数理解析研究所講究録
479巻 1983年 42-55

0でない葉不変量をもつ葉層

北大理　鈴木治夫 (Haruo Suzuki)

§1　序

境界をもたないパラコンパクト・ハウスドルフC^∞-多様体M上の余次元qのC^∞-葉層$\mathcal{F}$を考え，その一つの葉をLとする。　$\mathcal{F}$の法ベクトル束$\nu(\mathcal{F})$上のBott接続[B]とリーマン接続とのアファイン結合から$\nu(\mathcal{F})\times\mathbb{R}$上の接続が定まるが，その曲率行列によって各奇数次Chern多項式c_iに対し，葉不変量$h_i(\mathcal{F},L;M)\in H^{2i-1}_{DR}(M)$が構成される。　この概念の起りはG. Reeb [R]によるもので，その後B. Reinhart [Ri]およびR. Goldman [G]らによって発展させられた。

$\{X_1,\dots,X_k\}$がMの接ベクトルのk-frame fieldで，余次元kの葉層$\tilde{\mathcal{F}}$に横断的となり，$\mathcal{F}\subset\tilde{\mathcal{F}}$ ($\mathcal{F}$の葉は$\tilde{\mathcal{F}}$の葉に含まれる)とする。　また各X_iは$\mathcal{F}$を保ち，$X_1,\dots,X_k$は$\mathcal{F}$を法とするリー環をなすものとする。

定理1.　上の仮定の下で$\mathcal{F}'$を$X_1,\dots,X_k$と$\mathcal{F}$によって定ま

る葉層，Lを$\mathcal{F}$の葉，L'を$\mathcal{F}'$の葉で$L \subset L'$となるものとし，その包含写像を$j : L \to L'$とする．このとき，

$$k_i(\mathcal{F}, L; M) = \begin{cases} j^* k_i(\mathcal{F}', L'; M) & 1 \leqq i \leqq q-k \\ 0 & i > q-k. \end{cases}$$

この結果は筆者による$\mathcal{F}$と$\mathcal{F}'$の2次特性類の間の等式に関する定理[S]の類似である．

次いで，0でないk_1-不変量をもつ巾零葉層を構成し，定理1を用いてこの葉層を保つ局所自由，横断的なリー群の作用は存在しないことを示す．またHを連結単連結リー群とするとき，上述の巾零葉層を平坦主H-束にリフトしたものは，再び定理1によって0でないk_1-不変量をもつことがいえる．

§2 葉不変量と横断k-frame field

$T(M)$をMの接ベクトル束とし，$F = T(\mathcal{F})$を$\mathcal{F}$の葉の接ベクトル全体から成る$T(M)$の部分ベクトル束とする．$\mathcal{F}$の法ベクトル束は$\nu(\mathcal{F}) = T(M)/F$と表わされる．$\nabla^B$を$\nu(\mathcal{F})$上の$\mathcal{F}$のBott接続，$K_B$をその曲率行列とする．$c_i$を$i$次Chern多項式とする．$K_B$は$\mathcal{F}$の独立な$q$個の定義微分形式のイデアルに含まれる(Bott消滅定理)から，$\mathcal{F}$の葉Lに対し，

$$c_i(K_B)|_L = 0.$$

∇^Rを$\nu(\mathcal{F})$上のリーマン接続，K_Rをその曲率行列とする．$\pi: M\times \mathbb{R}\to M$を自然射影写像とし，$\pi^*\nu(\mathcal{F}) = \nu(\mathcal{F})\times\mathbb{R}$上の接続を

$$\nabla = t\nabla^B + (1-t)\nabla^R \qquad (t\in\mathbb{R})$$

によって定める．自明束$\pi: M\times I\to M$のファイバー上の積分作用素をπ_*とかくと，K_Rが歪対称であることから，

$$d(\pi_*(c_i(K)|M\times I) = c_i(K_B) \qquad i \text{ 奇数}$$

がいえる．ゆえに

$$d(\pi_*(c_i(K)|M\times I)|_L = c_i(K_B)|_L = 0.$$

$E(h_1, h_3, \cdots, h_l)$, $l=2[\frac{q+1}{2}]-1$ を$h_1, h_3, \cdots, h_l$によって生成される外積多元環で，$\deg h_i = 2i-1$とする．次数つき多元環の準同形写像$\alpha_{\mathcal{F},L;M}: E(h_1, h_3, \cdots, h_l)\to H^*_{DR}(M)$が

$$\alpha_{\mathcal{F},L;M}(h_i) = [\pi_*(c_i(K)|M\times I)|L] \in H^{2i-1}_{DR}(L)$$

$$i = 1, 3, \cdots, l$$

によって定義される．右辺は∇^B，∇^Rのとり方によらないで，$\mathcal{F}$とLだけで一意的に定まり，葉層の横断写像に関して自然性をもつことがいえる．$h_i(\mathcal{F}, L; M) = \alpha_{\mathcal{F},L;M}(h_i)$とかき，これを$h_i$-葉不変量とよぶことにする．

$\Gamma(\xi)$は束ξのC^∞-sections全体の加群を表わすものとする．$Y\in\Gamma(T(M))$とし，任意の$Z\in\Gamma(F)$に対して

$$[Y, Z] \in \Gamma(F)$$

となるとき，Yは$\mathcal{F}$を保つという．$C(M)$をM上のC^∞-関数全体の加群とする．$X_1,\cdots,X_k\in\Gamma(T(M))$に対して$\alpha_{ij}^l\in C(M)$, $Y_{ij}\in\Gamma(F)$, $i,j,l=1,\cdots,k$が存在し，

$$[X_i,X_j]=\sum_{l=1}^{k}\alpha_{ij}^l X_l+Y_{ij}$$

となるとき，$X_1,\cdots,X_k$は$\mathcal{F}$を法とするリー環を定めるという．$\{X_1,\cdots,X_k\}$が$\mathcal{F}$に横断的なk-frame fieldで，$X_1,\cdots,X_k$が$\mathcal{F}$を法とするリー環を定めるならば，各X_iによって定義される自明直線束をξ_iとかくとき，部分束

$$F'=\bigoplus_{i=1}^{k}\xi_i\oplus F\subset T(M)$$

は積分可能となる．F'に対応する葉層を$\mathcal{F}'$とかき，$X_1,\cdots,X_k$と$\mathcal{F}$によって定まる葉層という．あきらかに$\mathcal{F}\subset\mathcal{F}'$。

§3 拡大葉層の葉不変量

定理1．$\mathcal{F}$をM上の余次元qの葉層，$\{X_1,\cdots,X_k\}$をM上の余次元kの葉層$\mathcal{F}$に横断的なk-frame fieldで$\mathcal{F}\subset\hat{\mathcal{F}}$であるとする．各$X_i$は$\mathcal{F}$を保ち，$X_1,\cdots,X_k$は$\mathcal{F}$を法とするリー環を定めるものとする．$\mathcal{F}'$を$X_1,\cdots,X_k$と$\mathcal{F}$によって定まる葉層とし，$L$を$\mathcal{F}$の葉，$L'$を$\mathcal{F}'$の葉で$L\subset L'$となるものとする．$j:L\to L'$を包含写像とする．このとき，

$$h_i(\mathcal{F},L;M)=\begin{cases} j^*h_i(\mathcal{F}',L';M) & 1\leq i\leq q-k\\ 0 & i>q-k.\end{cases}$$

証明　$T(\mathfrak{F})=\tilde{F}$ のホイットニー和分解 $\tilde{F}=F\oplus\hat{V}$ を用いて，法ベクトル束の間の関係

$$V=\bigoplus_{i=1}^{k}\xi_i\oplus\tilde{V},\qquad V=\nu(\mathfrak{F}),\ \tilde{V}=\nu(\mathfrak{F}')$$

が得られる．$\tilde{\nabla}$ を $\tilde{V}$ 上の $\mathfrak{F}'$ の Bott 接続，∇' を $\bigoplus_{i=1}^{k}\xi_i$ 上の大域の k-frame field に関する自明な接続とし，V 上の接続を，

$$\nabla=\nabla'\oplus\tilde{\nabla}$$

によって定める．$\bigoplus_{i=1}^{k}\xi_i\oplus\tilde{V}\subset T(M)$ は部分ベクトル束であるから，$s\in\Gamma(\tilde{V})$ はそのまゝ $\Gamma(\bigoplus_{i=1}^{k}\xi_i\oplus\tilde{V})\subset\Gamma(T(M))$ の元とみなされる．

ρ： $T(M)\to V=T(M)/F$ を射影写像とする．X_i は $\mathfrak{F}$ を保つから，

$$[X,X_i]\in\Gamma(F)\qquad X\in\Gamma(F).$$

ゆえに

$$\nabla'_X(X_i)=0=\rho([X,X_i])\qquad i=1,\cdots,k$$

となり，任意の $s'\in\Gamma(\bigoplus_{i=1}^{k}\xi_i)\subset\Gamma(T(M))$ に対して

$$\nabla_X(s')=\nabla'_X(s')=\rho([X,s']).$$

$\tilde{\rho}$： $T(M)\to\tilde{V}=T(M)/F'$ を射影写像とすると，仮定により $\tilde{F}=F\oplus\tilde{V}\subset T(M)$ は積分可能であるから，任意の $\tilde{s}\in\Gamma(\tilde{V})\subset\Gamma(T(M))$ および $X\in\Gamma(F)$ に対して

$$([X,\tilde{s}]\text{ の }\xi_i\text{ 成分})=0$$

となる．したがって $\rho([X,\tilde{s}])=\tilde{\rho}([X,\tilde{s}])$ が得られ，

$$\nabla_X(\tilde{s}) = \tilde{\nabla}_X(\tilde{s}) = \tilde{\rho}([X, \tilde{s}])$$
$$= \rho([X, \tilde{s}]).$$

任意の $s \in \Gamma(\bigoplus_{i=1}^{k} \xi_i \oplus \tilde{V})$ は

$$s = s' \oplus \tilde{s}$$

の形であるから，$X \in \Gamma(F)$ に対して

$$\nabla_X(s) = \nabla'_X(s') + \tilde{\nabla}_X(\tilde{s})$$
$$= \rho([X, s']) + \rho([X, \tilde{s}])$$
$$= \rho([X, s'+\tilde{s}])$$
$$= \rho([X, s]).$$

したがって ∇ は Ξ の Bott 接続となる．

$\{\tilde{s}_1, \cdots, \tilde{s}_{q-k}\}$ を $\tilde{V}$ の局所 $(q-k)$-frame section とする．$\{s_1, \cdots, s_q\} = \{\tilde{s}_1, \cdots, \tilde{s}_{q-k}, X_1, \cdots, X_k\}$ とおけば，これは V の局所 q-frame section となる． $\tilde{\theta}$ を $\tilde{\nabla}$ の $\{\tilde{s}_\lambda\}$ に関する接続行列とする． ∇ の $\{s_\mu\}$ に関する接続行列 θ は

$$\theta = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる． $\tilde{\nabla}^0$ を $\tilde{V}$ 上の定まったリーマン接続とし，$\tilde{\theta}^0$ を $\{\tilde{s}_\lambda\}$ に関する $\tilde{\nabla}^0$ の接続行列とする． $V = \bigoplus_{i=1}^{k} \xi_i \oplus \tilde{V}$ 上の接続 $\nabla^0 = \nabla' \oplus \tilde{\nabla}^0$ の $\{s_\mu\}$ に関する接続行列は

$$\theta^0 = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\pi^* V = V \times \mathbb{R}$ 上の接続を

$$\nabla^* = t\nabla + (1-t)\nabla^0 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

によって定める．その $\{s_\mu\}$ に関する接続行列は，

$$\theta^* = t\theta + (1-t)\theta^0 .$$

Ω^* を ∇^* の $\{s_\mu\}$ に関する曲率行列とする．このとき

$$\Omega^* = d\theta^* - \theta^* \wedge \theta^* .$$

∇^* と同様，$\pi^* \tilde{V} = \tilde{V} \times \mathbb{R}$ 上の接続 $\tilde{\nabla}^*$，$\{\tilde{s}_\mu\}$ に関する接続行列 $\tilde{\theta}^*$ および曲率行列 $\tilde{\Omega}^* = d\tilde{\theta}^* - \tilde{\theta}^* \wedge \tilde{\theta}^*$ が得られ，

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$I^i(GL(q;\mathbb{R}))$ をリー環 $\mathfrak{gl}(q;\mathbb{R})$ 上の i 次斉次随伴不変多項式全体のベクトル空間とする．$I^i(GL(q-k;\mathbb{R}))$ も同様に定義されるが，自然な対応によってこれは $I^i(GL(q;\mathbb{R}))$ の部分空間とみることができる．したがって $c_i \in I^i(GL(q;\mathbb{R}))$ に対して $c_i(\tilde{\Omega}^*)$ $i \leqq q-k$ は意味をもち，

$$\begin{aligned} c_i(\Omega^*) &= c_i(\tilde{\Omega}^*) \qquad & 1 \leqq i \leqq q-k \\ &= 0 & i > q-k . \end{aligned}$$

ゆえに $1 \leqq i \leqq q-k$ に対して

$$\begin{aligned} h_i(\mathcal{F}, L; M) &= [\pi_*(c_i(\Omega^*)|M \times I)|L] \\ &= [\pi_*(c_i(\tilde{\Omega}^*)|M \times I)|L] \\ &= j^*[\pi_*(c_i(\tilde{\Omega}^*)|M \times I)|L'] \end{aligned}$$

$$= j^* h_i(\mathfrak{F}', L'; M),$$

$i > q-k$ に対しては $h_i(\mathfrak{F}, L; M) = 0$. ■

§4 巾零葉層

巾零リー群の作用による軌道葉層を<u>巾零葉層</u>という. G を n 次元連結単連結リー群, $G_0 \subset G$ を一様疎部分群すなわち $K = G/G_0$ がコンパクトであるとする.

定理2. 多様体 $K \times \mathbb{R}$ の上に余次元1の巾零葉層 $\mathfrak{F}$ が存在し, $K \times \{0\}$ を葉にもち,

$$h_1(\mathfrak{F}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}) \neq 0.$$

証明 [S2]参照.

$K \times \mathbb{R}$ 上の葉層 $\mathfrak{F}$ は, $m \geqq 1$ に対し $\mathbb{R}^{m-1}$ 上の点葉層との積をとることにより,

$$K \times \mathbb{R}^m = (K \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{m-1}$$

の上の余次元 m 葉層に延長される. これを同じ記号 $\mathfrak{F}$ で表わすことにする. F を $K \times \mathbb{R}$ 上の $\mathfrak{F}$ の接ベクトルから成る $T(K \times \mathbb{R})$ の部分束, V を $K \times \mathbb{R}$ 上の $\mathfrak{F}$ の法ベクトル束, V_m を $K \times \mathbb{R}^m$ 上の $\mathfrak{F}$ の法ベクトル束とする. $\bar{p}: K \times \mathbb{R}^m \longrightarrow K \times \mathbb{R}$ を $K \times \mathbb{R}^m = (K \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{m-1}$ の才一因子への射影写像とし, $\bar{V} = \bar{p}^* V = V \times \mathbb{R}^{m-1}$ とおく. ε^{m-1} を $K \times \mathbb{R}^m$ 上の自明 $(m-1)$ ベクトル束とすると,

$$V_m = \bar{V} \oplus \varepsilon^{m-1}.$$

補題3. $h_1(\mathcal{F}, K\times\{0\}; K\times\mathbb{R}^m) = h_1(\mathcal{F}, K\times\{0\}, K\times\mathbb{R})$.

証明　∇^BをV上の$\mathcal{F}$のBott接続とする。$X\in\Gamma(T(K\times\mathbb{R}))$は写像

$$(k, t_1, \cdots, t_m) \mapsto (X(k, t_1), 0) \in T(K\times\mathbb{R})\times T(\mathbb{R}^{m-1})$$

によって$\Gamma(T(K\times\mathbb{R}^m))$の元と同一視される。$\bar{s}\in\Gamma(V)$は$\Gamma(\bar{V})$の元と自然に同一視され，これを同一記号$\bar{s}$で表わす。$\Gamma(V_m)=\Gamma(\bar{V}\oplus\varepsilon^{m-1})$は$\Gamma(V)\subset\Gamma(\bar{V})$と$\mathbb{R}^{m-1}$の座標接ベクトル場$Y_i$ $(i=1,\cdots,m)$が定めるsection $s_i\in\Gamma(\varepsilon^{m-1})$によって生成され，$Y_i$はまた$K\times\mathbb{R}^m$の接ベクトル場とみることができる。

V_m上の接続∇を

$$\nabla_X(\bar{s}) = \nabla^B_X(\bar{s}) \in \Gamma(V) \subset \Gamma(\bar{V})$$
$$\bar{s}\in\Gamma(V)\subset\Gamma(\bar{V}),\quad X\in\Gamma(T(K\times\mathbb{R}))\subset\Gamma(T(K\times\mathbb{R}^m)),$$
$$\nabla_{Y_i}(\bar{s}) = 0 \qquad \bar{s}\in\Gamma(V)\subset\Gamma(\bar{V}),$$
$$\nabla_Y(s_i) = 0 \qquad Y\in\Gamma(T(K\times\mathbb{R}^m))$$

によって定める。$\rho: T(K\times\mathbb{R}^m)\to V_m=T(K\times\mathbb{R}^m)/F\times\mathbb{R}^{m-1}) = \bar{V}\oplus\varepsilon^{m-1}$および$\bar{\rho}: T(K\times\mathbb{R})\to V=T(K\times\mathbb{R})/F$を射影写像とするとき，$Y\in\Gamma(T(K\times\mathbb{R}))\subset\Gamma(T(K\times\mathbb{R}^m))$ならば$\bar{\rho}(Y)=\rho(Y)\in\Gamma(V)\subset\Gamma(\bar{V})$. $Z\in\Gamma(T(K\times\mathbb{R}))$に対して$\bar{s}=\bar{\rho}(Z)=\rho(Z)$とおけば，$X\in\Gamma(F)\subset\Gamma(F\times\mathbb{R}^{m-1})$とするとき

$$[X, Z]\in\Gamma(T(K\times\mathbb{R}))\subset\Gamma(T(K\times\mathbb{R}^m))$$

であるから,

$$\nabla_X(\bar{s}) = \nabla_X^B(\bar{s}) = \bar{\rho}([X, Z]) = \rho([X, Z]).$$

$s_i = \rho(Y_i) \in \Gamma(\varepsilon^{m-1}) \subset \Gamma(V_m)$ $(i=1, \cdots, m-1)$ ならば

$$\nabla_X(s_i) = 0 = \rho([X, Y_i])$$

であるから, ∇ は V_m 上の $K\times\mathbb{R}^m$ における$\mathfrak{F}$の Bott 接続である. ∇^0を ε^{m-1} の $(m-1)$-frame section $\{s_1, \cdots, s_{m-1}\}$に関する自明な接続とすれば, ∇ の定義から

$$\nabla = \bar{p}^*\nabla^B \oplus \nabla^0 .$$

$\bar{\theta}$ を ∇^Bの (局所) section $\bar{s} \in \Gamma(V)$ に関する接続形式とすれば, V_mの (局所) m-frame section $\{\bar{s}, s_1, \cdots, s_{m-1}\}$ に関する∇の接続行列は,

$$\theta = \begin{pmatrix} \bar{p}^*\bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理1の証明と同様の方法により,

$$h_1(\mathfrak{F}, K\times\{0\}; K\times\mathbb{R}^m) = \bar{p}^* h_1(\mathfrak{F}, K\times\{0\}; K\times\mathbb{R}).$$

しかるに $\bar{p}|K\times\{0\}$ は恒等写像であるから,

$$h_1(\mathfrak{F}, K\times\{0\}; K\times\mathbb{R}^m) = h_1(\mathfrak{F}, K\times\{0\}; K\times\mathbb{R}). \quad ■$$

定理1, 2および補題3から, $K\times\mathbb{R}^m$ の$\mathfrak{F}$を保つリー群の作用に関して次の結論がいえる.

定理4. $K\times\mathbb{R}^m$ に延長された余次元 m の葉層$\mathfrak{F}$に対し, 局所自由横断的な$\mathfrak{F}$を保つリー群の作用は存在しない。

証明　　リー群G_1が$K\times\mathbb{R}^m$の上に局所自由に$\mathfrak{F}$に横断的に作用し，$\mathfrak{F}$を保つとする．定理1を$\mathfrak{F}$，$L=K\times\{0\}$，$\tilde{\mathfrak{F}}=\mathfrak{F}$および$G_1$の作用の下における$G_1$のリー環の基底ベクトルの像として定まる$m$-frame field $\{X_1,\cdots,X_m\}$に適用する．この場合$\mathfrak{F}'$はたゞ一つの葉$L'=K\times\mathbb{R}^m$をもつ葉層となるから，

$$h_1(\mathfrak{F}', L'; K\times\mathbb{R}^m)=0.$$

$j: K\times\{0\}\to K\times\mathbb{R}^m$を包含写像とするとき，定理1から

$$h_1(\mathfrak{F}, K\times\{0\}; K\times\mathbb{R}^m)=j^*h_1(\mathfrak{F}', L'; K\times\mathbb{R}^m)$$
$$=0.$$

ゆえに補題3により

$$h_1(\mathfrak{F}, K\times\{0\}; K\times\mathbb{R})=0$$

となり，定理2に反する．　■

§5　0でないh_1-不変量をもつ葉層の構成

G，G_0およびKは上に述べたものとする．Hを連結単連結リー群，$f: G_0\to H$を準同形写像とする．fから定まるG_0のH上の作用により主H-束$E=(G\times\mathbb{R}^m)\times_{G_0}H$が得られる．$\wp: (G\times\mathbb{R}^m)\times H\longrightarrow E=(G\times\mathbb{R}^m)\times_{G_0}H$を射影写像とする．$p_0: G\to G/G_0=K$を射影写像とすると，$\mathfrak{F}$は被覆写像$p_0\times id: G\times\mathbb{R}^m\to K\times\mathbb{R}^m$に対する$G\times\mathbb{R}^m$上の被覆葉層$\hat{\mathfrak{F}}$を定める．$(G\times\mathbb{R}^m)\times H$の上の$G_0$の対角作用は，余次元$m+\dim H$

の葉層 $\{\hat{L}\times\{h\}\}_{\hat{L}\in\mathcal{F},\, h\in H}$ を保つから，E上の余次元 $m+\dim H$ の葉層$\mathcal{F}$が得られる．あきらかに $\bar{L}=\sigma(G\times\{0\}\times\{h\})$ $(h\in H)$ は$\mathcal{F}$の葉で，その h_1－不変量について [S1] の Section 3 と同様の方法により，次の結論がいえる。

定理5. $h_1(\mathcal{F},\bar{L};E)\neq 0$.

証明　$\tilde{\mathcal{F}}=\{\sigma(G\times\mathbb{R}^m\times\{h\})\mid h\in H\}$ はE上の余次元が $\dim H=k$ の葉層となり，定義からあきらかに $\mathcal{F}\subset\tilde{\mathcal{F}}$．定理1を $M=E$，$\mathcal{F}=\mathcal{F}$，$\tilde{\mathcal{F}}$ およびHの右作用の下におけるHのリー環の基底ベクトルの像として定まる$\tilde{\mathcal{F}}$の横断 k-frame field $\{X_1,\cdots,X_k\}$ に適用する．この場合$\mathcal{F}$，$\tilde{\mathcal{F}}$共にHの右作用で不変であるから，各X_iは$\mathcal{F}$，$\tilde{\mathcal{F}}$を保つ．$X_1,\cdots,X_k$と$\mathcal{F}$とによって定まる葉層を$\mathcal{F}'$とかく．L'を$\mathcal{F}'$の葉とし，$L'\supset\bar{L}$となるものとすると，定理1により，

$$h_1(\mathcal{F},\bar{L};E)=h_1(\mathcal{F}',L';E)\ .$$

$\varphi:\ E\to K\times\mathbb{R}^m$ を束射影写像，すなわち

$$\varphi(\sigma(g,x,h))=(p_0(g),x)$$

とする．φは$\mathcal{F}$に横断的であり，葉層に対応する部分ベクトル束の一致から $\varphi^*(\mathcal{F})=\mathcal{F}'$．$h_1(\mathcal{F}',L';E)$の定義におけるBott接続およびリーマン接続として，$h_1(\mathcal{F},K\times\{0\};K\times\mathbb{R}^m)$の定義におけるこれらの接続の$\varphi$によるひきもどしをとることができるから，

$$\hat{h}_1(\mathcal{F}', L'; E) = \varphi^* \hat{h}_1(\mathcal{F}, K\times\{0\}; K\times\mathbb{R}^m).$$

仮定によりHは連結単連結であるから，φは同形写像

$$\pi_1(E) \xrightarrow{\cong} \pi_1(K\times\mathbb{R}^m)$$

をひきおこし，このことから同形写像

$$\varphi_*: H_1(E;\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_1(K\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$$

したがって

$$\varphi^*: H^1_{DR}(K\times\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\cong} H^1_{DR}(E)$$

が得られる．ゆえに上述の式と定理2および補題3から，

$$\hat{h}_1(\mathcal{F}, L; E) = \hat{h}_1(\mathcal{F}', L'; E) \neq 0. \qquad \blacksquare$$

REFERENCES

[B] R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture Notes in Math. 279, Springer-Verlag, Berlin and New York 1976, 294-307.

[G] R. Goldman, Characteristic classes on the leaves of foliated manifolds, Ph. D. Thesis John Hopkins Univ. 1973.

[R] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Actualités Sci. Indust., Herman, Paris 1952.

[Ri] B. Reinhart, Holonomy invariants for framed foliations, Technical Report No. 32, Univ. of Maryland 1972.

[S1] H. Suzuki, Foliation preserving Lie group actions and characteristic classes, Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982), 633-637.

[S2] H. Suzuki, Leaf invariants of some nilfoliations, Preprint.