数理解析研究所講究録
370巻 1979年 174-183

[0,1]および、その部分空間上の力学系について

東海大 理学部　郡山 彬
松岡 洋司

1° Expansive homeomorphism の種々の例が、Bryant [1], Hemmingsen-Reddy [3], Jakobsen-Utz [4], O'Brien [5], O'Brien-Reddy [6], Reddy [7], Utz [9], Williams [10] 等によって得られている。これらの例の多くが、fixed point を持っていることに注意しておく。さて、M. Sears [8] は Cantor set 上の、expansive homeo. の全体が、Homeo. 全体の空間内で、compact-open topology の下、dense であるが、open でない事を証明した。この小論に於る我々の目的は、Sears と同様の結果が、より単純な空間に対しても成り立つことを示すことにある。この単純な例から、次の結果が得られることに注意しておく。

<u>定理</u>　Mを、向き付けられたPL n-多様体とし、$f: M \to M$を、向きを保つ、expansive PL homeo. かつ、$m_0 \in M$ を isolated fixed point に持っているとする。この時、任意の整数 $k>0$ に対して、次の性質を持つような homeo. $g_k: M \to M$ と近傍 U, $m_0 \in U \subset M$ が

存在する。 dをM上の距離とすると、

$$d(g_k(x), f(x)) < \frac{1}{k} \quad (\forall x \in M) \quad かつ \quad g_k|_U = id.$$

明らかに、g_kは expansive ではない。

2°. 空間J上の expansive homeomorphisms.

<u>2.1. 定義</u> $X=(X,d)$を、距離dを持つ距離空間とする。homeo. $f: X \to X$ が次の条件を満すとき、expansive homeo. と呼ばれる。 $^{\exists}$positive const. $C = C(X, f)$ s.t. $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ に対して、$^{\exists} n \in \mathbb{Z}$: $d(f^n(x), f^n(y)) > C$

<u>2.2. 記号</u> $f: X \to X$ を homeo. とする。$x \in X$ に対して、$O_f(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$ とし、$O_f(x)$ の cardinal 数を $^{\#}O_f(x)$ とする。また $\mathcal{O}_f = \{O_f(x); x \in X\}$ とし、$^{\#}\mathcal{O}_f$ も上と同様に定義する。

$J = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n=1,2,\cdots\}$, $\forall x, y \in J$ に対し $d(x,y) = |x-y|$ とおく。J上の homeo. 全体の集合を$\mathcal{H}$とし、$\mathcal{H}$の位相は、compact-open topology とする。$\mathcal{H}$内の expansive homeo. 全体を$\mathcal{E}$とする。

<u>2.3. 補題</u> map $f: J \to J$ が homeo. となる必要十分条件は、fが1対1, onto map で、かつ、$f(0)=0$ なることである。

<u>2.4. 補題</u> $f \in \mathcal{H}$ かつ $^{\#}\mathcal{O}(f) < +\infty \Rightarrow f \in \mathcal{E}$

(証明) $^{\#}\mathcal{O}(f) = n+1 < +\infty$ と仮定する。

n 個の点 $x_1, \cdots, x_n \in J$ が存在し、$0 < x_1 < \cdots < x_n$ かつ、

$\mathbb{O}(f) = \{0, O_f(x_1), \cdots, O_f(x_n)\}$ となる。点 x_0 を、$0 < x_0 < x_1$ を満す、x_1 に最も近い点とする。

$U = \{x \in J ; x \geqq x_0\}$ とおくと、明らかに、$\# U < +\infty$ である。

$C' = \min\{d(x, y) ; x, y \in U, x \neq y\}$ とおくと、$C' = x_1 - x_0 > 0$.

そこで、任意定数 C を $0 < C < C'$ となるようにとる。

さて、任意 $x \in J$ に対して、$x \in O_f(x_k)$ となる x_k が、$\{x_1, \cdots, x_n\}$ 内に存在する。従って、適当な $m \in \mathbb{Z}$ に対して、$f^m(x) = x_k$ となる。故に、異なる任意の 2 点 $x, y \in J$ に対し、

$d(f^m(x), f^m(y)) = d(x_k, f^m(y)) \geqq C' > C > 0$

従って f は expansive homeo. である。

<u>2.5. 補題</u> 任意の $n \geqq 2$ に対して、$\# \mathbb{O}(f) = n$ なる $f \in \mathcal{E}$ がある。

(証明) f_1 を、次の様な homeo. とする。

$$\begin{cases} f_1(0) = 0, \quad f_1\left(\dfrac{1}{2(k+1)}\right) = \dfrac{1}{2k} \quad (k \geqq 1), \quad f_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1, \\ f_1\left(\dfrac{1}{2k+1}\right) = \dfrac{1}{2k+3} \quad (k \geqq 0) \end{cases}$$

明らかに、$\mathbb{O}(f_1) = \{0, O_{f_1}(1)\}$, i.e. $\# \mathbb{O}(f_1) = 2$.

$n \geqq 2$ に対しては、$f_{n-1} \overset{\text{def.}}{=} f_1^{n-1} = f_1 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_1$ とおく。

$f_{n-1} \in \mathcal{H}$ かつ $\# \mathbb{O}(f_{n-1}) = n$ となり、2.4. 補題から、$f_{n-1} \in \mathcal{E}$.

<u>2.6. 補題</u> $f \in \mathcal{H}$ が $\# \mathbb{O}(f) = +\infty$ ならば $f \notin \mathcal{E}$.

(証明) $\forall \varepsilon > 0$ に対して、$B(0 ; \varepsilon)$ を、0 の J に於る ε 一近傍とする。このとき、$n < +\infty$ が存在し、

$J - B(0;\varepsilon) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ となる。 $\#\mathbb{O}(f) = +\infty$ より、

$\mathbb{O}(f) - \{O_f(x_1), \cdots, O_f(x_n)\} \neq \phi$、従って、$J - \bigcup_{i=1}^{n} O_f(x_i)$ 内に相異なる2点 x, y をとることができる。

$x, y \notin O_f(x_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ より、$f^k(x), f^k(y) \in B(0;\varepsilon)$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$

従って、$d(f^k(x), f^k(y)) \leqq \varepsilon$ for all $k \in \mathbb{Z}$

ここで $\varepsilon > 0$ は任意であったから、f は expansive ではない。

2.7. 定理　$f \in \mathcal{H}$ とする。

$$f \in \mathcal{E} \iff \#\mathbb{O}(f) < +\infty$$

(証明)　2.4. および 2.6. 補題から明らか。

ここで、次の様な、興味ある例が存在することに注意しておく。

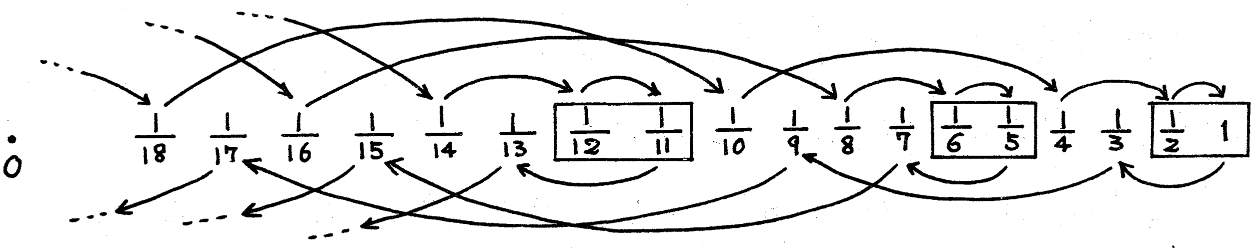
2.8. 補題　次の性質を満す homeo. $f_\infty \in \mathcal{H}$ が存在する。

$$\begin{cases} f_\infty \text{ の fixed point は } 0 \text{ のみ。かつ} \\ \#\mathbb{O}(f_\infty) = +\infty \end{cases}$$

(証明)　$x_1 = 1$, $x_k = x_{k-1} + 2k$ (for $k \geq 2$) とおく。

$f_\infty : J \to J$ を、以下の様に定義する。(図参照)

$$\begin{cases} f_\infty(0) = 0 \quad , \quad \text{各 } k \geq 1 \text{ に対して、} \\ f_\infty\left(\dfrac{1}{x_{k+j} - 2k+1}\right) = \dfrac{1}{x_{k+j-1} - 2k+1} \quad (j \geq 2), \\ f_\infty\left(\dfrac{1}{x_{k+1} - 2k+1}\right) = \dfrac{1}{x_k + 1}, \qquad f_\infty\left(\dfrac{1}{x_k + 1}\right) = \dfrac{1}{x_k}, \\ f_\infty\left(\dfrac{1}{x_k}\right) = \dfrac{1}{x_{k+1} - 2k}, \quad f_\infty\left(\dfrac{1}{x_{k+j} - 2k}\right) = \dfrac{1}{x_{k+j+1} - 2k} \quad (j \geq 1) \end{cases}$$



2.9. 定理　$\mathcal{E}$ は $\mathcal{H}$ で open ではない.

(証明) $\forall f \in \mathcal{E}$ および $\forall k \geq 1$ に対して、$g_k \in \mathcal{H}$ を、以下の様に定義する.

$\frac{1}{k} \leqq x \leqq 1$ を満す各 $x \in J$ に対して、$O_f(x)$ を考え、$O_f(x)$ の様子に応じて、g_k を作る.

(場合(i))　$O_f(x) \subset [\frac{1}{k}, 1]$

この場合は、$g_k(x) = f(x)$ とおく.

(場合(ii))　$O_f(x) \not\subset [\frac{1}{k}, 1]$

次の条件を満す2点 y, z が存在する.　$y, z \in O_f(x)$ で、

$$\begin{cases} y \in [\frac{1}{k}, 1] \text{ かつ } y' = f(y) \notin [\frac{1}{k}, 1], \\ z \notin [\frac{1}{k}, 1] \text{ かつ } f(z) \in [\frac{1}{k}, 1] \end{cases}$$

そこで、
$$\begin{cases} g_k(w) = f(w) & (\text{for } w \in O_f(x) \cap [\frac{1}{k}, 1]) \\ g_k(z) = f(z) \\ g_k(y') = z \end{cases}$$

とおく.

(場合(iii)) 上の2つの場合に使用されなかった各 $w\in[0,\frac{1}{k})$ に対しては、$g_k(w)=w$ とおく。

以上の様に定義すると、$\#\mathcal{O}(g_k)=+\infty$ となり、$g_k\notin\mathcal{E}$.
一方、$d(f,g_k)\leqq\frac{1}{k}$ である。kは任意であったから、
fは、expansive ではない homeo. で、いくらでも近く、近似することができる。

2.10. 定理　$\mathcal{E}$は$\mathcal{H}$に於て、dense である。

(証明) $\forall g\in\mathcal{H}$ および $\forall k\geqq 1$ に対して、
$[\frac{1}{k},1]$に於ては、2.9.定理の証明中の、場合(i),(ii)の様に、周期軌道を作り、$[0,\frac{1}{k})$に於ては、2.5. 補題の homeo. f_1を使って、J上の expansive homeo. を構成すればよい。

3°. より一般的な結果について、

2.9.定理の証明のポイントは、fixed point の十分小さな近傍上で、homeo. を id. に修正することであった。この事に注目すれば、1°.に於て述べた、より一般的な結果を得る。
証明には、次の2つの定理を必要とする。

3.1. 定理(V.K.A.M. Gugenheim [2]) Mを PL n-cell 又は、PL n-sphere とする。Mから自分自身への、向きを保つ、PL homeo. は、id. に PL isotopic である。

3.2. 定理 (Regular neighborhoods の一意性)

M を PL 多様体, P を M 内の compact polyhedron. N_1, N_2 を、共に P の M に於る regular nbd. とする.
この時, 次の性質を満す PL homeo. $h: M \to M$ が存在する.

$h(N_1) = N_2$, $h|_P = id.$ $h|_{M-K} = id.$

(K は M 内の適当な compact set)

(1° で述べた定理の証明)

W, U_1, U_2 を、共に、m_0 を含み. 次の条件を満す. closed PL n-cell とする.

$$\begin{cases} \text{(i)} & \mathrm{diameter}(W) < \frac{1}{2k}, \ W \text{ は } m_0 \text{ 以外に fixed pt. を含まない.} \\ \text{(ii)} & m_0 \in \mathrm{Int}\, U_2 \subset U_2 \subset \mathrm{Int}\, U_1 \subset U_1 \subset \mathrm{Int}\, W, \\ \text{(iii)} & U_2 \subset \mathrm{Int}\, f(U_1) \\ \text{(iv)} & f(U_1) \subset \mathrm{Int}\, W \end{cases}$$

ここで. U_2, $f(U_2)$ は共に. m_0 の regular nbd. だから.
3.2. 定理より. $\exists$PL homeo. $\varphi: W \to W$, $\exists$compact nbd K of $U_2 \cup f(U_2)$ in $\mathrm{Int}\, f(U_1)$ s.t.

$$\begin{cases} \text{(i)} & \varphi(f(U_2)) = U_2 \\ \text{(ii)} & U_2 \cup f(U_2) \subset \mathrm{Int}\, K \\ \text{(iii)} & \varphi|_{W-K} = id. \\ \text{(iv)} & \varphi(m_0) = m_0 \end{cases}$$

そこで.

$$f_1 = \begin{cases} f & \text{on } M - \mathrm{Int}\, W \\ \varphi \circ f & \text{on } W \end{cases}$$

とおく． f_1 は PL homeo. で $f_1(U_2) = U_2$, $f_1(m_0) = m_0$ である． $\mathrm{Bd}\, U_2 \times [0, \varepsilon]$ を $\mathrm{Bd}\, U_2$ の $W - \mathrm{Int}\, U_2$ に於る collar nbd で $\mathrm{Bd}\, U_2 \times [0, \varepsilon] \subset \mathrm{Int}\, f(U_1)$ となるものとする．

3.1. 定理から， $\exists$PL homeo. $H : \mathrm{Bd}\, U_2 \times [0, \varepsilon] \to \mathrm{Bd}\, U_2 \times [0, \varepsilon]$ s.t.

$$\begin{cases} H(x, \varepsilon) = (x, \varepsilon) \\ H(x, 0) = (f_1^{-1}(x), 0) \end{cases}, \quad \text{for all } x \in \mathrm{Bd}\, U_2$$

そこで，Hを， $M - (\mathrm{Bd}\, U_2 \times [0, \varepsilon) \cup U_2)$ 上 id. map として拡張する．

$$g_k = \begin{cases} H \circ f_1 & \text{on } M - \mathrm{Int}\, U_2 \\ id. & \text{on } U_2 \end{cases}$$

とおく。

作り方から，g_k は expansive ではなく，かつ，

$$d(f(x), g_k(x)) < \frac{1}{2k} \quad \text{for all } x \in M.$$

となる．

REFERENCES.

[1] B.F. BRYANT, Expansive self-homeomorphisms of a compact metric space, Amer. Math. Monthly, 69 (1962) 386-391.

[2] V.K.A.M. GUGENHEIM, Piecewise linear isotopy, Proc. London Math. Soc., 31 (1953) 29-53.

[3] E. HEMMINGSEN - W. REDDY, Expansive homeomorphisms on homogeneous spaces, Fund. Math. LXIV (1969) 203-207

[4] J.F. JAKOBSEN - W.R. UTZ, The nonexistence of expansive homeomorphisms of a closed 2-cell, Proc. J. Math., 10 (1960) 1319-1321.

[5] T. O'BRIEN, Expansive homeomorphisms on compact manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 24 (1970) 769-771

[6] T. O'BRIEN - W. REDDY, Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphisms, Pacific J. Math., 35 (1970) 737-741.

[7] W. REDDY, The existence of expansive homeomorphisms on manifolds, Duke Math. J., 32 (1965) 627-632.

[8] M. SEARS, Expansive self-homeomorphisms of the Cantor set, Math. Systems Theory, 6 (1972) 129-132.

[9] W.R. UTZ, Unstable homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950) 769-774.

[10] R.F. WILLIAMS, A note on unstable homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955) 308-309.