数理解析研究所講究録
95巻 1970年 112-129

(0－1)変数計画問題に対する ブール代数的解法

京都大学 工学部　三根 久
陸上自衛隊 業務学校　成久洋之

§1. はじめに

最近,整数計画法ということが盛かんに論議されているが,その中において,特に(0－1)変数計画問題解法アルゴリズムは重視されている。それは実際問題として,この種の計画問題が可成り多いことおよび全ての整数値が2進数で表現しうることに基づいていることである。本紙において,著者らはブール代数的解法アルゴリズムにつき記述する。元来,この種のアルゴリズムはR. Fortet[1]とR. Camion[2]によりうえられており,P. L. Ivănescue[3]はFortetらの考えに基づいて擬似ブール計画法なるものを提案している。さらに,稲垣・福村ら[4]は条件式をもつ場合の擬似ブール計画法なるものに発展させている。著者らは,Ivănescue[5],[6]や稲垣らの方法とは異なった方法で,しかもより積極的にブール代数を利用した手法につきのべるものである。

§2、問題の記述

(0−1)変数計画問題は一般につぎのように表わされる

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
g_1(x_1, \cdots, x_n) &\geq b_1, \\
g_2(x_1, \cdots, x_n) &\geq b_2, \\
&\cdots\cdots \\
g_m(x_1, \cdots, x_n) &\geq b_m,
\end{aligned}
$$

$$(2)\qquad x_j = 0 \text{ or } 1 \quad (j=1, \cdots, n)$$

となる条件のもとで

$$(3)\qquad \min(\text{or } \max)\quad f(x_1, \cdots, x_n)$$

となるような$(x_1, \cdots, x_n)$を求めよ。

(1)および(2)を満足するような$(x_1, \cdots, x_n)$を実行可能点と呼び、このような実行可能点の集合を実行可能可能領域と呼んでFで表わす。さらに、Fに属するものの中で(3)を満足するものを最適点という。

ここで、もし(1)および(2)を満足すれば1であり、そうでないときには0となるような関数$\Phi(x_1, \cdots, x_n)$を考えよう。これはいわゆる特性関数であり、さらに、後述するようにブール関数でもある。すると、関数$\Phi(x_1, \cdots, x_n)$を用いることにより(1),(2),(3)の問題はつぎのように書き表わすことが出来る。

$$(4)\qquad \Phi(x_1, \cdots, x_n) = 1 ,$$

(2) $$x_j = 0 \text{ or } 1 \quad (j = 1, \cdots, n) \quad ,$$

となる条件のもとで

(5) $$\min \ f(x_1, \cdots, x_n)$$

となるような $(x_1, \cdots, x_n)$ を求めよ。

§3. 諸定義および諸定理

$G_2 = \{0, 1\}$ とし，G_2 の n 位の直積を G_2^n とする。G_2^n から G_2 への写像 M_1 はブール関数といわれ，G_2^n から実数体 R への写像 M_2 は擬似ブール関数といわれる。以下本節において，本アルゴリズム記述に必要なブール代数の諸特性につき記述する。

全てのブール関数は最小項展開形式で表わせることが知られている。

定理1； $M_1(x_1, \cdots, x_n) = \bigcup_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} M_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$,

ただし，$\cup$ は $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in G_2^n$ の全ての可能な値の論理和を示し，$x_j\ (j = 1, \cdots, n)$ は0か1のみをとる。また，$x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$ とする。

$M_1(x_1, \cdots, x_n)$ と同様に全ての $M_2(x_1, \cdots, x_n)$ もつぎのように表わされることが知られている。

定理2； $M_2(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} c_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$,

ただし，$\sum$ は $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in G_2^n$ の全ての可能な値についての算術

和を示し，$C_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} = M_2(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ とする。

ブール関数$M_1(x_1, \cdots, x_n)$は最小項形式展開が可能であるが，ブール代数により簡略化することによりつぎのように表わせる。

定理3；$M_1(x_1, \cdots, x_n) = \bigcup_{k \in K} (x_1^{\alpha_{1k}} \cdots x_n^{\alpha_{nk}})_k$，

$(x_1^{\alpha_{1k}}, \cdots, x_n^{\alpha_{nk}}) \in G_2^n$.

ただし，Kは添字集合であり，$\alpha_{jk} = \{0, 1, \nu\}$ である。この場合，νは0と1のどちらの値でもよいもので不確定要素である。

上の定理におけるνは不確定要素を表わすものであり，α_{jk}がνをとる場合にはその変数x_{jk}は論理項kの中には現われないものである。たとえば，つぎの3変数からなるブール関数を考えると，

$$M_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cup x_2 \overline{x}_3 = x_1^1 x_2^\nu x_3^\nu \cup x_1^\nu x_2^1 x_3^0,$$

$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1,\ \alpha_{21} = \alpha_{31} = \alpha_{12} = \nu,\ \alpha_{32} = 0$

となる。

擬似ブール関数$M_2(x_1, \cdots, x_n)$についてもつぎの定理をうる。

定理4；$M_2(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{h \in H} c_h (x_1^{\alpha_{1h}} \cdots x_n^{\alpha_{nh}})_h$，

ただし，$c_h \neq 0$，hは積項に付されたた添字であり，Hはhの集合を示す。この場合，α_{jh} $(h \in H)$，$j \in \{1, \cdots, n\} = N$は0，1，$\nu$をとるものとする。

一般に擬似ブール関数は定理4でのべた形式で表現されるような非線形関数であるが，変数x_j ($j \in N$)はG_2の要素であるから定理4における展開積項の値は0か1である。したがって，その積項に関してつぎの線形化定理をうる。

定理5； 全ての擬似ブール関数は線形関数に変換できる。

証明； $M_2(x_1, \cdots, x_n)$は定理4のように展開できる。さらに，全ての変数x_j, $j \in N$の積の値は，$x_j \in G_2$であるから，0か1である。したがって，

(6) $$y_h = (x_1^{\alpha_{1h}} \cdots x_n^{\alpha_{nh}})_h, \quad h \in H$$

となる変数y_hを定義するならば，$M_2(x_1, \cdots, x_n)$はつぎのようなy_h ($h \in H$)の関数として表わせる。

(7) $$M_2(x_1, \cdots, x_n) = \underset{h \in H}{M_2}(y_h) = \sum_{h \in H} c_h y_h, \quad y_h \in G_2, \; h \in H.$$

ただし，

(8) $$\begin{aligned} y_h &= 1 \quad \text{if} \quad x_j^{\alpha_{jh}} = 1 \quad \text{for all } j \in N, \\ y_h &= 0 \quad \text{if} \quad x_j^{\alpha_{jh}} = 0 \quad \text{for at least one } j \in N. \end{aligned}$$

したがって，M_2はy_hに関しての線形擬似ブール関数に変換されたことになる。

§4. 擬似ブール条件式よりブール条件式への変換

擬似ブール関数$M_2(x_1, \cdots, x_n)$がつぎのような形で表わされる擬似ブール条件式について考えよう。

(9) $$M_2(x_1, \cdots, x_n) \geqq b,$$

線形化定理5を用いると擬似ブール条件式(9)は

(10) $$\sum_{h\in H} c_h y_h \geq b,$$

となる。ただし、y_hはつぎのとおり。

(11) $$y_h = (x_1^{\alpha_{1h}} \cdots x_n^{\alpha_{nh}})_h,\quad y_h \in G_2,\quad h\in H.$$

ここで、$H_p=\{h \mid c_h>0\}$, $H_n=\{h \mid c_h<0\}$とすると、

(10)はつぎのように表わせる。

(12) $$\sum_{h\in H_p} c_h y_h + \sum_{h\in H_n} c_h y_h \geq b.$$

$y_h = 1-\bar{y}_h$, $h\in H$ であるから、

(13) $y_h = y_h \ (h\in H_p)$, $y_h = 1-\bar{y}_h \ (h\in H_n)$

とすると(12)はつぎのようになる。

(14) $$\sum_{h\in H_p} c_h y_h + \sum_{h\in H_n} c_h (1-\bar{y}_h) \geq b.$$

すなわち、

(15) $$\sum_{h\in H_p} c_h y_h - \sum_{h\in H_n} c_h \bar{y}_h \geq b - \sum_{h\in H_n} c_h$$

となる。(15)の左辺における全係数は正であるから、つぎのような記号変換を考えると、(10)は(17)のように書き表わせる。

(16) $$\begin{cases} d_h = c_h \ (h\in H_p), & d_h = -c_h \ (h\in H_n) \\ w_h = y_h \ (h\in H_p), & w_h = -\bar{y}_h \ (h\in H_n), \quad s = b - \sum_{h\in H_n} c_h. \end{cases}$$

(17) $$\sum_{h\in H} d_h w_h \geq s,\quad d_h > 0,\quad h\in H.$$

さらに、便宜上つぎの関係が成立するように添字$h\in H$を付けかえる。

(18) $$d_h \geq d_{h+1},\quad h\in H.$$

(17)を満足するようなw_h, $h \in H$を求めることは

(19) $$\sum_{h \in H'} d_h \geq S \quad , \quad H' \subseteq H$$

となるH'を求めることに等しい。ところが，$d_h > 0$であるので(17)をブール条件式に変換した場合，その論理関数は単調増加論理関数となり，単調増加論理関数は正変数のみの展開論理項の論理和で表現できる。すなわち，

(20) $$\varphi_{h \in H}(\cdots w_h \cdots) = \bigcup_t \Big(\bigcap_{h \in H'} w_h\Big)_t$$

いま(17)をブール条件式

(21) $$\varphi(w_1, \cdots, w_h, \cdots w_l) = 1 , \quad \mathrm{Card.}(H) = l$$

に変換した場合，φの1つの展開論理項を1とするようなw_hの値は1であり，$H' = \{h \mid w_h = 1\}$とすると，(17)の実行可能解は　$w_h = 1\ (h \in H')$, $w_h = 0\ (h \notin H')$となる。H'の集合$\{H'\}$に添字をつけ，その添字集合を$F(H')$とすると

(20') $$\varphi(w_1, \cdots, w_h, \cdots, w_l) = \bigcup_{t \in F(H')} \Big(\bigcap_{h \in H'} w_h\Big)_t$$

となる。(20')が最簡略化された表現であるとすると，(19)を満す最小個数の要素からなるH'のみを求めればよい。したがって，つぎの条件式が成立するようにH'を求めればよい。

(22) $$\sum_{h \in H'' \subset H'} d_h < S$$

§5. アルゴリズムの基本的考え方

(4)のブール関数$\Phi(x_1, \cdots, x_n)$は最小項展開形式で表現さ

れ，各展開論理項はその値を1とすることにより与えられた問題の実行可能解に対応している。したがって，問題は与えられたブール関数の展開論理項の中から最適解に対応する論理項を如何にして探索するかということになる。このため，展開論理項の中から適当な方法で最適解となり得ない論理項を除去することを考え，最終的に最適解に対応するもののみを残すようにしようとするものである。一般に，展開論理項数が少なければ少ない程，上述の最適解に対応する論理項の選択が容易になる。したがって，ブール関数の展開論理項数を減少させるため，最初に与えられた条件式に加えて，さらにつぎの条件式を付加する。

(23) $\qquad f(x_1, \cdots, x_n) < f(\xi_1', \cdots, \xi_n')$,

ただし，$(\xi_1', \cdots, \xi_n') \in F$.

(23)に対応するブール条件式として，つぎのものを得たとする。

(24) $\qquad \Phi_{b_1}(x_1, \cdots, x_n) = 1$.

すると，全ブール条件式として，(25)を得る。

(25) $\qquad \Phi(x_1, \cdots, x_n) \wedge \Phi_{b_1}(x_1, \cdots, x_n) = 1$.

すると，新しい問題として，(25)を満足するものの中で(5)を満足するような$(x_1, \cdots, x_n)$を求めるものを考えればよい。この場合，(23)より目標関数の値は必ず$f(\xi_1', \cdots, \xi_n')$より小さくなっている。しかも，このときには，(25)のブール関数の展

開論理項は必らず (4)のそれよりその項数は少なくなってい
る。つぎに(25)加を最小項展開し，その展開論理項の中より目
標関数値を出来るだけ小さくするような実行可能解を選び，
それを$(\xi_1^2, \cdots, \xi_n^2)$とし不等式(26)を生成する。

(26) $$f(x_1, \cdots, x_n) < f(\xi_1^2, \cdots, \xi_n^2)$$

ただし，この場合(27)が成立している。

(27) $$f(\xi_1^1, \cdots, \xi_n^1) > f(\xi_1^2, \cdots, \xi_n^2)$$

(26)に対応するブール条件式(28)を生成する。

(28) $$\Phi_{b_2}(x_1, \cdots, x_n) = 1$$

Φ_{b_2}と$\Phi \cap \Phi_{b_1}$との論理積をとり，新しいブール条件式を生成する。このような繰返り操作により，漸次実行可能解の数を減少させて行き，s－段階において，不等式(29)を得たとする。さらに，(29)に対応するブール条件式(30)を得る。

(29) $$f(x_1, \cdots, x_n) < f(\xi_1^s, \cdots, \xi_n^s)$$

(30) $$\Phi_{b_s}(x_1, \cdots, x_n) = 1$$

Φ_{b_s}と$\Phi \cap \bigcap_{k=1}^{s-1} \Phi_{b_k}$との論理積をとることにより新しいブール条件式を生成する。この場合，

(31) $$\Phi(x_1, \cdots, x_n) \cap \bigcap_{k=1}^{s} \Phi_{b_k}(x_1, \cdots, x_n) \equiv 0$$

となれば，(29)を満足するような実行可能解は存在しないわけで，(29)の代りに(32)を考える。

(32) $$f(x_1, \cdots, x_n) = f(\xi_1^s, \cdots, \xi_n^s)$$

(32)に対応するブール条件式を(33)で表わし，新ブール条件式(34)をうる。この(34)の展開論理項は全て最適解に対応する。

(33) $$\Phi'_{bs}(x_1,\ldots,x_n)=1,$$

(34) $$\Phi(x_1,\ldots,x_n)\cap\bigcap_{k=1}^{s-1}\Phi_{bk}(x_1,\ldots,x_n)\cap\Phi'_{bs}(x_1,\ldots,x_n)=1$$

(31)が成立しない場合には，さらにS+1段階の操作を繰返すことにより必らずいずれかの段階で(31)式が成立する。このことより最適解を有限回の繰返しで必らず得られることがわかる。

つぎに，目標関数の上限値をあたえる$(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in F$を得る方法につきのべよう。定理3より，

(35) $$\Phi(x_1,\ldots,x_n)=\bigcup_{k\in K}(x_1^{\alpha_{1k}}\cdots x_n^{\alpha_{nk}})_k.$$

任意のkについて，その展開論理項の値を1とすることにより，変数x_j $(j\in N)$の値は

(36) $$x_j=\alpha_{jk},\ j\in N,\ \forall k\in K$$

となる。ここで，$\alpha_{jk}=v$となるものの数を$N(v)$とすると，あるkに対する展開論理項に対応する実行可能解の数は$2^{N(v)}$個存在する。$f(\xi_1,\ldots,\xi_n)$を決定するためには$x_j=v$の値について，$v=0$かあるいは$v=1$と決定しなければならない。定理4より$f(x_1,\ldots,x_n)$はつぎのように展開される。

(37) $$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{h\in H}c_h(x_1^{\alpha_{1h}}\cdots x_n^{\alpha_{nh}})_h$$

いま，上に定めたkに対して，つぎの集合を定義する。

$$J_k=\{j\mid\alpha_{jk}\neq v\},\qquad J_{vk}\{j\mid\alpha_{jk}=v\}$$

すると，$f(x_1,\cdots,x_n)$ は $x_j\ (j\in Jud)$ の関数としてつぎのように表わせる。

$$(38)\qquad \underset{\begin{cases} x_j = \alpha_{jk} & (j\in \overline{Jud}) \\ x_j = x_j & (j\in Jud)\end{cases}}{f(x_1,\cdots,x_n)} = \sum_{h'\in H'} c_{h'} \Big(\prod_{j\in Jud} x_j^{\alpha_{jh'}}\Big)_{h'} .$$

さらに，集合 $Judn$, $Judp$ をつぎのように定義する。

$$Judn = \Big\{ j \,\Big|\, \Big(\prod_{j\in \bar{J}ud\subseteq Jud} x_j^{\alpha_{jh'}}\Big)_{h'},\ c_{h'}<0,\ h'\in H' \Big\},$$

$$Judp = \Big\{ j \,\Big|\, \Big(\prod_{j\in \bar{J}ud\subseteq Jud} x_j^{\alpha_{jh'}}\Big)_{h'},\ c_{h'}>0,\ h'\in H' \Big\},$$

ただし，h', H' はそれぞれ h および H と同じように定義されているものとする。その結果，$\alpha_{jk}\ (j\in \overline{Jud},\ {}^{\forall}k\in K)$ はつぎのように決定される。

(i) $Judn \cap Judp = \phi$ ならば，

$$\alpha_{jk} = 0 \qquad (j\in Judp),$$
$$\alpha_{jk} = 1 \qquad (j\in Judn).$$

(ii) $Judn \cap Judp \neq \phi$, $Judn \oplus Judp = \phi$ ならば，

$$\alpha_{jk} = 1 \qquad (j\in Jn\subseteq Jud),$$
$$\alpha_{jk} = 0 \qquad (j\notin Jn),$$

ただし，

$$Jn = \Big\{ j \,\Big|\, \Big(\prod_{j\in \bar{J}ud\subseteq Jud} x_j^{\alpha_{jh'}}\Big)_{h'},\ \min_{h'\in H'} c_{h'} \Big\}.$$

(iii) $Judn \cap Judp \neq \phi$, $Judn \oplus Judp \neq \phi$ ならば，

$$\alpha_{jk} = 1 \qquad (j\in Judn\cap \overline{Judp}),$$
$$\alpha_{jk} = 0 \qquad (j\in Judp\cap \overline{Judn}).$$

§6. アルゴリズム

ステップ1.　与えられた実係数条件式をブール条件式に変換する。そのブール関数を最簡形式展開する。

ステップ2.　目標関数を小さくするような展開論理項を選択する。$(x_1^{\alpha_{1k}}\cdots x_n^{\alpha_{nk}})_k$, ${}^{\forall}k \in K$.

ステップ3.　$x_j = \alpha_{jk}\ (j \in N)$, $\exists k \in K$, $(x_1^{\alpha_{1k}}\cdots x_n^{\alpha_{nk}}) = 1$.

ステップ4.　$N(v)$ を調べて、$s = 1$ とする。

4a.　$N(v) = 0$ ならば $x_j = \xi_j^s = \alpha_{jk}$, $j \in N$ として $f(x_1, \cdots, x_n) < f(\xi_1^s, \cdots, \xi_n^s)$ を生成しステップ8へ。

4b.　$N(v) \neq 0$ ならばステップ5へ。

ステップ5.　$f(x_1, \cdots, x_n)$ において、$x_j = \alpha_{jk}\ (j \in J_d)$, $x_j = x_j\ (j \in J_{ud})$, $\exists k \in K$ として展開する。

ステップ6a.　$J_{udn} \cap J_{udp} = \phi$ ならば、$\alpha_{jk} = 1\ (j \in J_{udn})$, $\alpha_{jk} = 0\ (j \in J_{udp})$ としてステップ4aへ。

6b.　$J_{udn} \cap J_{udp} \neq \phi$ ならば、ステップ7へ。

ステップ7a.　$J_{udp} \oplus J_{udn} = \phi$ ならば、$\alpha_{jk} = 0\ (j \notin J_n)$, $\alpha_{jk} = 1\ (j \in J_n \subseteq J_{ud})$ とし、$\{j \mid \alpha_{jk} \neq v,\ j \in N' \subseteq N\} \cup J_d = J_d$ としてステップ5へ。

ステップ7b.　$J_{udp} \oplus J_{udn} \neq \phi$ ならば、$\alpha_{jk}=1$ $(j \in J_{udn} \cap \overline{J_{udp}})$，
$\alpha_{jk}=0$ $(j \in J_{udp} \cap \overline{J_{udn}})$ として
$\{j \mid \alpha_{jk} \neq v,\ j \in N' \subseteq N\} \cup J_d = J_d$ としてステップ5へ。

ステップ8.　$\Phi_{bs}(x_1, \cdots, x_n) = 1$ を生成。

ステップ9.　$\Phi \wedge \Phi_{bs}$ を生成し恒等的に零かどうか調べる。

9a.　$\Phi(x_1, \cdots, x_n) \wedge \Phi_{bs}(x_1, \cdots, x_n) \equiv 0$ ならば、
$f(x_1, \cdots, x_n) = f(\xi_1^s, \cdots, \xi_n^s)$ とし
$\Phi_{b's}(x_1, \cdots, x_n) = 1$ としてステップ10へ。

9b.　$\Phi(x_1, \cdots, x_n) \wedge \Phi_{bs}(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$ ならば、
$s \to s+1$，$\Phi \wedge \Phi_{bs} \to \Phi$ としてステップ2へ。

ステップ10　$\Phi(x_1, \cdots, x_n) \wedge \Phi_{b's}(x_1, \cdots, x_n) = 1$
を生成し，その展開論理項は全て最適解に対応するので停止する。

§7.　目標関数が単調増加関数である場合のアルゴリズム

目標関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が単調増加関数であれば，

(39)　$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{h \in H} c_h \Big(\prod_{j \in N' \subseteq N} x_j^{\alpha_{jh}} \Big)_h ,$$

(40)　$$c_h > 0 \ (h \in H), \quad \alpha_{jh} = 1 \text{ or } v \ (j \in N)$$

として表わせる。したがって(40)より，$J_{udn} = \phi$ となり，

$$J_{udn} \cap J_{udp} = \phi$$

となり，α_jの値は一意的に決定される。すなわち，

$$\alpha_j = 0\ ,\ j \in J_{udp} = J_{ud}.$$

換言すれば，$\Phi(x_1,\cdots,x_n)=1$ なるΦの中の展開論理積の値を1とするようなものは$2^{N(v)}$個の実行可能解をもつが，目標関数を小さくするために，$\alpha_j = v$ $(j\in N'\subseteq N)$ となっているものについては一意的に $\alpha_j=0$ としてよい。このことから前節でのアルゴリズムのステップ5.6.7を省略でき，さらに，次節でのべるように，ブール関数の簡略化の過程において，$\alpha_j=0$ となっているものに対し，$\alpha_j=v$ とすることにより，より一層簡単化されることがわかる。

§8. 線形ブール計画法について

与えられた問題(1),(2),(3)が線形である場合には，目標関数が単調増加関数をもつ問題に変換して考えることが出来る。したがって，問題(1),(2),(3)においては，$\alpha_{jk}=1$ となるような j に対応する目標関数の係数 c_j の和が最小となるような x_j を選べばよいことになる。すなわち，

$$\min\{f(x_1,\cdots,x_n)\mid \Phi(x_1,\cdots,x_n)=1\}$$
$$=\min_{k\in K}\Big\{\sum_{j\in J_k} c_j\ ;\ J_k=\{j_k \mid \alpha_{jk}=1,\ (x_1^{\alpha_{1k}}\cdots x_n^{\alpha_{nk}})_k=1,$$
$$\Phi(x_1,\cdots,x_n)=\bigcup_{k\in K}(x_1^{\alpha_{1k}}\cdots x_n^{\alpha_{nk}})_k\}\Big\}.$$

となっている。これらのことからつぎの定理6をうる。

定理6; 問題(1),(2),(3)において(3)が単調増加関数であるならば，目標関数値はブール条件式の $\alpha_j=0$ のかわりに $\alpha_j=v$ としても不変である。

証明; 目標関数値を最小にするために $\alpha_j=v$ のかわりに，$v=0$ としたので，$\alpha_j=0$ あるいは $\alpha_j=v$ の場合において目標関数値は不変である。したがって，逆に $\alpha_j=0$ のかわりに $\alpha_j=v$ としても $f(x_1,\cdots,x_n)$ の値は不変となる。

上の定理6において，$\alpha_j=0$ の代りに $\alpha_j=v$ とすることは本来の論理関係式と異ったものを生ずることになるが，最適解に対応する論理項を含んでいるという意味において，この操作は許されうるものである。この意味において，新しい論理関係を $\approx$ なる記号で示すことにする。

系1; 問題(1),(2),(3)において，ブール条件式のある項における α_j が，$\alpha_j=0$，$j\in N$ であれば，$f(x_1,\cdots,x_n)$ の最小値は $x_j=0$ $(j\in N)$ となる。

ブール条件式におけるブール関数の展開論理項を簡略化して展開論理項数を減少させるわけであるが，そのためにつぎのような系2を使用できる。

系2; 問題(1),(2),(3)において，系1の場合が生じないとき，ブール条件式の展開論理項の中に

$$\left\{\left(\prod_{j=k_0}^{k_1} x_j\right)\cdot\left(\prod_{j=k_1+1}^{k_2} \bar{x}_j\right)\right\},\quad \left\{\left(\prod_{j=k_0}^{k_1-i} x_j\right)\cdot\left(\prod_{j=k_2+1}^{k_3} \bar{x}_j\right)\right\},$$

ただし, $k_1 > i > 0$, $k_0 < k_1 < k_2 < k_3$ となるような2項が存在すれば簡略化されて, $\left(\prod_{j=k_0}^{k_1-i} x_j\right)$ となる。

証明;

$$\left(\prod_{j=k_0}^{k_1} x_j\right)\cdot\left(\prod_{j=k_1+1}^{k_2} \bar{x}_j\right) \cup \left(\prod_{j=k_0}^{k_1-i} x_j\right)\cdot\left(\prod_{j=k_2+1}^{k_3} \bar{x}_j\right)$$

$$= \left(\prod_{j=k_0}^{k_1} x_j^1\right)\cdot\left(\prod_{j=k_1+1}^{k_2} x_j^0\right) \cup \left(\prod_{j=k_0}^{k_1-i} x_j^1\right)\cdot\left(\prod_{j=k_2+1}^{k_3} x_j^0\right)$$

$$\approx \left(\prod_{j=k_0}^{k_1} x_j\right) \cup \left(\prod_{j=k_0}^{k_1-i} x_j\right) \qquad (\text{定理6より})$$

$$= \left(\prod_{j=k_0}^{k_1-i} x_j\right)\left\{\prod_{j=k_1-i+1}^{k_1} x_j \cup 1\right\} = \prod_{j=k_0}^{k_1-i} x_j$$

系2は普通のブール代数により簡略化されないものでも重変数(literal)をもつそれをブール関数が除去することによりように簡略化できることを示している。

§9. 例題

問題 find x_j $(j=1,\cdots,6)$

min $3x_1 - 3x_1x_2 - 8x_3x_6 + 8x_1x_3x_6 + 4x_2x_5 - 4x_2x_5x_6$
$\quad - 7x_6 + 7x_5x_6 + 3x_4 - 5x_4x_5x_6$

subject to $4x_3 + x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3x_2x_3x_5 + 6x_4x_5 - 6x_2x_4x_6 \geqq -1,$

$5x_1 + 5x_5 + 5x_3 - 5x_1x_3 - 5x_1x_5 - 5x_3x_5 + 3x_2x_5 + 4x_4x_6$
$\quad + 5x_1x_3x_5 \geqq 6,$

$x_j = 0$ or 1 $(j=1,\cdots,6).$

この問題はつぎのようになる。

$$\min\ 3x_1\bar{x}_2 - 8\bar{x}_1x_3x_6 + 4x_2x_5\bar{x}_6 - 7\bar{x}_5x_6 + 3x_4 - 5x_4x_5x_6$$

subject to

$$\Phi = (\bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cup \bar{x}_3 \cup \bar{x}_5) \cap (x_1x_4x_6 \cup x_1x_2x_4 \cup x_3x_4x_6 \cup x_2x_3x_4 \cup x_4x_5x_6 \cup x_2x_4x_5 \cup x_2x_4x_6) = 1,$$

$$x_j = 0 \text{ or } 1 \quad (j = 1, \cdots, 6).$$

ここで、$\bar{x}_1x_3x_4x_6 = 1$ とすると目標関数値 f は

$$f = -10 - 2\bar{x}_5$$

となり、$\bar{x}_5 = 1$ とすることにより、

$$f(x_1, \cdots, x_6) < -12$$

なる付加条件式をうる。すると Φb_1 は

$$\Phi b_1 = \bar{x}_1x_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_6 = 1$$

となり $\quad \Phi(x_1, \cdots, x_6) \cap \Phi b_1(x_1, \cdots, x_6) \equiv 0$

したがって、$\quad f(x_1, \cdots, x_2) = -12 \quad$ として $\quad \Phi b_1'$ は

$$\Phi b_1' = \bar{x}_1x_3x_4\bar{x}_5x_6 = 1$$

$$\Phi \cap \Phi b_1' = \bar{x}_1x_3x_4\bar{x}_5x_6 = 1$$

答. $x_1 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0,\ x_6 = 1,\ x_2 = 0 \text{ or } 1,\ f = -12.$

§10、結論

本論文では、(0－1)変数計画問題に対するブール代数的解法アルゴリズムにつきのべた。このアルゴリズムは Ivănescue により提案された擬似ブール計画法に属すべきものであるが数理計画法の立場からすれば Ivănescue のよりより直接的かつ効率的といえる。アルゴリズム自体は一種の分枝限定法に属すものであり，ブール代数による簡略化の過程が最適化のそれに代えさせたアルゴリズムといえる。さらに，一度実行可能解が求まればある程度自動的に最適解を求めうる特徴を有している。

§11. 文献

[1] R. Fortet ; "Application de l'algebre de Boole en recherches Opérationelle," Rev. Français de Rech. Oper., 4, 17-25 (1960)

[2] R. Camion ; "Une methode de Resolution par l'Algebre de Boole des Problems Combinatoires ou Interviennent des Entries," Cahiers Centre d'Etude Rech. Oper, 2 (1960)

[3] P. L. Ivănescu ; "Programation polynomiel en nombre entier," Computes Rendus de l'Academie de Sciences, 257 (1963)

[4] 稲垣.稲村 "条件式をもった擬似ブール計画法" 信学誌. Vol. 50, No. 6 (1967)

[5] 三根・成久 " 0-1 変数よりなる非線形計画問題に対するブール代数的解法" 信学誌 Vol. 52 No. 7 (1969)

[6] 三根・成久 " (0-1) 変数非線形計画問題に対するブール代数的解法" 経営科学 Vol. 13 No. 2 (1970)