには (2.4) (2.5) を満たす。

命題 (2.22) (2.24) (2.25) の証明 + [8]

さて、Hitchin はさらに、命題 (2.22) の Nahm 方程式の解 \rightarrow 代数曲線 の対応が、非線型方程式に $\pm \zeta$ を入れて線型化する代数曲線 (リーマン面) を作る Adler - Moerbeke の理論 (Adler - Moerbeke, Adv. Math. 38, 318-379 (1980)) の構造 λ, μ, ν と ζ までも言及している ([8])。即ち、Nahm 方程式の解に $\pm \zeta$ (2.23) が定義される代数曲線を考える。その時 λ, μ, ν は、行列 $A_0(\zeta) + \zeta A_1(\zeta) + \zeta^2 A_2(\zeta)$ の固有値となる。曲線 (2.23) の各点 (t, η) 上で ζ の固有空間を対応させ、曲線上に line bundle が構成されます。リーマン面上の line bundle には、 ζ の Jacobi 多様体上の点が対応します。 ζ が動くと曲線 (2.23) は変わります (が行列 $A_0(\zeta) + \zeta A_1(\zeta) + \zeta^2 A_2(\zeta)$ は変化するが、固有値も変わらない)。line bundle が動く。即ち、ヤコビ多様体上の運動が得られます。これが実は直線運動に至ります。ところが、 ζ が λ へ近づくと、そこまで、この線型化の理論は、リーマン面、 ζ の上の基準点、 $\lambda = \mu$ の漸近挙動、positive divisor が λ で一分为 2,

方程式の準周期解を構成する Krichever の理論 ([3] [4] [6] [10])
と表裏一体の式、命題 (2.20) の証明の概略を説明した対応を
Krichever の理論との仕事はよう間に書き直せばがよ、うう
してたゞより constructive 両者の関係も明確になり、う(2),
Nahm 方程式の解をテーラー級数を用ひ explicit に書いた期待
が叶った。

次の章 ゴ、二ルを実行する。

§3 spectral curve × Nahm 方程式

記号は前章と同じとする。S を書けば、第 1 (2.9) (2.10) (2.11)
(2.13) (2.15) を満たすことをにする。

要はコホモロジーの条件 (2.15) を適当な形に翻訳し、命題
(2.20) の証明の概略 (e) が定まる所を、Baker-Akhiezer 函数と
していふる事にある。

まず、 $\psi \in H^0(S, L^{\otimes k} \pi^* \mathcal{O}(k-1))$ の特徴付けてみよう。

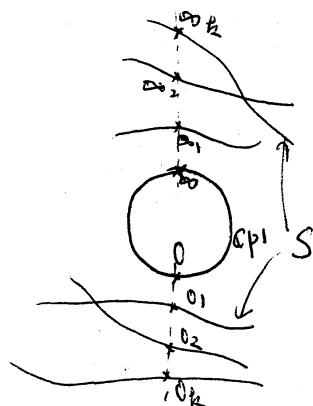
$$\{0_1, \dots, 0_k\} = S \cap \pi^{-1}([0, 1]) \subset \pi^{-1}(U_0)$$

$$\{\infty_1, \dots, \infty_k\} = S \cap \pi^{-1}([1, \infty]) \subset \pi^{-1}(U_{\infty})$$

である。当然

$$S \cap \pi^{-1}(U_0) = S - \{0_1, \dots, 0_k\}$$

$$S \cap \pi^{-1}(U_{\infty}) = S - \{\infty_1, \dots, \infty_k\}$$



である。一般には O_i の値たちが互いに異なることを限らないが、条件 (2, 10) より genetic には異なるので、以下、 O_i の値はすべて相異なることとする。

$T\mathbb{C}P^1$ 上の line bundle $L^{\otimes k} \pi^* O(k-1)$ と、 $\pi^{-1}(U_0) \cup \pi^{-1}(U_\infty)$ 上では trivial だから、 $\psi \in H^0(S, L^{\otimes k} \pi^* O(k-1))$ と

$S - \{0_1, \dots, 0_k\}$ 上函数表示したのを ψ_0

$S - \{0_1, \dots, 0_k\}$ 上函数表示したのを ψ_∞

とおく。

$L^{\otimes k}$ は、transition function $e^{\frac{\eta}{3}z}$ を定義したのだから
 $\psi_0(z; s, \eta) = e^{\frac{\eta}{3}z} s^{k-1} \psi_\infty(z; s, \eta)$ on $\pi^{-1}(U_0) \cap \pi^{-1}(U_\infty)$
 が成り立つ。このことから函数 ψ_0 の特徴付け (2, 10) の命題が容易に帰結する。

命題 (3.1)

$\psi \in H^0(S, L^{\otimes k} \pi^* O(k-1))$ と $S - \{0_1, \dots, 0_k\}$ 上函数表示したのを ψ_0 とおくと、次の条件を満たす。

(3.2) $S - \{0_1, \dots, 0_k\}$ 上正則

(3.3) $O_i = (0, \eta_i)$ で真性特異点を持つ

O_i の近傍では、 S の局所座標と projection $\pi : T\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$

$(s, \eta) \mapsto s$ の制限で入る s は、 η と同じ記号を表す。

$$(3.4) \quad \psi_0(z; s) = e^{-\frac{\eta_i}{3}z} \left(\frac{s^{\eta_i}}{s^{k-1}} + \frac{s^{\eta_i}}{s^{k-2}} + \dots \right)$$

γ_0 の近傍で展開する。

(2.15) $H^0(S, L^k \otimes \pi^* O(k-2)) = 0$ も同じよろしく考え、次の命題を得る。

命題 (3.5)

(3.2) (3.3) γ が L , $k \geq 0$ の近傍で

$$e^{-\frac{\gamma}{s}z} \left(\frac{\gamma^{(1)}(z)}{s^{k+2}} + \frac{\gamma^{(2)}(z)}{s^{k+3}} + \dots \right)$$

γ を展開する函数は恒等的で 0 (が成り立つ)。

$\gamma = z^t$ が一次独立系 $\psi_1, \dots, \psi_k \in H^0(S, L^k \otimes \pi^* O(k-1))$ に成り立つ。行列 $A(z)$ たちを、縦やく + ル $(\psi_1, \dots, \psi_k)^t$ と定めると結果、 O_i の展開が $s^{-(k-1)}$ から始まるよろしく決定すれば、 γ が自動的に 0 になってしまふわけである。以下、この原理を詳しく述べよう。

まず一次独立系 ψ_1, \dots, ψ_k が γ の一次のよろしく正規化されたものである。

$$\psi_j(z; s, \eta) = e^{-\frac{\gamma}{s}z} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial z} + \frac{\gamma^{(1)}(z)}{s^{k+2}} + \frac{\gamma^{(2)}(z)}{s^{k+3}} + \dots \right) \quad \text{near } O_i$$

他の frame $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_k$ は、ある $GL(k, \mathbb{C})$ -値函数 $B(z)$ を用ひて

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_k \end{pmatrix}$$

の形に書かれた S における正規化された ψ_j たちが命題 (2.20) [e]

2) 足末子 ψ_j と異な、2) ならば (実際異な、2) のたゞ)
後が 3) B 因式修正されたり (後述)。

Remark (3.6)

§ 4 で、 $k=2$ の場合に付、二つの函数を用ひて具体的に
 ψ を与えよ。

± 2. 総ベクトル $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)^t$ も各 O_i のまわりで展
開し、次のよろに行列表示 (2) おくと、以後の計算は見や
す。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(z; \zeta, \eta) \\ \vdots \\ \psi_k(z; \zeta, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{near } O_1 & \cdots & \text{near } O_k \\ e^{-\frac{\eta_1}{3}z} \left(\frac{1}{z^{k-1}} + \frac{\bar{\gamma}_1^{k-1}(z)}{z^{k-2}} + \dots \right) & \cdots & e^{-\frac{\eta_k}{3}z} \left(\frac{\bar{\gamma}_1^{k-1}(z)}{z^{k-2}} + \frac{\bar{\gamma}_2^{k-1}(z)}{z^{k-3}} + \dots \right) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-\frac{\eta_1}{3}z} \left(\frac{\bar{\gamma}_1^{k-1}(z)}{z^{k-2}} + \frac{\bar{\gamma}_2^{k-1}(z)}{z^{k-3}} + \dots \right) & \cdots & e^{-\frac{\eta_k}{3}z} \left(\frac{1}{z^{k-1}} + \frac{\bar{\gamma}_1^{k-1}(z)}{z^{k-2}} + \dots \right) \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \frac{1}{z^{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^{k-2}} \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1^{k-1}(z) & \cdots & \bar{\gamma}_{k-1}^{k-1}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\gamma}_1^{k-1}(z) & \cdots & \bar{\gamma}_{k-1}^{k-1}(z) \end{pmatrix} + \cdots \right\} \times \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta_1}{3}z} \\ \vdots \\ e^{-\frac{\eta_k}{3}z} \end{pmatrix}$$

今は O_1, \dots, O_k が真性特異点を持ち、 $\infty_1, \dots, \infty_k$ の近傍では
正則な函数 ψ_∞ を使、2) のごとく、次の命題が目標になる。

命題 (3.7)

ある一次独立な $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_k$ に対し、次を満たす行列値函数
 $A_0(z), A_1(z), A_2(z)$ で、 $\tilde{\psi}_j$ たちの特異点 (i) における漸近挙動が

構成式 ψ を定義する。

$$\left(\frac{1}{S^2} A_0 + \frac{1}{S} A_1 + A_2 \right) \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix} = -\frac{\eta}{S^2} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{S} A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix} = \frac{2}{J^2} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix}$$

正規化した ψ が ψ の上に直線は無理で、次の命題を最初に示すことを示す。

命題(3.3)

正規化した ψ が frame ψ_1, \dots, ψ_k に対する ψ 、次をもつて行列値函数 $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \hat{A}_0, \hat{A}_1$ が $\psi \neq 0$ の運動が構成式 ψ を定義する。

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{S^2} \tilde{A}_0 + \frac{1}{S} \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 \right) \psi = -\frac{\eta}{S^2} \psi \\ \left(\frac{1}{S} \hat{A}_0 + \hat{A}_1 \right) \psi = \frac{2}{J^2} \psi \end{cases}$$

証明

\hat{A}_i を示す。上、下側の式の右辺を O_{ik} のまわりの展開(左側を表す)

$$\begin{aligned} \frac{2}{J^2} \psi &= \left\{ \frac{1}{S^2} \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ \vdots \\ -\eta_k \end{pmatrix} + \frac{1}{S^{k-1}} \begin{pmatrix} \frac{\eta_1}{S} & \cdots & \frac{\eta_k}{S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\eta_1}{S^{k-1}} & \cdots & \frac{\eta_k}{S^{k-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ \vdots \\ -\eta_k \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{S^{k-2}} \left(\begin{pmatrix} \frac{\eta_1}{S} & \cdots & \frac{\eta_k}{S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\eta_1}{S^{k-1}} & \cdots & \frac{\eta_k}{S^{k-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ \vdots \\ -\eta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2\eta_1}{S^2} & \cdots & \frac{2\eta_k}{S^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{2\eta_1}{S^{k-1}} & \cdots & \frac{2\eta_k}{S^{k-1}} \end{pmatrix} \right) + \cdots \right\} \times \begin{pmatrix} e^{\frac{\eta_1}{S^2}} \\ \vdots \\ e^{\frac{\eta_k}{S^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よ、
よ、

$$(3.9) \quad \hat{A}_0 = \begin{pmatrix} -\eta_1 & \dots \\ & -\eta_k \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{3} \hat{A}_0 \right) \Psi = \left\{ \frac{1}{3^{k+1}} \left[\left(\frac{z^k}{\eta_1} \right), \left(\begin{matrix} -\eta_1 & \dots \\ & -\eta_k \end{matrix} \right) \right] + \frac{1}{3^{k+2}} \left(\dots \right) + \dots \right\} \times \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta_1}{3} z} \\ \vdots \\ e^{-\frac{\eta_k}{3} z} \end{pmatrix}$$

と z^{-k} の項が消せた。さらに

$$(3.10) \quad \hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0, & (\eta_1 - \eta_2) \frac{z^{k+1}}{3}, & \dots, & (\eta_1 - \eta_k) \frac{z^{k+1}}{3} \\ (\eta_2 - \eta_1) \frac{z^{k+1}}{3}, & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ (\eta_k - \eta_1) \frac{z^{k+1}}{3}, & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{3} \hat{A}_0 - \hat{A}_1 \right) \Psi = \left\{ \frac{1}{3^{k+2}} \left(\dots \right) + \frac{1}{3^{k+3}} \left(\dots \right) + \dots \right\} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta_1}{3} z} \\ \vdots \\ e^{-\frac{\eta_k}{3} z} \end{pmatrix}$$

と z^{-k-1} の項も消せた。命題(3.5) より右辺は自動的に 0 となり、式を式が成立。

上例も同様だが、 $\eta \neq 0$ のまわり $\eta = \eta_i + \eta'_i z + \eta''_i z^2 + \dots$ 展開のまわり必要がある。結果だけ、しかも $k=2$ の場合

だけ書くておく。

$$(3.11) \quad \tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} -\eta_1 & \dots \\ & -\eta_k \end{pmatrix}$$

$$(3.12) \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} -\eta_1 & (\eta_1 - \eta_2) \bar{\eta}_1^2 \\ (\eta_2 - \eta_1) \bar{\eta}_1^2 & -\eta_2 \end{pmatrix}$$

$$(3.13) \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} -\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1) \bar{\eta}_1^2 \bar{\eta}_1^2 & (\eta_2 - \eta_1)(\bar{\eta}_1^2 \bar{\eta}_1^{2,1} - \bar{\eta}_2^{1,2}) + (\eta_1 - \eta_2) \bar{\eta}_1^2 \\ (\eta_1 - \eta_2) \bar{\eta}_1^{2,1} \bar{\eta}_1^{1,1} - \bar{\eta}_2^{1,1}) + (\eta_1 - \eta_2) \bar{\eta}_1^{2,1} & -\eta_2^2 + (\eta_1 - \eta_2) \bar{\eta}_1^{2,1} \bar{\eta}_1^{1,2} \end{pmatrix}$$

七本代入、上側の式を得た。)

命題 (3.7) を示す前段、frame 変換の公式を作、証明。

補題 (3.14)

4. \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 の命題 (3.3) の式と式 (2.11) とを用いて、frame B に対する式は次が成り立つ。

$$\left(\frac{1}{J^2} B \tilde{A}_1 B^{-1} + \frac{1}{J^2} B \tilde{A}_2 B^{-1} + B \tilde{A}_2 B^{-1} \right) B \Psi = -\frac{\eta}{J^2} B \Psi$$

$$\left(\frac{1}{J^2} B \tilde{A}_1 B^{-1} + \frac{2B}{J^2} B^{-1} + B \tilde{A}_2 B^{-1} \right) B \Psi = \frac{2}{J^2} (B \Psi)$$

証明は $\frac{2}{J^2} (B \Psi) = \frac{2B}{J^2} \Psi + B \frac{2}{J^2} \Psi$ より容易にわかる。

命題 (3.7) の証明

命題 (3.8) では $\frac{1}{2} \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1$ 一般には成り立たない。そこで frame 変換 (2.11) $B \tilde{A}_1 B^{-1} = B \tilde{A}_1 B^{-1} + \frac{2B}{J^2} B^{-1}$ が成り立つよ。したがって $\frac{1}{2} \tilde{A}_1 = B \left(\frac{1}{2} \tilde{A}_1 - \tilde{A}_1 \right)$ と線型常微分方程式が常微分方程式となる。

以上九点を示す。

定理 13.15)

$(2,9)(2,10)(2,11)(2,13)(2,15)$ もまた S 上の $H^0(S, L^{\otimes n} \pi^*(\mathcal{A}_{k-1}))$ の元中, \sim_{4k} を正規化して置き, その標準点のまわりで展開し, $(3,9)(3,10)(3,11)(3,12)(3,13)$ で $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4$ を求め, すると線型常微分方程式 $\frac{d^2B}{dz^2} = B(\frac{1}{2}\hat{A}_1 - \hat{A}_0)$ を解くと, $A_k = B\hat{A}_k B^{-1}$ とおき、最後に $(2,21)$ で T_1, T_2, T_3 を定めれば, Nahm 方程式の解が得られる。

Remark 13.16)

(a) 方程式 $\frac{d^2B}{dz^2} = B(\frac{1}{2}\hat{A}_1 - \hat{A}_0)$ 上の初期値に関する自由度、つまり定数行列 $P \in GL(k, \mathbb{C})$ を左からかけた $(B \rightarrow PB)$ 自由度がある。これが命題 13.20 の最後、証明の概略(c) で示された自由度にほかならない。

(b) 定理 13.15) のとおり、Nahm 方程式の解は、コンパクトなマニフェスト S 上の基準点 $0_1, \dots, 0_k$, $z = z$ の挙動 $e^{-\frac{\eta_k}{3}z}$, $\dots, e^{-\frac{\eta_1}{3}z}$, および positive divisor $J_1 = (k-1)0_1 + (k-2)0_2 + \dots + (k-2)0_k$, $\dots, J_{k-2} = (k-2)0_1 + \dots + (k-2)0_{k-1} + (k-1)0_k$ で $\exists \tau \in \mathbb{P}^1$ とする。

Baker-Akhiezer 関数 (Baker-Akhiezer bi-point 関数) ψ_1, \dots, ψ_k を通じて構成され、 $\psi_i = \psi_i(z, \tau)$ である。この仕組みは [3][4][6][10] と全く同じである。命題 13.7) の方程式も成り立つ。

マン面 S は、いくつもの条件が必要だ。たとえば、

Nahm 方程式も、多成分 KP hierarchy の reduction にな、
なる。ただし、Monopole の topological charge が行列の並びで
反映（=）される。

§4 Nahm 方程式の解の表示

この章では、 $g = 2$ の場合に、§3 の正规化された frame
 ψ_1, ψ_2 の具体的表示を与える。 g が一般の場合には、条件
付生（予想を含む形）を最後に記す。

以下、spectral curve S は non-singular (コンパクトリーマン
面) であると仮定する。

まず、記号とリーマン面に関するよく知られた結果をまとめ
ておく。

一般に、 S が genus g のコンパクトリーマン面の時、

$H_1(S, \mathbb{Z})$ の生成元 $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \beta_g$ を交点数が $\alpha_i \times \alpha_j = \beta_k \times \beta_l$
 $= 0, \alpha_i \times \beta_j = \delta_{ij}$ とする。

コンパクトリーマン面上の正則な 1-form の次元は genus g
等しい。この basis w_1, \dots, w_g で $\int_{\alpha_j} w_i = \delta_{ij}$ を満たすよう
に決める。 $T_{jk} = \int_{\beta_j} w_k$ もリーマン面の周期行列となる。

$w(P, t_k)$ は、 S 上の 1 点 P が位置の pole、他には正則な

1-form (2種の Abel 微分) $\omega = \sum_{j=1}^g w_j(p, t_k) dz_j$
 $t \in \mathbb{C}^k$ に $w_j(p, t_k)$

リーマン面 S 上の ω は $\omega = \sum_{j=1}^g w_j(p, t_k) dz_j$ で表される。

上の 正則函数 ω

$$(4.1) \quad \theta(\mu) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^g m_j u_j + \pi i \sum_{j,k=1}^g \tau_{jk} m_j m_k \right)$$

$m = (m_1, \dots, m_g)$ τ_{jk} は S の周期行列

τ_{jk} は下記の定義によると $\tau_{jk} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \omega_j$ である。

ω は Γ -一周像。即ち Γ は S 上の ω の多様体 \mathbb{C}^g/Γ ($\Gamma = \left\{ \sum_{j=1}^g m_j e_j + \sum_{j=1}^g m_j \tau_j \mid m_j \in \mathbb{Z}, e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T, \tau_j = (\tau_{1j}, \dots, \tau_{gj})^T \in \mathbb{C}^g \right\}$) の写像で、 $p \in S$ に対し

$$\omega(p) = \begin{pmatrix} s_{p,1}^1 \omega_1 \\ \vdots \\ s_{p,g}^1 \omega_g \end{pmatrix}$$

が定める八つの値を表す。ここで p_0 は S 上の基準点 (= 1 個決めておく) なら \mathbb{C}^g 1 の写像であると積分路の通り方によらずに依存しない。ヤコビ多様体 Γ の写像であると well-defined である。

且つ $k=2$ の時、 genus は $(2, 14)$ たり $(k-1)^2 = 1$ である。

定理 (4.2)

次の 2 つの函数 (ラマーター $\varphi \in (0, 2)$ を含む S 上の函数)

ψ_1, ψ_2 が正規化した $H^0(S, L^{\otimes k} \otimes \pi^* O(k-1))$ の frame も入る。

$$\begin{aligned}\psi_1(z; p) &= e^{-z \left\{ \eta_1 \int_{\beta}^p w(0_1, 2) + \eta_2 \int_{\beta}^p w(0_2, 2) + C_1 \right\}} \\ &\times \frac{\Theta(w(p) - w(0_1) - zv + k) \frac{d}{dz} \Theta(w(p) - w(0_1) + k) \Big|_{p=0_1}}{\Theta(w(p) - w(0_1) + k) \quad \Theta(-zv + k)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(z; p) &= e^{-z \left\{ \eta_1 \int_{\beta}^p w(0_1, 2) + \eta_2 \int_{\beta}^p w(0_2, 2) + C_2 \right\}} \\ &\times \frac{\Theta(w(p) - w(0_2) - zv + k) \frac{d}{dz} \Theta(w(p) - w(0_2) + k) \Big|_{p=0_2}}{\Theta(w(p) - w(0_2) + k) \quad \Theta(-zv + k)}\end{aligned}$$

ただし, $\{0_1, 0_2\} = S \cap \pi^{-1}([0, 1]) \subset \pi^{-1}(v)$ $O_i = (0, \eta_i)$

$p_0 \neq s$ の基準点 \Rightarrow 任意に 1 個選べる。

$w(0_1, 2)$ は, 0_1 が局所座標 γ (projection の制限) で

$-\frac{1}{2}ds$ と v の主要部をもつ 2 種の $\gamma -$ ドル微分が正規化

される。

C_1, C_2 はある定数

$$v = \frac{1}{2\pi i} \left(\eta_1 \int_{\beta}^p w(0_1, 2) + \eta_2 \int_{\beta}^p w(0_2, 2) \right)$$

k は $1 - g$ ン定数。又 g genus $\Rightarrow a \geq k = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}g$

$\frac{d}{dz} \Theta(w(p) - w(0_1) + k) \Big|_{p=0_1}$ は $\gamma -$ ドル写像 γ と Θ 関数の合成を定義する $1 - g$ ン面上の函数を 0_1 のまわりの局所座標 γ を表す (大時 γ による 0_1 の微分倍数)

証明の概略

(a) well-defined

積分路の γ が γ に依存しないことは、モト一ア γ が γ には

積分値が零か否か事とテータ函数の公式が容易に示され
る。

(b) $S - \{0_1, 0_2\}$ 上述則

ψ_j の形と、テータ函数との一般論より $\theta(\omega(p) - \omega(0) + k)$
は 0 と ω の半位の 0 点を持つ事が、たやすくわかる。

(c) $O_{1,2}$ の挙動

$$\Im e^{\frac{\pi i}{3}z} \psi_j(z:p) \Big|_{p=0_1} = \partial \psi_j$$

を用せば $\partial \psi_j$ 、 $\Im e^{\frac{\pi i}{3}z} \psi_i(z:p)$ を適当に定めれば容易に示
される。

系 (4.3)

以下の計算に必要な ψ_j の展開項は次のようにならう。

$$\psi_1^{(r)}(z) = \frac{1}{2\pi} \left(e^{\frac{\pi i}{3}z} \psi_1(z:p) \right) \Big|_{p=0_1} \quad r=1, 2$$

$$\psi_1^{(r)}(z) = \left(e^{\frac{\pi i}{3}z} \psi_1(z:p) \right) \Big|_{p=0_1} \quad r=1, 2$$

$$\psi_2^{(r)}(z) = \frac{1}{2\pi} \left(e^{\frac{\pi i}{3}z} \psi_2(z:p) \right) \Big|_{p=0_2} \quad r=1, 2$$

最後に左の一般の場合に触れておく。positive divisor D の倍数

$$D = (k-1)O_1 + (k-2)O_2 + \dots + (k-2)O_k$$

...

$$D = (k-2)O_1 + \dots + (k-2)O_{i-1} + (k-1)O_i + (k-2)O_{i+1} + \dots + (k-2)O_k$$

ω が π 了。 $\deg \partial_i^k = (k-1)(k-2) + k - 1 = (k-1)^2 = \text{genus } \omega$ である。

定理 (4.4)

$\partial_1, \dots, \partial_k$ が一般因子なら

$$\begin{aligned} \phi_i(\omega p) &= e^{-\sum \left\{ \eta_1 \int_{P_1}^p w(0, 2) + \dots + \eta_k \int_{P_k}^p w(0, 2) + c_i \right\}} \\ &\times \frac{\Theta(w(p) - w(\partial_i)) - \varepsilon v + k}{\Theta(w(p) - w(\partial_i) + k)} \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (\Theta(w(p) - w(\partial_j) + 1))_{p=\partial_j}}{\Theta(w(p) - w(\partial_i) - \varepsilon v + k)} \\ \Gamma &= \left[\frac{1}{2\pi i} \left(\eta_1 \int_{P_1} w(0, 2) + \dots + \eta_k \int_{P_k} w(0, 2) \right), \dots, \frac{1}{2\pi i} \left(\eta_1 \int_{P_1} w(0, 2) + \dots + \eta_k \int_{P_k} w(0, 2) \right) \right]^T \end{aligned}$$

が正規化され frame が π 了。

証明は定理 (4.2) と同じである。

Remark (4.5)

spectral curve の条件 9, 10 (12, 15) が ∂_i の一般分布
でこれが満たされたことはないかと思ふが、5つとこの証明は
まだない。

あとがき

以上の内容は、[14] とほぼ同じであるが、紙数の関係上、
以下が簡略化されてしまった。

なお、§2 の結果に ω は、[1] の解説が非常にわかり
やす。

References

- [1] Atiyah,M.F.; Geometry of monopoles, Monopoles in Quantum field theory, World Scientific, Singapore, 3-20 (1982)
- [2] Corrigan,E.; Goddard,P.; Construction of instantons and monopole solutions and reciprocity, Ann. Phys. 154, 253-279 (1984)
- [3] Date,E.; Multi-soliton solutions and quasi-periodic solutions of nonlinear equations of Sine-Gordon type, Osaka J. Math. 19, 125-158 (1982)
- [4] 伊達候朗, 田中俊一 ; $k_d V$ 方程式, 紀伊國屋書店
- [5] Donaldson,S.K.; Nahm's equations and the classification of monopoles, Comm. Math. Phys. 96, 387-408 (1984)
- [6] Dubrovin,B.A.; Theta functions and nonlinear equations, Russ. Math. Surv. 36:2 11-92 (1981)
- [7] Hitchin,N.J.; Monopoles and geodesics, Comm. Math. Phys. 83, 579-602 (1982)
- [8] Hitchin,N.J.; On the construction of monopoles, Comm. Math. Phys. 89, 145-190 (1983)
- [9] Jaffe,A.; Taubes,C.H.; Vortices and monopoles, Boston: Birkhauser, (1980)
- [10] Krichever,I.M.; Methods of algebraic geometry in the theory of nonlinear equations, Russ. Math. Surv. 32:6, 185-213 (1977)

- [11] Nahm,W.; The algebraic geometry of multimonopoles, preprint
- [12] Nahm,W.; Self-dual monopoles and colorons, preprint
- [13] 島谷健一郎: Monopole に関する Hitchin, Donaldson, Nahm の結果について,
低次元多様体の幾何学的諸相 (1985)
- [14] 島谷健一郎: Monopole の spectral curve と Nahm 方程式: 修士論文
- [15] Ward,R.; A Yang-Mills-Higgs monopole of charge 2, Comm.
Math. Phys. 79, 317-325 (1981)