

1 loop box 型 Feynman graph の運動量積分公式

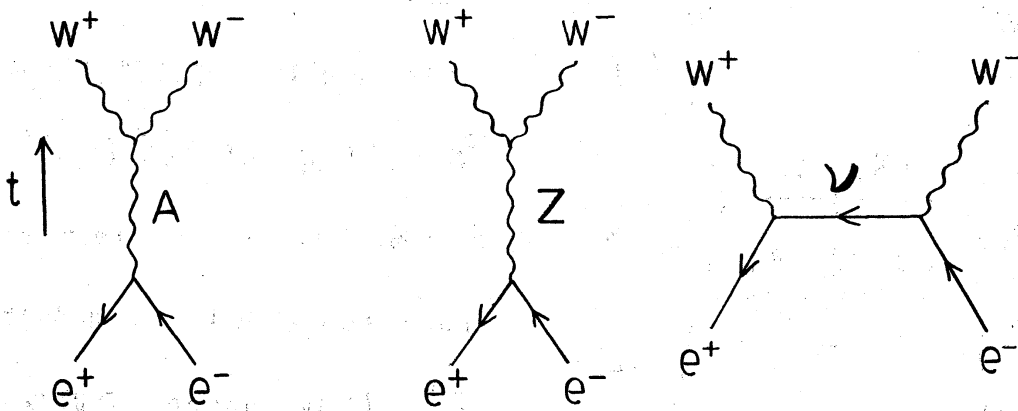
愛媛大 工 矢野忠 (Tadashi Yano)

我々は1986年以来正規直交基底を用いた Feynman グラフの 1 loop vertex 型および 1 loop box 型の運動量積分公式を用いてきたが、今まであまり公表しないうできた。¹⁾ 汎用のものとしてはまだ不十分であるが、ここに 1 loop box 型の公式について発表する。

1. Feynman graph とは ?

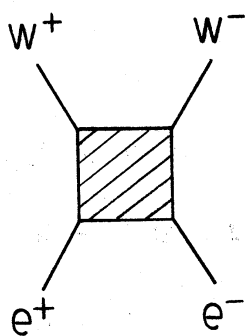
4次元時空中での素粒子反応の仮想的な過程を図に表したもので、Feynman rule を用いると各 Feynman graph に対応した素粒子反応の確率振幅が得られる。

[例] $e^+e^- \rightarrow w^+w^-$ の tree graph

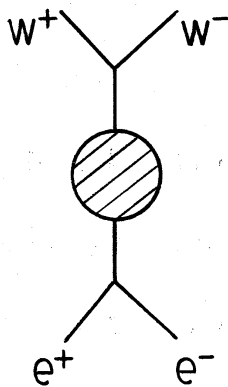


2. 1 loop box 型とは？

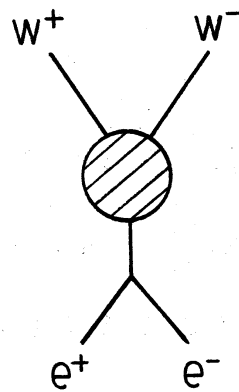
$e^+e^- \rightarrow w^+w^-$ の4次の補正の中には3つの型がある。



1 loop box 型



self-energy 型



vertex 型



積分は比較的

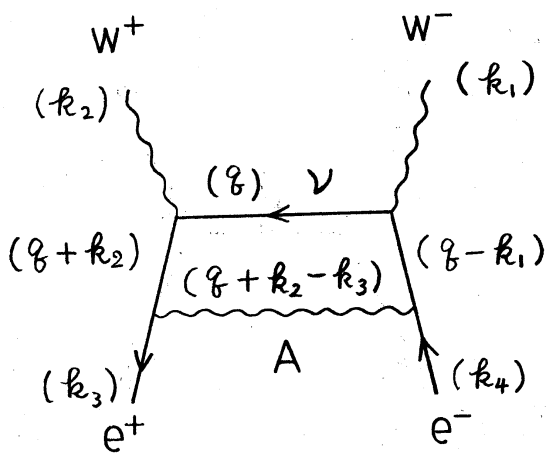
1988.7.29

簡単である。

数式処理研究会で発表

$e^+e^- \rightarrow w^+w^-$ では 1 loop box 型のグラフは 31 個ある。

[例] 1 loop box 型のグラフの 1 例



左図の Feynman グラフを Feynman

rule を用いて式に翻訳すると

$$\bar{v}(k_3) A_{\rho\mu} u(k_4) \epsilon^\mu(k_1) \epsilon^\rho(k_2)$$

となる。u, v は electron,

positron のスピノール関数で、 ϵ^μ ,

ϵ^ρ は W^\pm boson の偏極

(polarization)ベクトルである。

ここで、 $A_{\rho\mu}$ は

$$A_{\rho\mu} = e^2 Q_i^2 \frac{e^2 M_z^2}{8(M_z^2 - M_w^2)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D i} \frac{C_{\rho\mu}}{D_1 D_2 D_3 D_4}$$

$$D_1 = (q+k_2)^2 - m^2, \quad D_2 = q^2 - m_\nu^2, \quad D_3 = (q-k_1)^2 - m^2, \quad D_4 = (q+k_2-k_3)^2 - \lambda^2$$

m : 電子の質量

m_ν : ニュートリノの質量 $m_\nu = 0$

λ : 光子の質量 $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} C_{\rho\mu} &= 2\gamma^\alpha [(\not{q} + \not{k}_2) - m] \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) [m + (\not{q} - \not{k}_1)] \gamma_\alpha \\ &= C_{1\rho\mu}^\lambda \not{q}_\lambda + C_{2\rho\mu}^{\lambda\kappa} \not{q}_\lambda \not{q}_\kappa + C_{3\rho\mu}^{\lambda\kappa\tau} \not{q}_\lambda \not{q}_\kappa \not{q}_\tau \end{aligned}$$

従って、

$$(J_\lambda, J_{\lambda\kappa}, J_{\lambda\kappa\tau}) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D i} \frac{(\not{q}_\lambda, \not{q}_\lambda \not{q}_\kappa, \not{q}_\lambda \not{q}_\kappa \not{q}_\tau)}{D_1 D_2 D_3 D_4}$$

の積分が必要となる。

3. 正規直交ベクトル系のつくり方

$J_\lambda, J_{\lambda\kappa}, J_{\lambda\kappa\tau}$ は内線の運動量 q で積分すれば、外線の運動量 k_1, k_2 と k_3 で表される。 k_1, k_2, k_3 の代わりにこれらから正規直交ベクトル系をつくって $J_\lambda, J_{\lambda\kappa}, J_{\lambda\kappa\tau}$ をそれらで表す。今、 $e^+ e^-$

→ $w^+ w^-$ の場合を示すと

$$k_1^2 = k_2^2 = M^2, \quad k_3^2 = k_4^2 = m^2$$

であるから、

$$\begin{cases} P_1 = k_1 + k_2 \\ P_2 = k_2 - k_3 \\ P_3 = k_1 - k_3 \end{cases} \quad \begin{cases} P_1 \cdot P_2 = 0 \\ P_1 \cdot P_3 = 0 \\ P_2 \cdot P_3 = m^2 - M^2 \end{cases}$$

を補助的に定義し、これらから

$$\begin{cases} B^1 = N_1 P_1 \\ B^2 = N_2 P_2 \\ B^3 = N_3 (P_3 - \beta P_2) \\ \beta = N_2^2 (m^2 - M^2) \end{cases}$$

を定義する。ここで、 N_1, N_2, N_3 は規格化因子である。

これは正規直交化されていて、

$$B^i \cdot B^j = \delta^{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

が成り立つ。後の必要のために B^i と q との内積を求めておく。

$$B^1 \cdot q = -\frac{N_1}{2} (x+a)$$

$$B^2 \cdot q = -\frac{N_2}{2} (y+b)$$

$$B^3 \cdot q = -\frac{N_3}{2} (z+c)$$

ここで Type I (グラフ (a)) に対しては、

$$x = D_1 - D_2$$

$$y = D_3 - D_4$$

$$z = D_1 + D_2 - (1 + \beta) D_3 - (1 - \beta) D_4$$

a, b, c は外線、内線の質量や momentum transfer t 等で表される定数である。

4. 展開係数の求め方

J_λ は B^1, B^2, B^3 を用いて

$$J_\lambda = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D i} \frac{q_\lambda}{D_1 D_2 D_3 D_4} = A_{11} B_\lambda^1 + A_{12} B_\lambda^2 + A_{13} B_\lambda^3$$

と展開できる。 J_λ と $(B^1)^\lambda$ との内積をとれば、係数 A_{11} が求まる。

すなわち、

$$\begin{aligned} A_{11} &= (B^1)^\lambda J_\lambda \\ &= \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D i} \frac{B^1 \cdot q}{D_1 D_2 D_3 D_4} \\ &= -\frac{N_1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D i} \frac{D_1 - D_2 + a}{D_1 D_2 D_3 D_4} \\ &= -\frac{N_1}{2} [J_1 - J_2 + a J_0] \end{aligned}$$

ただし、

$$J_0 = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4}$$

$$J_i = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{D_i}{D_1 D_2 D_3 D_4}, \quad i=1, 2, 3, 4$$

である。

同様にして、

$$A_{12} = -\frac{N_2}{2} (J_3 - J_4 + \beta J_0)$$

$$A_{13} = -\frac{N_3}{2} [J_1 + J_2 - (1+\beta)J_3 - (1-\beta)J_4 + \beta J_0]$$

と求められる。 $J_{\lambda\kappa}$ は 2 階の対称テンソルの正規直交系 $B_{\lambda\kappa}^i$ ($i=1\sim 7$) を用いて

$$J_{\lambda\kappa} = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{g_\lambda g_\kappa}{D_1 D_2 D_3 D_4} = \sum_{i=1}^7 A_{2i} B_{\lambda\kappa}^i$$

と展開でき、また $J_{\lambda\kappa\tau}$ は 3 階の対称テンソルの正規直交系 $B_{\lambda\kappa\tau}^i$ ($i=1\sim 13$) を用いて

$$J_{\lambda\kappa\tau} = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{g_\lambda g_\kappa g_\tau}{D_1 D_2 D_3 D_4} = \sum_{i=1}^{13} A_{3i} B_{\lambda\kappa\tau}^i$$

と展開できる。これらの係数 A_{2i} , A_{3i} はそれぞれ

$$A_{2i} = (B^i)^{\lambda\kappa} J_{\lambda\kappa}$$

$$A_{3i} = (B^i)^{\lambda\kappa\tau} J_{\lambda\kappa\tau}$$

から求められる。

$J_{\lambda\kappa}$ と $J_{\lambda\kappa\tau}$ は、 J_0 と J_i の他に

$$J_{ij} = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{D_i D_j}{D_1 D_2 D_3 D_4}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

および

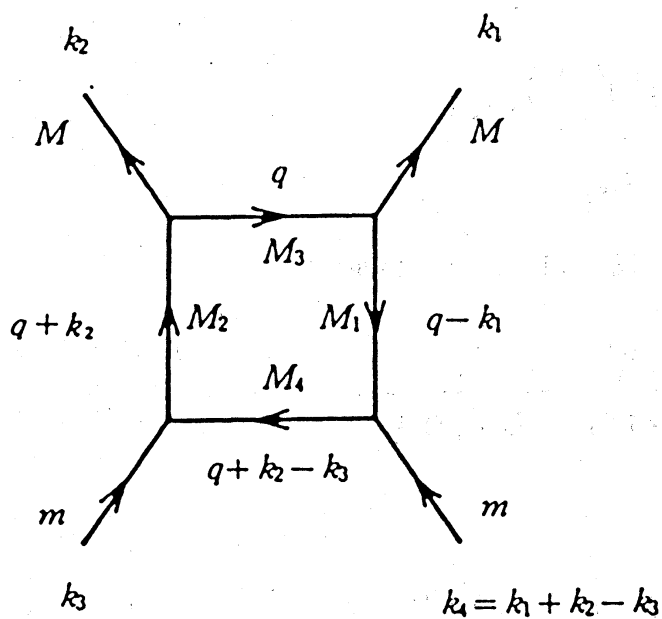
$$J_{ijk} = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{D_i D_j D_k}{D_1 D_2 D_3 D_4}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4$$

を用いて表される。 $J_0, J_i, J_{ij}, J_{ijk}$ の積分を個別に求めておけば、

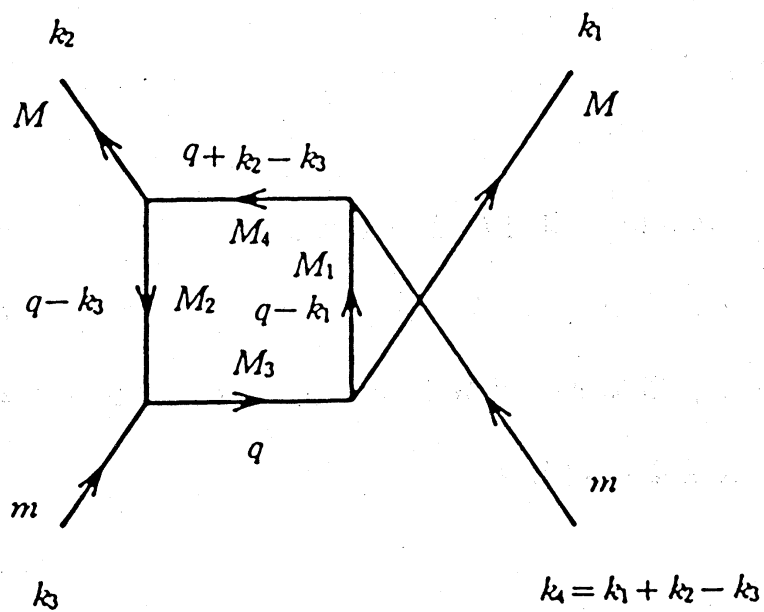
$J_\lambda, J_{\lambda\kappa}$ および $J_{\lambda\kappa\tau}$ がすべて運動量積分公式を用いて代数的に求められる。

5. 1 loop box 型運動量積分公式

以下、公式を Type I (グラフ (a)) および Type II (グラフ (b)) について展開式、基底となる正規直交テンソル系、展開係数の順に示す。次図を参照せよ。



(a)



(b)

Type I の場合

1) \bar{J}_a の公式展開式

$$\bar{J}_a = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D i} \frac{q_a}{D_1 D_2 D_3 D_4} = \sum_{i=1}^3 A_{1i} B_a^i$$

正規直交ベクトル系

$$B_a^1 = N_1 P_{1a}$$

$$B_a^2 = N_2 P_{2a}$$

$$B_a^3 = N_3 (P_3 - \beta P_2)_a$$

係数

$$A_{11} = -N_1 (J_1 - J_2 + a J_0) / 2$$

$$A_{12} = -N_2 (J_3 - J_4 + b J_0) / 2$$

$$A_{13} = -N_3 \{ J_1 + J_2 - (1 + \beta) J_3 - (1 - \beta) J_4 + c J_0 \} / 2$$

2) $\bar{J}_{a\mu}$ の公式展開式

$$\bar{J}_{a\mu} = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D i} \frac{q_a q_\mu}{D_1 D_2 D_3 D_4} = \sum_{i=1}^7 A_{2i} B_{a\mu}^i$$

対称な 2 階の正規直交テンソル系

$$B_{a\mu}^1 = B_a^1 B_\mu^1$$

$$B_{a\mu}^2 = B_a^2 B_\mu^2$$

$$B_{a\mu}^3 = B_a^3 B_\mu^3$$

$$B_{a\mu}^4 = (B_a^1 B_\mu^2 + B_a^2 B_\mu^1) / \sqrt{2}$$

$$B_{a\mu}^5 = (B_a^1 B_\mu^3 + B_a^3 B_\mu^1) / \sqrt{2}$$

$$B_{a\mu}^6 = (B_a^2 B_\mu^3 + B_a^3 B_\mu^2) / \sqrt{2}$$

$$B_{a\mu}^7 = (g_{a\mu} - B_{a\mu}^1 - B_{a\mu}^2 - B_{a\mu}^3) / \sqrt{D-3}$$

係数

$$A_{21} = N_1^2 [J_{11} + J_{22} - 2J_{12} + 2a(J_1 - J_2) + a^2 J_0] / 4$$

$$A_{22} = N_2^2 [J_{33} + J_{44} - 2J_{34} + 2b(J_3 - J_4) + b^2 J_0] / 4$$

$$A_{23} = N_3^2 [J_{11} + J_{22} + 2J_{12} - 2(1 + \beta)(J_{13} + J_{23}) - 2(1 - \beta)(J_{14} + J_{24}) + (1 + \beta)^2 J_{33} + (1 - \beta)^2 J_{44} + 2(1 - \beta^2) J_{34} + 2c \{ J_1 + J_2 - (1 + \beta) J_3 - (1 - \beta) J_4 \} + c^2 J_0] / 4$$

$$A_{24} = \sqrt{2} N_1 N_2 [J_{13} + J_{24} - (J_{23} + J_{14}) + b(J_1 - J_2) + a(J_3 - J_4) + ab J_0] / 4$$

$$A_{25} = \sqrt{2} N_1 N_3 [J_{11} - J_{22} - (1 + \beta)(J_{13} - J_{23}) - (1 - \beta)(J_{14} - J_{24}) + (a + c) J_1 + (a - c) J_2 - a \{ (1 + \beta) J_3 + (1 - \beta) J_4 \} + ac J_0] / 4$$

$$A_{26} = \sqrt{2} N_2 N_3 [J_{13} + J_{23} - (J_{14} + J_{24}) - (1 + \beta) J_{33} - 2\beta J_{34} + (1 - \beta) J_{44} + b \{ (1 + \beta) J_3 - \{ (1 - \beta) b + c \} J_4 + bc J_0 \}] / 4$$

$$A_{27} = [J_3 + M_3^2 J_0 - A_{21} - A_{22} - A_{23}] / \sqrt{D-3}$$

3) $\tilde{J}_{\alpha\mu\rho}$ の公式

展開式

$$\tilde{J}_{\alpha\mu\rho} = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^{D_i}} \frac{q_\alpha q_\mu q_\rho}{D_1 D_2 D_3 D_4} = \sum_{i=1}^{13} A_{3i} B_{\alpha\mu\rho}^i$$

対称な3階の正規直交テンソル系

$$B_{\alpha\mu\rho}^1 = B_{\alpha\mu}^1 B_\rho^1$$

$$B_{\alpha\mu\rho}^2 = B_{\alpha\mu}^2 B_\rho^2$$

$$B_{\alpha\mu\rho}^3 = B_{\alpha\mu}^3 B_\rho^3$$

$$B_{\alpha\mu\rho}^4 = \frac{1}{\sqrt{3}} B_{\alpha\mu}^1 B_\rho^2 + \sqrt{\frac{2}{3}} B_{\alpha\mu}^2 B_\rho^1$$

$$B_{\alpha\mu\rho}^5 = \frac{1}{\sqrt{3}} B_{\alpha\mu}^1 B_\rho^3 + \sqrt{\frac{2}{3}} B_{\alpha\mu}^2 B_\rho^1$$

$$B_{\alpha\mu\rho}^6 = \frac{1}{\sqrt{3}} B_{\alpha\mu}^2 B_\rho^1 + \sqrt{\frac{2}{3}} B_{\alpha\mu}^1 B_\rho^2$$

$$B_{\alpha\mu\rho}^7 = \frac{1}{\sqrt{3}} B_{\alpha\mu}^2 B_\rho^3 + \sqrt{\frac{2}{3}} B_{\alpha\mu}^1 B_\rho^2$$

$$B_{\alpha\mu\rho}^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} B_{\alpha\mu}^3 B_\rho^1 + \sqrt{\frac{2}{3}} B_{\alpha\mu}^2 B_\rho^2$$

$$B_{\alpha\mu\rho}^9 = \frac{1}{\sqrt{3}} B_{\alpha\mu}^3 B_\rho^2 + \sqrt{\frac{2}{3}} B_{\alpha\mu}^1 B_\rho^3$$

$$B_{\alpha\mu\rho}^{10} = \frac{1}{\sqrt{3}} (B_{\alpha\mu}^1 B_\rho^3 + B_{\alpha\mu}^2 B_\rho^1 + B_{\alpha\mu}^3 B_\rho^2)$$

$$B_{\alpha\mu\rho}^{11} = \frac{1}{\sqrt{3}(D-3)} [(g_{\alpha\mu} B_\rho^1 + g_{\mu\rho} B_\alpha^1 + g_{\rho\alpha} B_\mu^1) - 3B_{\alpha\mu\rho}^1 - \sqrt{3}(B_{\alpha\mu\rho}^6 + B_{\alpha\mu\rho}^8)]$$

$$B_{\alpha\mu\rho}^{12} = \frac{1}{\sqrt{3}(D-3)} [(g_{\alpha\mu} B_\rho^2 + g_{\mu\rho} B_\alpha^2 + g_{\rho\alpha} B_\mu^2) - 3B_{\alpha\mu\rho}^2 - \sqrt{3}(B_{\alpha\mu\rho}^4 + B_{\alpha\mu\rho}^9)]$$

$$B_{\alpha\mu\rho}^{13} = \frac{1}{\sqrt{3}(D-3)} [(g_{\alpha\mu} B_\rho^3 + g_{\mu\rho} B_\alpha^3 + g_{\rho\alpha} B_\mu^3) - 3B_{\alpha\mu\rho}^3 - \sqrt{3}(B_{\alpha\mu\rho}^5 + B_{\alpha\mu\rho}^7)]$$

系数

$$\begin{aligned}
A_{3.1} &= -N_1^2[J_{111} - J_{222} - 3(J_{112} - J_{122}) + 3a(J_{11} + J_{22} - 2J_{12}) + 3a^2(J_1 - J_2) + a^3J_0]/8 \\
A_{3.2} &= -N_2^2[J_{333} - J_{444} - 3(J_{334} - J_{444}) + 3b(J_{33} + J_{44} - 2J_{34}) + 3b^2(J_3 - J_4) + b^3J_0]/8 \\
A_{3.3} &= -N_3^2[J_{111} + J_{222} + 3(J_{112} + J_{122}) - 3(1+\beta)(J_{113} + J_{223} + 2J_{123}) + 3(1+\beta)^2(J_{133} + J_{233}) - (1+\beta)^3J_{333} - 3(1-\beta)(J_{114} + J_{224} + 2J_{124}) + 6(1-\beta^2)(J_{134} + J_{234}) - 3(1+\beta)^2(1-\beta)J_{334} + 3(1-\beta)^2(J_{144} + J_{244}) - 3(1+\beta)(1-\beta)^2J_{344} - (1-\beta)^3J_{444} + 3c(J_{11} + J_{22} + 2J_{12}) - 6c(1+\beta)(J_{13} + J_{23}) - 6c(1-\beta)(J_{14} + J_{24}) + 3c(1+\beta)^2J_{33} + 6c(1-\beta)^2J_{34} + 3c(1-\beta)^2J_{44} + 3c^2\{J_1 + J_2 - (1+\beta)J_3 - (1-\beta)J_4\} + c^3J_0]/8 \\
A_{3.4} &= -\sqrt{3}N_1^2N_2[J_{113} + J_{223} - J_{114} - J_{224} - 2(J_{123} - J_{124}) + b(J_{11} + J_{22} - 2J_{12}) + 2a(J_{13} + J_{24} - J_{23} - J_{14}) + 2ab(J_1 - J_2) + a^2(J_3 - J_4) + a^2bJ_0]/8 \\
A_{3.5} &= -\sqrt{3}N_1^2N_3[J_{111} + J_{222} - J_{112} - J_{122} - (1+\beta)(J_{113} + J_{223} - 2J_{123}) - (1-\beta)(J_{114} + J_{224} - 2J_{124}) + (2a+c)J_{11} - 2cJ_{12} - (2a-c)J_{22} - 2a(1+\beta)(J_{13} - J_{23}) - 2a(1-\beta)(J_{14} - J_{24}) + a(a+2c)J_1 + a(a-2c)J_2 - a^2(1+\beta)J_3 - a^2(1-\beta)J_4 + a^2cJ_0]/8 \\
A_{3.6} &= -\sqrt{3}N_1N_2^2[J_{133} + J_{144} - J_{244} - J_{233} - 2(J_{134} - J_{234}) + 2b(J_{13} + J_{24} - J_{23} - J_{14}) + a(J_{33} + J_{44} - 2J_{34}) + b^2(J_1 - J_2) + 2ab(J_3 - J_4) + ab^2J_0]/8 \\
A_{3.7} &= -\sqrt{3}N_2^2N_3[J_{133} + J_{233} + J_{144} + J_{244} - 2(J_{134} + J_{234}) - (1+\beta)J_{333} - (1-\beta)J_{444} + (1+3\beta)J_{334} + (1-3\beta)J_{344} + 2b(J_{13} + J_{23} - J_{14} - J_{24}) + \{c - 2b(1+\beta)\}J_{33} + 2(2b\beta - c)J_{34} + \{c + 2b(1-\beta)\}J_{44} + b^2(J_1 + J_2) - b\{b(1+\beta) - 2c\}J_3 - b\{b(1-\beta) + 2c\}J_4 + b^2cJ_0]/8 \\
A_{3.8} &= -\sqrt{3}N_1N_3^2[J_{111} + J_{112} - J_{122} - J_{222} - 2(1+\beta)(J_{113} - J_{223}) + (1+\beta)^2(J_{133} - J_{233}) - 2(1-\beta)(J_{114} - J_{224}) + 2(1-\beta)^2(J_{134} - J_{234}) + (1-\beta)^2(J_{144} - J_{244}) + (a+2c)J_{11} + (a-2c)J_{22} + 2aJ_{12} - 2(a+c)(1+\beta)J_{13} - 2(a-c)(1+\beta)J_{23} - 2(a+c)(1-\beta)J_{14} - 2(a-c)(1-\beta)J_{24} + a(1+\beta)^2J_{33} + 2a(1-\beta)^2J_{34} + a(1-\beta)^2J_{44} + c(c+2a)J_1 - c(c-2a)J_2 - 2ac\{(1+\beta)J_3 + (1-\beta)J_4\} + ac^2J_0]/8 \\
A_{3.9} &= -\sqrt{3}N_2N_3^2[J_{113} + J_{223} - J_{114} - J_{224} + 2(J_{123} - J_{124}) - 2(1+\beta)(J_{133} + J_{233}) + 4\beta(J_{134} + J_{234}) + (1+\beta)^2J_{333} + (1+\beta)(1-3\beta)J_{334} - (1-\beta)(1+3\beta)J_{344} - (1-\beta)^2J_{444} + 2(1-\beta)(J_{144} + J_{244}) - 2\{b(1+2\beta) + (\bar{M}^2 - t)\}(J_{13} + J_{23}) - 2\{b(1-2\beta) - (\bar{M}^2 - t)\}(J_{14} + J_{24}) + (1+\beta)\{b(1+3\beta) + 2(\bar{M}^2 - t)\}J_{33} + 2\{b(1-3\beta^2) - 2\beta(\bar{M}^2 - t)\}J_{34} + (1-\beta)\{b(1-3\beta) - 2(\bar{M}^2 - t)\}J_{44} + b(J_{11} + J_{22} + 2J_{12}) + 2bc(J_1 + J_2) - c\{b(2+3\beta) + (\bar{M}^2 - t)\}J_3 - c\{b(2-3\beta) - (\bar{M}^2 - t)\}J_4 + bc^2J_0]/8 \\
A_{3.10} &= -\sqrt{6}N_1N_2N_3[J_{113} + J_{224} - J_{223} - J_{114} - (1+\beta)(J_{133} - J_{233}) + 2\beta(J_{134} - J_{234}) + (1-\beta)(J_{144} - J_{244}) + c(J_{13} + J_{24} - J_{23} - J_{14}) + b(J_{11} - J_{22}) - b(1+\beta)(J_{13} - J_{23}) - b(1-\beta)(J_{14} - J_{24}) + a(J_{13} + J_{23} - J_{14} - J_{24}) - a(1+\beta)(J_{33} - J_{34}) - a(1-\beta)(J_{34} - J_{44}) + b(a+c)J_1 + b(a-c)J_2 + a\{c - b(1+\beta)\}J_3 - a\{c + b(1-\beta)\}J_4 + abcJ_0]/8 \\
A_{3.11} &= -[3N_1\{J_{13} - J_{23} + \bar{M}^2(J_1 - J_2) + aJ_3 + M_3^2aJ_0\}/2 + 3A_{3.1} + \sqrt{3}(A_{3.6} + A_{3.8})]/\sqrt{3(D-3)} \\
A_{3.12} &= -[3N_2\{J_{33} - J_{34} + (M_3^2 + b)J_3 - M_3^2J_4 + M_3^2bJ_0\}/2 + 3A_{3.2} + \sqrt{3}(A_{3.4} + A_{3.9})]/\sqrt{3(D-3)} \\
A_{3.13} &= -[3N_3\{J_{13} + J_{23} - (1+\beta)J_{33} - (1-\beta)J_{34} + M_3^2(J_1 + J_2) - ((1+\beta)M_3^2 - c)J_3 - (1-\beta)M_3^2J_4 + M_3^2cJ_0\}/2 + 3A_{3.3} + \sqrt{3}(A_{3.5} + A_{3.7})]/\sqrt{3(D-3)}
\end{aligned}$$

Type II の場合

Fig. (b)に示された Type II の場合も Type I の場合と同様であるので、Type I と異なる箇所に重点をおいて以下に述べることにする。

まず Fig. 4(b)に示された 4 つの内線の propagator の分母 D_1, D_2, D_3 および D_4 は

$$D_1 = (q - k_1)^2 - M_1^2$$

$$D_2 = (q - k_3)^2 - M_2^2$$

$$D_3 = q^2 - M_3^2$$

$$D_4 = (q + k_2 - k_3)^2 - M_4^2$$

となり、 D_2 のみ Type I の場合と異なっている。 P_1, P_2, P_3 および B_1, B_2, B_3 の定義は Type I の場合と全く同一である。

$k_i \cdot q$ ($i = 1, 2, 3$) は

$$k_1 \cdot q = (D_3 - D_1 + k_1^2 - M_1^2 + M_3^2)/2$$

$$k_2 \cdot q = (D_4 - D_2 + k_2^2 - M_2^2 + M_4^2 - t)/2$$

$$k_3 \cdot q = (D_3 - D_2 + k_3^2 - M_2^2 + M_3^2)/2$$

となるので、これらから $B^i \cdot q$ ($i = 1, 2, 3$) は

$$B^1 \cdot q = -N_1(x + a)/2$$

$$B^2 \cdot q = -N_2(y + b)/2$$

$$B^3 \cdot q = -N_3(z + c)/2$$

となる。この $B^i \cdot q$ の定義の式は Type I の場合と同一である。 x, y, z および a, b, c の定義は次の通りである。

$$x = D_1 + D_2 - D_3 - D_4$$

$$y = D_3 - D_4$$

$$z = D_1 - D_2 - \beta D_3 + \beta D_4$$

$$a = M_1^2 + M_2^2 - M_3^2 - M_4^2 - M^2 - m^2 + t$$

$$b = M_3^2 - M_4^2 + t$$

$$c = (M_1^2 - M_2^2 - M^2 + m^2) - \beta(M_3^2 - M_4^2 + t)$$

この定義は y および b を除いて Type I の定義とは異なっている。以下において Type II では Type I と展開式や正規直交テンソル系は同一の形であるが、係数だけは異なってくるので係数だけを列記することにする。

1) \hat{f}_o の公式

係数

$$A_{11} = -N_1(J_1 + J_2 - J_3 - J_4 + aJ_0)/2$$

$$A_{12} = -N_2(J_3 - J_4 + bJ_0)/2$$

$$A_{13} = -N_3(J_1 - J_2 - \beta(J_3 - J_4) + cJ_0)/2$$

2) $\hat{f}_{\alpha\mu}$ の公式

係数

$$A_{21} = N_1^2[J_{11} + J_{22} + J_{33} + J_{44} + 2(J_{12} + J_{34} - J_{13} - J_{23} - J_{14} - J_{24}) + 2a(J_1 + J_2 - J_3 - J_4) + a^2 J_0]/4$$

$$A_{22} = N_2^2[J_{33} + J_{44} - 2J_{34} + 2b(J_3 - J_4) + b^2 J_0]/4$$

$$A_{23} = N_3^2[J_{11} + J_{22} - 2J_{12} - 2\beta(J_{13} + J_{24} - J_{23} - J_{14}) + \beta^2(J_{33} + J_{44} - 2J_{34}) + 2c\{J_1 - J_2 - \beta(J_3 - J_4)\} + c^2 J_0]/4$$

$$A_{24} = \sqrt{2}N_1N_2[J_{13} + J_{23} + J_{44} - (J_{33} + J_{14} + J_{24}) + b(J_1 + J_2) + (a-b)J_3 - (a+b)J_4 + abJ_0]/4$$

$$A_{25} = \sqrt{2}N_1N_3[J_{11} - J_{22} + \beta(J_{33} - J_{44}) - (1+\beta)(J_{13} - J_{24}) + (1-\beta)(J_{23} - J_{14}) + (a+c)J_1 - (a-c)J_2 - (a\beta+c)J_3 + (a\beta-c)J_4 + acJ_0]/4$$

$$A_{26} = \sqrt{2}N_2N_3[J_{13} + J_{24} - (J_{23} + J_{14}) - \beta(J_{33} + J_{44} - 2J_{34}) + b(J_1 - J_2) + (c-b\beta)(J_3 - J_4) + bcJ_0]/4$$

$$A_{27} = [J_3 + M_3^2 J_0 - A_{21} - A_{22} - A_{23}]/\sqrt{D-3}$$

3) $\hat{f}_{\alpha\mu\rho}$ の公式

係数

$$A_{3,1} = -N_1^3[J_{111} + J_{222} - (J_{333} + J_{444}) + 3(J_{112} + J_{122} + J_{133} + J_{233} + J_{144} + J_{244} - J_{113} - J_{223} - J_{114} - J_{224} - J_{334} - J_{444}) + 6(J_{134} + J_{234} - J_{123} - J_{124}) + 3a\{J_{11} + J_{22} + J_{33} + J_{44} + 2(J_{12} + J_{34} - J_{13} - J_{23} - J_{14} - J_{24})\} + 3a^2(J_1 + J_2 - J_3 - J_4) + a^3 J_0]/8$$

$$A_{3,2} = -N_2^3[J_{333} - J_{444} - 3(J_{334} - J_{344}) + 3b(J_{33} + J_{44} - 2J_{34}) + 3b^2(J_3 - J_4) + b^3 J_0]/8$$

$$A_{3,3} = -N_3^3[J_{111} - J_{222} - 3(J_{112} - J_{122}) - 3\beta\{J_{113} + J_{223} - J_{114} - J_{224} - 2(J_{123} - J_{124})\} + 3\beta^2\{J_{133} + J_{144} - J_{233} - J_{244} - 2(J_{134} - J_{234})\} - \beta^3\{J_{333} - J_{444} - 3(J_{334} - J_{344})\} + 3c\{J_{11} + J_{22} - 2J_{12} - 2\beta(J_{13} + J_{24} - J_{23} - J_{14}) + \beta^2(J_{33} + J_{44} - 2J_{34})\} + 3c^2\{J_1 - J_2 - \beta(J_3 - J_4)\} + c^3 J_0]/8$$

$$A_{3,4} = -\sqrt{3}N_1^2N_2[J_{113} + J_{223} + J_{333} + J_{334} - (J_{114} + J_{224} + J_{344} + J_{444}) + 2(J_{123} + J_{144} + J_{244} - J_{133} - J_{233} - J_{124}) + b(J_{11} + J_{22}) - (2a-b)J_{33} + (2a+b)J_{44} + 2b(J_{12} + J_{34}) + 2(a-b)(J_{13} + J_{23}) - 2(a+b)(J_{14} + J_{24}) + 2ab(J_1 + J_2) + a(a-2b)J_3 - a(a+2b)J_4 + a^2 b J_0]/8$$

$$\begin{aligned}
A_{3.5} &= -\sqrt{3}N_1^2N_3[J_{111}+J_{112}-(J_{122}+J_{222})+2(J_{134}-J_{234})+(1+2\beta)J_{133}-(1-2\beta)J_{233}+(1 \\
&\quad -2\beta)J_{144}-(1+2\beta)J_{244}-(2+\beta)J_{113}+(2-\beta)J_{223}-(2-\beta)J_{114}+(2+\beta)J_{224}-\beta(J_{333}+J_{334} \\
&\quad -J_{344}-J_{444}+2(J_{123}-J_{124}))+(2a+c)J_{11}-(2a-c)J_{22}-2\{a(1+\beta)+c\}J_{13}+2\{a(1-\beta) \\
&\quad -c\}J_{23}-2\{a(1-\beta)+c\}J_{14}+2\{a(1+\beta)-c\}J_{24}+(c+2a\beta)J_{33}+(c-2a\beta)J_{44}+2c(J_{12} \\
&\quad +J_{34})+a(a+2c)J_1-a(a-2c)J_2-a(a\beta+2c)J_3+a(a\beta-2c)J_4+a^2cJ_0]/8 \\
A_{3.6} &= -\sqrt{3}N_1N_2^2[J_{133}+J_{233}+J_{334}+J_{144}+J_{244}+J_{344}-J_{333}-J_{444}-2(J_{134}+J_{234})+2b(J_{13}+J_{23} \\
&\quad -J_{14}-J_{24})-2aJ_{34}+(a-2b)J_{33}+(a+2b)J_{44}+b^2(J_1+J_2)-b(b-2a)J_3-b(b+2a)J_4 \\
&\quad +ab^2J_0]/8 \\
A_{3.7} &= -\sqrt{3}N_2^2N_3[J_{133}+J_{144}-(J_{233}+J_{244})-2(J_{134}-J_{234})-\beta\{J_{333}-J_{444}-3(J_{334}-J_{344})\} \\
&\quad +2b(J_{13}+J_{24}-J_{23}-J_{14})+(c-2b\beta)(J_{33}+J_{44}-2J_{34})+b^2(J_1+J_2)+b(2c-b\beta)(J_3-J_4) \\
&\quad +b^2cJ_0]/8 \\
A_{3.8} &= -\sqrt{3}N_1N_3^2[J_{111}+J_{222}-(J_{112}+J_{122})+2(J_{123}+J_{124})-(1+2\beta)(J_{113}+J_{224})-(1-2\beta)(J_{223} \\
&\quad +J_{114})+\beta(\beta-2)(J_{233}+J_{144})+\beta(\beta+2)(J_{133}+J_{244})+\beta^2\{J_{334}+J_{344}-(J_{333}+J_{444})-2(J_{134} \\
&\quad +J_{234})\}+(a+2c)J_{11}+(a-2c)J_{22}+2\{c(1-\beta)+a\beta\}J_{23}+2\{c(1+\beta)-a\beta\}J_{24}-2\{c(1 \\
&\quad +\beta)+a\beta\}J_{13}-2\{c(1-\beta)-a\beta\}J_{14}+\beta(a\beta+2c)J_{33}+\beta(a\beta-2c)J_{44}-2a(J_{12}+\beta^2J_{34}) \\
&\quad +c(c+2a)J_1+c(c-2a)J_2-c(c+2a\beta)J_3-c(c-2a\beta)J_4+ac^2J_0]/8 \\
A_{3.9} &= -\sqrt{3}N_2N_3^2[J_{113}+J_{223}-(J_{114}+J_{224})-2(J_{123}-J_{124})-2\beta\{J_{133}+J_{144}-J_{233}-J_{244}-2(J_{134} \\
&\quad -J_{234})\}+\beta^2\{J_{333}-J_{444}-3(J_{334}-J_{344})\}+2(c-b\beta)(J_{13}+J_{24}-J_{23}-J_{14})+\beta(b\beta-2c)(J_{33} \\
&\quad +J_{44}-2J_{34})+b(J_{11}+J_{22}-2J_{12})+2bc(J_1-J_2)+c(c-2b\beta)(J_3-J_4)+bc^2J_0]/8 \\
A_{3.10} &= -\sqrt{6}N_1N_2N_3[J_{113}+J_{224}-(J_{223}+J_{114})-(1+\beta)(J_{133}+J_{244})+(1-\beta)(J_{233}+J_{144})-\beta(J_{334} \\
&\quad +J_{344}-J_{333}-J_{444})+2\beta(J_{134}+J_{234})+b(J_{11}-J_{22})+(a-b(1+\beta)+c)J_{13}-\{a-b(1-\beta) \\
&\quad -c\}J_{23}-\{(a+b)\beta-c\}J_{44}-\{(a-b)\beta+c\}J_{33}-\{a+b(1-\beta)+c\}J_{14}+\{a+b(1+\beta) \\
&\quad -c\}J_{24}+2a\beta J_{34}+b(a+c)J_1-b(a-c)J_2-(ab\beta+bc-ac)J_3+(ab\beta-bc-ac)J_4 \\
&\quad +abcJ_0]/8 \\
A_{3.11} &= [-3N_1\{J_{13}+J_{23}-J_{33}-J_{34}+M_3^2(J_1+J_2-J_4)+(a-M_3^2)J_3+M_3^2aJ_0\}/2-3A_{3.1}-\sqrt{3}(A_{3.6} \\
&\quad +A_{3.8})]/\sqrt{3(D-3)} \\
A_{3.12} &= [-3N_2\{J_{33}-J_{34}+(M_3^2+b)J_3-M_3^2J_4+M_3^2b\}/2-3A_{3.2}-\sqrt{3}(A_{3.4}+A_{3.9})]/\sqrt{3(D-3)} \\
A_{3.13} &= [-3N_3\{J_{13}-J_{23}-\beta(J_{33}-J_{34})+M_3^2(J_1-J_2+\beta J_4)+(c-\beta M_3^2)J_4+M_3^2cJ_0\}/2-3A_{3.3} \\
&\quad -\sqrt{3}(A_{3.5}+A_{3.7})]/\sqrt{3(D-3)}
\end{aligned}$$

6. 今後の問題点と議論その他

我々の求めた公式は $e^+e^- \rightarrow w^+w^-$ 反応に対する公式であったのでいくつかの制限がついている。そこで、汎用の公式として使用するためにはいくつかの改変および一般化を行わなければならない。すでにその一部は実行されているが、いくつかの問題点について列挙しておく。

1. 反応に関与する粒子の質量が等しくないときの公式を求める。
2. mass off shell 条件のときの公式を求める。
- 3.

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D i} \frac{g_\lambda g_\kappa g_\tau g_\sigma}{D_1 D_2 D_3 D_4} \quad \text{の公式を求める。}$$

4. 正規直交基底のつくり方の数学的構造の解明
5. 正規直交基底を用いないやり方との比較検討^{2), 3)}
6. self-energy 型、vertex 型、box 型の公式の体系化

最後に 1 loop box 型の運動量積分公式を求める Program は上のいくつかの問題点はすでに克服された形で喜久川（広大理）によってつくられ、用いられていること、およびこの研究は広島大—呉高専の牟田、米沢、喜久川、若泉、小平、名島、渡辺氏等との共同研究にもとづくものであることを付記する。A₁₁, A₂₁, A₃₁ は REDUCE を用いて求められた。

[注]

佐々木建昭氏から頂いた御議論によれば、通常の Feynman パラメータ積分を用いた方が積分変数の範囲を $[0, 1]$ の間に限れるから、その点で都合がよいのではないかとのことであったが、我々の積分公式では box 型を vertex 型および self-energy 型に置きかえて計算を実行するので、最終的には self-energy 型の Feynman パラメータ積分を用いており、 $(-\infty, \infty)$ の積分を explicit に行っているのではないことを注意しておく。御議論頂いた佐々木氏その他の方々に感謝する。

参考文献

- 1) 矢野忠、江沢康生、名島隆一、若泉誠一、渡辺敏夫、
高エネルギー物理学の公式 — 1 loop vertex のループ運動量積分 — 、愛媛大学工学部紀要第 11 巻 2 号 P P. 9 ~ 19 (1987)、
矢野忠、江沢康生、喜久川政吉、名島隆一、若泉誠一、渡辺敏夫、
高エネルギー物理学の公式 II — 1 loop box のループ運動量積分 — 、愛媛大学工学部紀要第 11 巻 3 号 P P. 1 ~ 13 (1988)
- 2) G.P.Passarino and M.Veltman , One - Loop Corrections for e^+e^- Annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the Weinberg Model ,

Nucl.Phys. B160 (1979) . 151-207.

- 3) R.G.Stuart , Algebraic Reduction of One - loop Feynman
Diagrams to Scalar Integrals , MPI-PAE/PTh 85/87
(Oct. 1987).