数理解析研究所講究録
622巻 1987年 73-94

C^*環のゼータ関数

東工大・理　黒川信重 (N. Kurokawa)

数論は数論的環（基本的には $\mathbb{Z}$ 上有限生成の可換環）のゼータ関数の研究と考えられるが，同様にして「C^*環のゼータ関数」が考えられるのではないかと思われます。ここでは基本的な例として Selberg [13] によって研究され，Smale [14] によって力学系のゼータ関数として捉え直され一般化されたゼータ関数の特殊値について Lichtenbaum 予想 [10] の類似を考える。

$\boxed{\S 1}$ 最も基本的なゼータ関数はリーマン・ゼータ関数
$\zeta(s)=\prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ である。ここで p は素数全体を動く。この無限積（の拡張）をオイラー積という。
$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ と展開され，オイラーにより

$$\zeta(2)=\pi^2/6 \quad (\zeta(-1)=-1/12),$$

$$\zeta(4)=\pi^4/90 \quad (\zeta(-3)=-1/120),\ \cdots$$

が知られている。オイラーによる関数等式により $\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ の値は初等的因子を除いて一致する。
［オイラーの結果は1730〜50頃に得られていた。］
オイラーの特殊値に関する結果は Quillen を経て Lichtenbaum [10] により「ゼータ関数の特殊値はK群で書ける」という予想 (slogan) に一般化された。この予想は，現在も不明な $\zeta(3)$，$\zeta(5)$，$\cdots$ の明確な

表示も含んでおり詳しくは次の形：整数 $m \geqq 1$ に対して $s=1-m$ におけるテイラー展開は

$$\zeta(s) = \pm \frac{\# K_{2m-2}(\mathbb{Z})_{tors}}{\# K_{2m-1}(\mathbb{Z})_{tors}} \times (2\text{ベキ}) \times \mathrm{Reg}(K_{2m-1}(\mathbb{Z})) \times (s+m-1)^{\mathrm{rank}\, K_{2m-1}(\mathbb{Z})} + \cdots$$

。

ここで $K_n(\mathbb{Z})$ は Quillen の K 群，$\mathrm{Reg}(K_n(\mathbb{Z}))$ は regulators で $\mathrm{rank}\, K_n(\mathbb{Z})=0$ のときは 1。例えば $K_0(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$，$K_1(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，$K_2(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，$K_3(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$ であり

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} = -\frac{\# K_0(\mathbb{Z})_{tors}}{\# K_1(\mathbb{Z})},$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} = -\frac{\# K_2(\mathbb{Z})}{\# K_3(\mathbb{Z})} \times 2 .$$

なお，2ベキまで込めた正確な予想は Lichtenbaum [10a, b] にある。さらに，この予想は $\mathbb{Z}$ を一般の代数的整数環 $\mathcal{O}_F$（F は有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体，$\mathcal{O}_F$ は $\mathbb{Z}$ の F における整閉包）にしてもそのままの形で成立すると予想されている。ただし，ゼータ関数は

$$\zeta(s, \mathcal{O}_F) = \prod_{p \in \mathrm{Max}(\mathcal{O}_F)} (1 - N(p)^{-s})^{-1}, \quad N(p) = \#(\mathcal{O}_F/p),$$

$\mathrm{Max}(\mathcal{O}_F)$ は $\mathcal{O}_F$ の極大イデアル空間。例えば，$s=0$

では 次のように確かめられる (Dedekind 1877):

$$\zeta(s, \mathcal{O}_F) = -\frac{h}{w} R \cdot s^r + \cdots ,$$

$h = $ (類数) $= \# K_0(\mathcal{O}_F)_{tors}$,

$w = $ ($\mathcal{O}_F$ 内の 1 のベキ根の個数) $= \# K_1(\mathcal{O}_F)_{tors}$,

$R = $ (通常の regulator) $= \mathrm{Reg}(K_1(\mathcal{O}_F))$,

$r = \mathrm{rank}\, K_1(\mathcal{O}_F)$ 。

一般の $s = 1-m$ での様子に関しては Borel [4], Soulé [15], Thomason [17] の結果がありかなり良くわかってきている。これらの予想は $\binom{\mathbb{Z}}{\mathcal{O}_F}$ を $\mathbb{Z}$ 上有限生成の可換環 A (数論的環) にした場合に Beilinson [1], Bloch [3] [3a], Deligne [5] 等により一般化されている。加藤 [7] に詳しい解説がある。なお, $\zeta(s, A)$ は次のように定義される:

$$\zeta(s, A) = \prod_{p \in \mathrm{Max}(A)} (1 - N(p)^{-s})^{-1} , \quad N(p) = \#(A/p) 。$$

これは Hasse-Weil のゼータ関数と呼ばれるが, 環 A の性質が $\zeta(s, A)$ の性質に良く反映している点が最も重要である。また, その特殊値に関する予想も A の K 群 $K_n(A)$ を用いて表わされる。同様にして, C^* 環などを含む, さらに一般の環 A に対して

ゼータ関数 $\zeta(s,A)$ を構成することにより，Aの性質を $\zeta(s,A)$ を用いることにより記述できないかと考えることは自然なように思われる。とくにC^*環の場合にはK群が集中的に研究されていることもあり手掛りがあると思われる。

§2 さて，ゼータ関数の特徴として次の3つを期待したい。

① オイラー積表示をもつ。

② 特殊値がK群でわかる。

③ 全s平面で有理型で，零点，極が規則的に分布する。

上記の数論的ゼータ関数は①，②，③を満たすと思われるが，同様な性質をもつ，他の型のゼータ関数としてSelberg [13] によるゼータ関数がある。ゼータ関数一般については岩波数学辞典（第3版）の「ゼータ関数」の項を参照下さい。セルバーグゼータ関数は群のゼータ関数として捉える方法と力学系のゼータ関数として捉える方法とがあり，どちらも重要である。ここでは，まず後者によって解説し，後で特殊値を扱うときに前者による見方をする。

Smale [14] による力学系のゼータ関数の構成法は

次のとおり。Mを(コンパクト)空間，$X:\mathbb{R}\to \mathrm{Aut}(M)$を(位相)力学系とする。このとき$X$の(セルバーグ)ゼータ関数を

$$\zeta(s,X)=\prod_{p\in \mathrm{Per}(X)}(1-N(p)^{-s})^{-1}$$

と定義する。ここで

$$\mathrm{Per}(X)=\{\ p=\mathbb{R}\cdot m \mid \mathbb{R}_p=\mathbb{R}_m=\ell(p)\mathbb{Z},\ 0<\ell(p)<\infty\}$$
$$=\{\text{periodic orbits 全体}\},$$

$N(p)=e^{\ell(p)}>1$。ただし，$\mathbb{R}_m$はisotropy群(stabilizer)。このゼータ関数の特殊な場合に関しては(①)③はSelbergにより古典的に知られており，特殊値に関する②についても様々のことが知られはじめている——とくに最近になって素粒子論との関連において([9f]等)。力学系のゼータ関数についてはSmale[14]，Ruelle[12]，砂田[16]を参照下さい。例えばRuelle[12]によりXが実解析的Anosov流のとき$\zeta(s,X)$は全s平面で有理型であることが知られている。

このセルバーグ型のゼータ関数をヒントにしてC^*力学系のゼータ関数を考えることができそうに思われる。$X:\mathbb{R}\to \mathrm{Aut}(A)$を$C^*$力学系として，そのゼータ関数$\zeta(s,X)$を$A$が連続関数環$C(M)$の

ときには 上記のセルバーグ型ゼータ関数になるようにする。基本的には C^* 力学系 $X: \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(A)$ に付随する力学系 $\overline{X}: \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Pure}(A))$ を考えればよいと思われる。ここで $\mathrm{Pure}(A)$ は A の pure states の空間であり、左 A-加群の圏 $\mathrm{Mod}(A)$ の simple objects (の同型類) 全体と同一視できる —— この同一視は環のゼータ関数の統一的視点を与える [9aa]。実際、数論的環 A に対しては $\mathrm{Max}(A)$ と $\mathrm{Simple}(\mathrm{Mod}(A))$ とは $p \longmapsto A/p$ によって同一視出き、$\zeta(s, A) = \zeta(s, \mathrm{Mod}(A))$

$$= \prod_{p \in \mathrm{Simple}(\mathrm{Mod}(A))} (1 - N(p)^{-s})^{-1}, \quad N(p) = \# p$$

という明快な定義が得られ、さらに、Lichtenbaum 予想も $K_n(A) = \pi_{n+1}(Q\,\mathrm{Mod}(A))$ であるから大変見通しの良いものとなる。ここで Q は Q-construction = "Quillenfication" で $Q\,\mathrm{Mod}(A)$ は exact category。ゼータ関数を圏のゼータ関数と見ること ([9aa]) はセルバーグ型ゼータ関数を群のゼータ関数と見なしたときにも重要である。(§4)

さて [9] には少し変形した構成を示した。この $\zeta(s, X)$ を $C^*(X) = \mathbb{R} \rtimes_X A$ (C^* 接合積) のゼータ関数 $\zeta(s, C^*(X))$ と見なすこともできると思われる。すると A が Cuntz 環の場合に Quillen-Lichtenbaum

予想の類似が確かめられる([9])。ただし,この構成は完全に望ましいものとは考えられない。ゼータ関数の良い構成にはC^*環の性質に根差した深い研究が必要と思われる。また,AがC^*環,$\sigma\in Aut(A)$("σ": $\mathbb{Z}\to Aut(A)$と同一視する)のときには良く知られたLefshetz固定点定理の類似が期待され,それからゼータ関数が予測される。

$\boxed{\S 3}$ さて,望ましいゼータ関数$\zeta(s, A)$はQuillen-Lichtenbaum予想を満たすべきである(ここでの要請)からその特殊値に関して望まれることを準備しておくことは意味がある。この点で最近知られはじめたセルバーグ型ゼータ関数の特殊値に関する結果は興味深い。次に概観する。(一般論は[9a]-[9f]等にある。)

ここではセルバーグ・ゼータ関数を群のゼータ関数と見なすのが簡明である。いま$M=\Gamma\backslash H$を種数$g\geqq 2$のコンパクトリーマン面(リーマン多様体として)とする;ここで$H=\{z\in\mathbb{C}\mid Im(z)>0\}$は上半平面,$\Gamma=\pi_1(M)$は基本群で$\Gamma\hookrightarrow PSL_2(\mathbb{R})$という埋め込みがリーマン計量から指定される。このときΓの(あるいはMの)セルバーグ・ゼータ関数を

$$Z_\Gamma(s) = \prod_{p \in Prim(\Gamma)} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - N(p)^{-s-n})$$

と定義する。また，$\zeta(s,\Gamma) = \prod_{p \in Prim(\Gamma)} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$

とおく。この2つは $\zeta(s,\Gamma) = \dfrac{Z_\Gamma(s+1)}{Z_\Gamma(s)}$ となっており

実質的には同じものである。上記で $Prim(\Gamma)$ は

Γの素共役類（任意の $m \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$ と任意の

$\gamma \in \Gamma$ に対して $p \neq [\gamma^m]$ となる共役類 p のこと；

ただし $[\gamma^m]$ は γ^m を含む共役類を表わす）全体を

動き，$N(p)$ は $p = [\gamma]$ とすると γ の固有値を

α, α^{-1} （$|\alpha| \geq 1 \geq |\alpha^{-1}|$）としたとき $N(p) = |\alpha|^2$

とおく。（この場合 α は実数となる。）

なお，$Z_\Gamma(s)$，$\zeta(s,\Gamma)$ はリーマン面 $M = \Gamma \backslash H$ の

言葉で書くと $X : \mathbb{R} \to Aut(UM)$ を M の単位接束

$UM (= SM)$上の測地流（geodesic flow）として

$$Z_\Gamma(s) = Z_M(s) = \prod_{p \in Per(X)} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - N(p)^{-s-n}),$$

$$\zeta(s,\Gamma) = \zeta(s,X) = \prod_{\gamma \in Per(X)} (1 - N(p)^{-s})^{-1} = \frac{Z_M(s+1)}{Z_M(s)}$$ である。

さて，$Z_\Gamma(s)$ の特殊値について次の結果が得られる。

定理　整数 $k\geqq 2$ に対して $s=1-k$ における $Z_\Gamma(s)$ のテイラー展開は

$$Z_\Gamma(s)=C_k^{g-1}\det\left(\Delta_\Gamma^k\,\middle|\,S_{2k}(\Gamma)\right)\left(2\pi(s-1+k)\right)^{2\cdot\dim S_{2k}^{hol}(\Gamma)}+\cdots$$

となる。

ここで $z=x+iy$ を上半平面 H 上の変数として

$$S_{2k}(\Gamma)=\left\{f:H\to\mathbb{C}\;\middle|\;\begin{array}{l}① \ f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\left(\frac{cz+d}{c\bar z+d}\right)^k f(z)\\ \text{がすべての}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma\text{に対して成立}\\ ② \ \int_{\Gamma\backslash H}\frac{dx\,dy}{y^2}|f(z)|^2<\infty\end{array}\right\}$$

$$=\left\{y^k g(z)\;\middle|\;\begin{array}{l}① \ g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^{2k}g(z)\\ \text{がすべての}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma\text{に対して成立}\\ ② \ \int_{\Gamma\backslash H}\frac{dx\,dy}{y^2}|g(z)|^2y^{2k}<\infty\end{array}\right\},$$

$$S_{2k}^{hol}(\Gamma)=\left\{y^kg(z)\in S_{2k}(\Gamma)\;\middle|\;g(z):\text{holomorphic}\right\},$$

$$\Delta_\Gamma^k=-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+2iky\frac{\partial}{\partial x}+k(k-1),$$

$$C_k = \exp\Bigl(2\left(k-\tfrac{1}{2}\right)^2 - 4\zeta'(-1) - (2k-1)\log(2\pi) - 2\sum_{m=0}^{k-2}(2k-3-2m)\log(2k-2-m)\Bigr)$$

である。Δ_Γ^k は ラプラス作用素 であり,

$$S_{2k}^{hol}(\Gamma) = \mathrm{Ker}(\Delta_\Gamma^k) = \{f \in S_{2k}(\Gamma) \mid \Delta_\Gamma^k f = 0\},$$

$$\dim S_{2k}^{hol}(\Gamma) = (g-1)(2k-1) \quad (k=2,3,\ldots)$$

となっている。

証明は D'Hoker-Phong [5] (cf. Voros [18] 等) による

$$Z_\Gamma(k) = C_k^{g-1}\det(\Delta_\Gamma^k) \quad (k=2,3,\ldots)$$

と関数等式

$$Z_\Gamma(s) = Z_\Gamma(1-s)\exp\left(2(2g-2)\int_0^{s-\frac{1}{2}}\pi v\tan(\pi v)\,dv\right)$$

を用いればよい。(ただし, D'Hoker-Phong [5] 等には計算ミスがある。) なお, $\det(\Delta_\Gamma^k)$ は $\exp\left(-\frac{d}{ds}\sum_{\lambda>0}\lambda^{-s}\Big|_{s=0}\right)$ で定義する。ここで λ は Δ_Γ^k の正の固有値全体を動く。D'Hoker-Phong の結果は セルバーグ跡公式 (trace formula)

$$\sum_{\lambda} W(\lambda) = \sum_{p} M(p)$$

において $W(\lambda) = $ "$\log \lambda$" とおけば得られる。ここで $W \leftrightarrow M$ はセルバーグ変換（フーリエ変換の一般化）であり，実際には収束性を考慮した修正が必要となる。また，$k=1$ の場合には次のとおり：

$$Z_{\Gamma}(s) = \frac{1}{2\pi} \cdot C_1^{g-1} \det\left(\Delta_{\Gamma}^{1} / S_2(\Gamma)\right) (2\pi s)^{2 \cdot \dim S_2^{hol}(\Gamma) - 1} + \cdots。$$

ただし，$\dim S_2^{hol}(\Gamma) = g$。

さらに g が小さいときには，例えば次の $g=2$ の場合のように，より具体的な事がわかる。

定理 $g=2$ のとき

$$Z_{\Gamma}'(1)^{13} Z_{\Gamma}(2)^{-1} = C' \left| \chi_{10}(\tau_M) \right|^2 (\det \operatorname{Im} \tau_M)^{10}$$

ここで C' は Γ によらない定数，τ_M は $M = \Gamma \backslash H$ の周期行列（τ_M は 2 次の複素対称行列で $\operatorname{Im} \tau_M$ が正定値）で，$\chi_{10}(\tau_M) = \prod_{m:偶} \vartheta_m(\tau_M)^2$ は重さ 10 の種数 2（次数 2）の Sigel cusp form（定数倍を除いて

一意的)。証明は Quillen の方法を拡張した Belavin-Knizhnik [2] による結果

$$\underbrace{(\det \Delta_\Gamma^1)^{13}(\det \Delta_\Gamma^2)^{-1}} = C \cdot |\chi_{10}(\tau_M)|^2 (\det \operatorname{Im} \tau_M)^{10}$$

に D'Hoker-Phong の結果

$$Z_\Gamma'(1) = C_1^{g-1} \det(\Delta_\Gamma^1) \qquad (\ Z_\Gamma(1) = 0\ )$$

$$Z_\Gamma(2) = C_2^{g-1} \det(\Delta_\Gamma^2)$$

を用いればよい。

ここで Quillen (1985) [20] の方法とは 上記の $\boxed{左辺}$ の $\partial\bar{\partial}\log$ を調べることにより ($\equiv 0$ を示し) 左辺 $= |正則|^2$ を示すことである。

このことと,別に示される modular 不変性 とを合わせればよい。

なお,上記のゼータ関数の超版 (super-version) が Manin 達 [11] [O] により考えられ,超弦理論に応用されている。(超弦理論については [9e], [9f] 等を参照下さい。)

$\boxed{\S 4}$ 群・環・圏のゼータ関数の簡単な見方。環 A に対しては左 A 加群の圏 Mod(A) を考え，群 G はそれ自身を 1 個の object からなる圏 $[G]$ とみる（morphisms 全体が G）。すると基本的には $\zeta(s, A) = \zeta_0(s, \mathrm{Mod}(A))$，$\zeta(s, G) = \zeta_1(s, [G])$ と考えられる。ここで，$\zeta_n(s, C)$ は圏 C の n-ゼータ関数で prime (=simple) n-morphisms 上の Euler 積で定義する：$\zeta_n(s, C) = \prod_{p \in P_n(C)} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$。(0-morphism = object，1-morphism = morphism，…）基本予想は

$$\boxed{\zeta_0(s, C) = \zeta_1(s, \pi_1(C))}$$

である。[この予想からいくつかの予想 —（前の②③等）— が確かめられる。]
ただし，一般には C を normed category（ノルム圏）とする必要がある。さらに多重圏 (multiple category) のゼータ関数を考えると多重圏のテンサー積に関して閉じるため多重ゼータ関数の取り扱い等に関し見通しがよくなる。[9aa]
簡単のためここでは 2 つの場合を考える。

$\boxed{4.1}$ <u>圏の基本 0-ノルム (cardinal norm)</u>. C を zero (="null") object 0 をもつ category とする。C の object X は任意の object Y に対して任意の morphism (="arrow") $f: X \to Y$ が zero または monic になるときに simple と呼ばれる。(C が abelian のとき，この条件は X の subobjects が 0 と X のみという通常の条件と同値。)
さらに faithful functor $F: C \longrightarrow \underline{\mathrm{Set}}$ が与えられている

とする。ここで $\underline{Set}$ は集合の category。(言い換えれば C は concrete category。) 簡単のため zero object を持つ concrete category を Z-category と呼び、以下 C は Z-category とする。C の object X は $F(X)$ が有限集合のとき有限であるといい、X のノルムを $N(X)=\#F(X)$ で決める — # は cardinality X と Y が同型な有限 objects なら $F(X)$ と $F(Y)$ は同型だから $N(X)=N(Y)$ となる。したがって有限 object X の同型類 $[X]$ に対して $[X]$ のノルムを $N([X])=N(X)$ によって定めることができる。
いま、$P(C) \overset{= P_0(C)}{\text{によって}}$ C の有限 simple objects の同型類全体を表わし、$N: P(C) \longrightarrow \mathbb{R}_{+1}=\{t\in\mathbb{R} \mid t\geqq 1\}$ (整数値)をノルムとする。$P(C)$ を C の (0-)素元全体と考える。
すると $P(C)$ は [9a], [9aa] の意味で prime set となる。
(ただし、ここでは $P(C)$ は一般には set とは限らなく class であるから)
そこで

$$\zeta_0(s, C)\left[=\zeta(s, C)\right]=\prod_{p\in P(C)}\left(1-N(p)^{-s}\right)^{-1}$$

と定義する。例えば A が数論的環のとき $C=\mathrm{Mod}(A)$ に対して $\zeta_0(s, C)$ は通常の A のゼータ関数 $\zeta(s, A)$ と一致する。(ただし、F は forgetful functor。)
C が non-abelian の例として groups の category $\underline{Grp}$ を考えると、

$$\zeta_0(s, \underline{Grp}) = \prod_{p:\text{有限単純群}} \left(1 - N(p)^{-s}\right)^{-1}$$

となる。したがって，有限単純群の分類定理を用いれば $Re(s) > 1/3$ で有理型 (meromorphic) — ただし，$s=1$ での simple pole を除いて non-zero holomorphic — であることがわかる。上記の $\zeta_0(s, C)$ は正確には $\zeta_0(s, C, \#)$ と cardinal norm $\# = \# \circ F$ を明記すべきであり，一般には このノルムを色々に取ることが必要になる。（の場合を考える）例えば，前に見たように，コンパクト空間 M 上の連続関数環 $A = C(M)$ のときの $C = Mod(A)$ に対しては M 上の力学系 (flow) X によって 1つのノルム N_X が決まる。このノルムに対する $\zeta_0(s, C, N_X)$ が力学系のゼータ関数 $\zeta(s, X)$ である。

$\boxed{4.2}$ Normed groups (ノルム群). 群 G 上の関数 $N: G \longrightarrow \mathbb{R}_{+1} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqq 1\}$ が次の条件 (1)–(4) を満たすとき ノルム と呼ぶ。

(1) $N(1) = 1$, $N(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

(2) $N(x) = N(x^{-1})$

(3) $N(xy) = N(yx)$

(4) $N(xy) \leqq \max\{N(x)^2, N(y)^2\}$ (またはその変形)。

このようなノルムが与えられた群 (G, N)（単に G と書く）を normed group と呼ぶ。G の共役類全体の集合を $\mathrm{Conj}(G)$ で表わす。共役類 c に対して，そのベキ c^m $(m \in \mathbb{Z})$ を $c^m = \{ x^m \mid x \in c \}$ で定義する。c^m も G の共役類となる。G の素共役類全体の集合 $\mathrm{Prim}(G)$ を次で定義する：

$$\mathrm{Prim}(G) = \left\{ p \in \mathrm{Conj}(G) \;\middle|\; \begin{array}{l} p = c^m \text{ となる } c \in \mathrm{Conj}(G) \text{ と } m \geqq 2 \text{ が} \\ \text{存在しない。} \end{array} \right\}。$$

ノルムの条件(3)から N は $\mathrm{Conj}(G)$ 上の関数である。したがって各有限次元表現 $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ に対してゼータ関数（L-関数）が次のように定義される：

$$\zeta_1(s, [G], \rho) = \zeta_1(s, [G], N, \rho) = \prod_{p \in \mathrm{Prim}(G)} \det\left(1 - \rho(p) N(p)^{-s}\right)^{-1}。$$

例えば $M = \Gamma \backslash H$ が種数 $g \geqq 2$ のコンパクト・リーマン面（解析的［リーマン］多様体として）のとき埋め込み $\Gamma \hookrightarrow PSL_2(\mathbb{R})$ を通して，$\gamma \in \Gamma$ に対して，その固有値を $\alpha(\gamma), \beta(\gamma)$ とすると $N(\gamma) = \max\{ |\alpha(\gamma)|^2, |\beta(\gamma)|^2 \}$ によって Γ は "normed group" になる。normed group (G, N) の特長は自然に解析的な群 $\overline{G}^{(N)}$ への埋め込み $G \hookrightarrow \overline{G}^{(N)}$ が N によって決まるという点にある。normed group のゼータ関数は進化の観点から見て原始的 (primitive, ur) なゼータ関数と考えられる。

文献

[0] M. A. Baranov - Yu. I. Manin - I. V. Frolov - A. S. Shvarts: The multiloop contribution in the fermion string. Sov. J. Nucl. Phys. 43 (4) April 1986 p. 670-671. [Baranov-Svarc: JETP Lett. 42 (1985) 419-421]

[1] A. Beilinson: Higher regulators and values of L-functions. J. Soviet Math. 30 (1985) 2036-2070. (also: Contemp. Math. 55-I 1986) [19]

[2] A. Belavin - V. Knizhnik: Complex geometry and theory of quantum strings. Landau Institute preprint 1986 (JETP)
[also: Bost: Sém. Bourbaki No. 676, 1987 Fev.]
[Belavin-Knizhnik-Morozov-Perelomov: Phys Lett. 177B (1986) 324-328]

[3] S. Bloch: Algebraic cycles and values of L-functions. Crelle 350 (1984) 94-108. [Duke MJ 52 (1985) 379-397; J. Pure Appl. Alg. 34 (1984) 119-145; Adv. Math. 61 (1986) 267-304]

[3a] —: Tamagawa numbers and the Deligne conjectures (1986).
[Hawaii Conf. on K-Theory, Jan. 1987]

[4] A. Borel: Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zeta aux points entiers. Ann. Scuola Normale Superiore (Ser. 4) 4 (1977) 613-636. [Ann. Sci. ENS (Ser. 4) 7 (1974) 235-272; Proc. ICM Vancouver 1974, 435-442]

[5] P. Deligne: Périodes d'intégrales et valeurs de fonctions L. Proc. Symp. Pure Math. AMS vol 33-2 (1979) p. 313-346
[also: Letters to Soulé and Beilinson in 1985]

[6] E. D'Hoker - D.H. Phong : On determinants of Laplacians on Riemann surfaces. Com. Math. Phys. 104 (1986) 537-545.; Nucl. Phys. B 269 (1986) 225-234 ; Gilbert: Nucl. Phys. B 277 (1986) 102-124
[Fried: Invent. Math. 84 (1986) 523-540]

[7] 加藤和也:「代数的K理論」 数学 34 (1982) 97-115.

[8] 久賀道郎:「弱対称リーマン空間における位相解析とその応用」 数学 9 (1957/58) 166-185.

[9] 黒川信重: Zeta functions of analytic rings via Euler products. Proc. Japan Acad. 62 A (1986) 193-196

[9a] —: On the meromorphy of Euler products (I),(II). Proc. London Math. Soc. 53 (1986) 1-47, 209-236.

[9aa] —: On some Euler products (I),(II). Proc. Japan Acad. 60 A (1984) 335-338, 365-368

[9b] —: String theories and prime number theories. Proc. Japan Acad. 62 A (1986) 314-317.

[9c] —: Special values of Euler products and Hardy-Littlewood constants. Proc. Japan Acad. 62 A (1986) 25-28.

[9d] —: On certain Euler products. Acta Arithmetica 48 (1986) 49-52.

[9e] —:「超弦理論と数論」素粒子論研究 74-4, 1987年1月号 p. D24-D39.

[9f] —:「素粒子と素数」数理科学 No. 281, 1986年11月号 p. 64-69.

[10] S. Lichtenbaum: Values of zeta functions, étale cohomology and algebraic K-theory. Springer Lecture Notes in Math. 342 (1973) 489-501.

[10a] —: Values of zeta functions at non-negative values. Springer LNM 1068 (1984) 127-138

[10b] —: The construction of weight two arithmetic cohomology (1986) [Hawaii Conf. on K-Theory, Jan. 1987]

[11] Ju. I. Manin: Quantum strings and algebraic curves. Talk at the ICM-86, Berkley, Sec. 13
[Beilinson-Manin: Com. M. Phys 107 (1986) 359-376]

[11a] A. Beilinson - Ju. I. Manin - V. A. Shechtman: handwritten manuscripts (1986). "Localization of the Virasoro and Neveu-Schwartz algebras." (Very Preliminary draft; Nov. 1986)

[12] D. Ruelle: Invent. Math. 34 (1976) 231-242
Zeta functions for expanding maps and Anosov flows.

[13] A. Selberg: Harmonic analysis and discontinuous subgroups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. 20 (1956) 47-87.

[14] S. Smale: Differentiable dynamical systems. Bull. AMS 73 (1967) 747-817.

[15] C. Soulé: K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale. Invent. Math. 55 (1979) 251-295

[15a] —: Régulateurs. Sém. Bourbaki No. 644, 1985 Fev.
(Astérisque 133/134 (1986) p. 237–253)

[16] 砂田利一：「幾何学における数論的方法について」
数学 38 (1986) 289–301.

[16a] —: L-functions in geometry and some applications.
Springer LNM 1201 (1986) 266–284.

[17] R. Thomason; Algebraic K-theory and etale cohomology, Ann. ENS. (Ser. 4) 13 (1985) 437–552.

[18] A. Voros: Spectral functions, special functions and the Selberg zeta function. Com. Math. Phys. 1987
(Saclay PhT 86-114: preprint) [Balazs-Voros: Phys. Rep. 143 (1986) 109–240]
[also: resume in Phys. Lett. 1986]

[19] D. R. Grayson: Dilogarithm Computations (special values) for K_3.
Springer LNM 854 (1981) 168–178
[虚2次体のゼータ関数の $s=2$ での値の Lichtenbaum予想の実例]

S. Bloch – D. Grayson: K_2 and L-functions of elliptic curves: computer calculations. Contemporary Math. 55-I (1986) 79–88

S. Bloch: Algebraic K-theory and zeta functions of elliptic curves. Proc. International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978) pp. 511–515, Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980

A. A. Beilinson : Higher regulators and values of L-functions of curves. Functional Anal. Appl. 14 (1980) no. 2, 116-118 [⇒ [1]]

S. Bloch : A note on height pairings, Tamagawa numbers, and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture. Invent. Math. 58 (1980) 65-76 [⇒ [32]]

Dinakar Ramakrishnan : A regulator for curves via the Heisenberg group. Bull. AMS 5 (1981) 191-195

— : Analogs of the Bloch-Wigner function for higher polylogarithms. Contemp. Math. 55-I (1986) 371-376

— : Higher regulators on quaternionic Shimura curves and values of L-functions. Contemp. Math. 55-I (1986) 377-388.

[also : Ramakrishnan: for Hilbert modular L-functions : CR 301 (1985) n°18 p. 807 ; Invent. Math. 1987 (in press) ; etc.]

(string theories)

[20] V. P. Snaith : The K-theory of classifying spaces of Galois groups. Contemp. Math. 37 (1985) 145-148.

L. Alvarez-Gaumé and P. Nelson : Riemann surfaces and string theories. CERN-TH. 4615/86, December 1986 [90頁]

D. Quillen : Funct. Anal. Appl. 19 (1985) 31

J. Bismut and D. Freed : Comm. Math. Phys. 106 (1986) 159-179
107 (1986) 103-163

D. Freed : Com. Math. Phys 107 (1986) 483-513

M. Green and D. Gross (eds) : Unified String Theories World Scientific, Singapore (1986)

Schwarz (ed.) : Superstrings (I)(II). World Scientific, Singapore (1985)

Moore-Harris-Nelson-Singer: Phys. Lett. 178B (1986) 167-173

Namazie-Narain-Sarmadi: Phys. Lett. 177B (1986) 329-334

[21] (arithmetic)

R. Langlands: Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Proc. Sympos. Pure Math. 33-2 (1979) 205-246.

Gelbart: Bull. AMS 10 (1984) 177-220

J. L. Brylinski and J. P. Labesse: Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura. Ann. Sci. ENS 17 (1984) 361-412

J. L. Brylinski: 1-motifs et formes automorphes. Publ. Math. Univ. Paris VII 15 (1983) 43-106 (Journées automorphes).

P. Deligne, J. Milne, A. Ogus, K.y Shih: Hodge cycles, Motives, and Shimura varieties. Springer LNM 900 (1982)

A. Borel - W. Casselman: Cohomologie d'intersection et L_2-cohomologie de variétés arithmétiques de rang rationnel 2. C.R. Acad. Sci. Paris 301 (1985) 369-373

[Bull AMS 3 (1980) 1025, Duke MJ 50 (1983) 605, Am. J. M 105 (1983) 309
SLNM 104 (1984) 103, Adv. Stud. Pure Math. 8 (1987)]

S. Zucker: L_2-cohomology and intersection cohomology of locally symmetric varieties (II). Compos. Math. 59 (1986) 339-398.

A. Yu. Morozov and A. M. Perelomov: Vanishing of the vacuum energy for superstrings. JETP Lett. 44 No. 4. (Aug. 1986) 201-204.

E. Farhi and A. H. Guth: An obstacle to creating a universe in the laboratory. Phys. Lett. 183B (1987) 149-155