数理解析研究所講究録
第1802巻 2012年 166-171

吸引率を考慮したあるグラフ上での先手・後手ゲーム

大阪府立大学　大学院理学系研究科　情報数理科学専攻 手島康太 (Kota Teshima)
北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
Department of Mathematics and Information Sciences, Graduate School of Science
Osaka Prefecture University

1 はじめに

Hotelling[2] では、同一商品を販売する2つの企業が線分上に同時に参入しようとするホテリングモデルが研究された。線分上に一様に分布している消費者は商品の価格と企業までの距離に比例する移動費用の総計によりどちらの企業を選択するかを決定する。このとき、企業は得られたマーケットから計算できる利得が高くなるように最適な価格と配置場所を決定した。Eiselt[1] では、このモデルにおいてマーケットを木グラフとし、2つのうちの1つの企業が先に配置し、残りの企業が後に配置するといった逐次決定問題が扱われた。これらのモデルでは、価格と移動費用の総計で安い方へ向かうと仮定されていたため、企業の魅力による消費者の行動決定は考慮されていなかった。

一方、Huff[3] では、各地点における企業の吸引力に関する研究がされた。このモデルでは消費者の企業選択行動として、消費者は企業の魅力度に比例し、企業との距離の λ 乗に反比例するような確率で企業を選択する。ハフモデルの特徴は企業が配置している場所以外は消費者が両企業へ向かう確率が存在することである。これはホテリングモデルの欠点を補える特徴である。ハフモデルの欠点は2企業までの距離の2乗の比が同じ場所であればどちらの方向であろうとも同じ吸引確率になることである。この欠点を修正するために消費者がある企業にいくとき、別の企業を通るなら、通る企業の魅力度を高める、もしくは、その企業に行かないと設定することによりハフモデルを修正する。

本研究では、改良ハフモデルにより企業選択行動を与えた先手・後手ゲームについて研究する。

2 モデル

同一商品を販売する2つの企業 A、B が木グラフによって表現できるマーケットに参入しようとするゲームについて考える。木グラフは T=(V,E) で表し、$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ を頂点の集合、$E=\{e(v_i,v_j)|v_i,v_j\in V,i\neq j\}$ を枝の集合とする。枝 $e(v_i,v_j)$ 上の任意の2点 x,y に対して x,y を端点とする枝の部分集合も同様の記号を使用することとし、$e(x,y)$ で表す。A、B にはそれぞれ与えられた魅力度 S_A,S_B $(S_A>S_B)$ がある。消費者は木グラフの頂点上にのみ分布し、頂点 v_i でのマーケットを $M(v_i)$ とする。同様に、頂点の集合 K のマーケットを $M(K)$ で表す。需要は本質的、すなわち、すべての消費者はある法則に従ってどちらかの企業で商品を買う。このとき、利益最大化の基準の下で、初めに A が配置場所 x_A を決定し、次に B が x_A とは異なる配置場所 x_B を決定する。

今、企業 A,B はそれぞれマーケット T 上の位置 x_A,x_B に配置したとする。もし消費者が企業選択にパラメータ $\lambda=2$ のハフモデルを適用するならば、v_i にいる消費者が企業 A に行く確率 $p_A(v_i)$

および企業 B に行く確率 $p_B(v_i)$ は、

$$p_A(v_i) = \frac{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2}}{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2} + \dfrac{S_B}{d(x_B, v_i)^2}}, \quad p_B(v_i) = \frac{\dfrac{S_B}{d(x_B, v_i)^2}}{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2} + \dfrac{S_B}{d(x_B, v_i)^2}}$$

で与えられる。ここで、$d(x, y)$ は点 x, y 間の距離を表す。

V_A を A を通過して B に行く消費者がいる頂点の集合とし、V_B を B を通過して A に行く消費者の集合とする。ハフモデルによれば、どの消費者も上述の吸引率に従って行動することになる。しかしながら、$S_A > S_B$ のため、V_A にいる消費者は A を通り過ぎてまでわざわざ魅力の低い B に行く必要はない。また、V_B にいる消費者は A にいくのに、確実に B を通る。$S_A > S_B$ のため、A にいく消費者がいてもおかしくないが、$V \backslash (V_A \cup V_B)$ にいる消費者と同じ魅力であるというのには違和感を感じる。そこで、B の魅力度を V_B 上では rS_B に修正することによって我々は以下のような吸引率をもつ改良されたハフモデルを提案する。我々はこのモデルを改良ハフモデルと呼ぶ。

$v_i \in V \backslash (V_A \cup V_B)$ に対して

$$p_A(v_i) = \frac{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2}}{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2} + \dfrac{S_B}{d(x_B, v_i)^2}}, \quad p_B(v_i) = \frac{\dfrac{S_B}{d(x_B, v_i)^2}}{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2} + \dfrac{S_B}{d(x_B, v_i)^2}}$$

$v_i \in V_A$ に対して

$$p_A(v_i) = 1, \quad p_B(v_i) = 0$$

$v_i \in V_B$ に対して

$$p_A(v_i) = \frac{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2}}{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2} + \dfrac{rS_B}{d(x_B, v_i)^2}}, \quad p_B(v_i) = \frac{\dfrac{rS_B}{d(x_B, v_i)^2}}{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2} + \dfrac{rS_B}{d(x_B, v_i)^2}}$$

ここで、r は魅力度に対するパラメータであり、$r > \frac{S_A}{S_B}$ である。このとき、A, B の利得 M_A, M_B はそれぞれ

$$\begin{aligned} M_A &= \sum_{v_i \in V_A} M(v_i) + \sum_{v_i \in V \backslash (V_A \cup V_B)} \frac{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2}}{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2} + \dfrac{S_B}{d(x_B, v_i)^2}} M(v_i) \\ &\quad + \sum_{v_i \in V_B} \frac{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2}}{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2} + \dfrac{rS_B}{d(x_B, v_i)^2}} M(v_i) \end{aligned}$$

$$M_B = \sum_{v_i \in V \backslash (V_A \cup V_B)} \frac{\dfrac{S_B}{d(x_B, v_i)^2}}{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2} + \dfrac{S_B}{d(x_B, v_i)^2}} M(v_i) + \sum_{v_i \in V_B} \frac{\dfrac{rS_B}{d(x_B, v_i)^2}}{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_i)^2} + \dfrac{rS_B}{d(x_B, v_i)^2}} M(v_i)$$

であり、これらの利得を最大にする A と B の配置場所について探求する。

3 解析

この節では、改良ハフモデルについての特徴を述べ、このゲームにおける各プレイヤーの行動分析を行う。

企業 A は点 x_A に配置するとする。x_A が頂点上であれば、マーケット全体 T から x_A および x_A と接続するすべての枝を取り除いてできる部分木を $T_1,\ldots,T_m$ とおく。x_A が枝上にあれば、マーケット全体 T からその枝を取り除いてできる部分木を T_1,T_2 とおく。また、A の配置によって生成された部分木 $T_1,\ldots,T_m$ の中で、A から見て B が配置されている方向にある部分木を T_B とする。

3.1 改良ハフモデルの特徴

Lemma1 B が x_A を含む枝の端点に配置したとする。このとき、A は T_B 以外のすべての部分木のマーケットを獲得できる。また、B の利得 M_B は、

$$\frac{1}{2}M(T_B) < M_B \leq M(T_B)$$

を満たす。

証明 v_j を B が配置する x_A を含む枝の端点とする。$M_A \geq M(T\backslash T_B)$ および $M_B \leq M(T_B)$ は改良ハフモデルの確率の定義より明らか。また、$d(v_j,v_i) < d(x_A,v_i)$, $rS_B > S_A$ より

$$\begin{aligned} M_B &= \sum_{v_i\in V_B} \frac{\frac{rS_B}{d(v_j,v_i)^2}}{\frac{S_A}{d(x_A,v_i)^2}+\frac{rS_B}{d(v_j,v_i)^2}} M(v_i) > \sum_{v_i\in V_B} \frac{\frac{rS_B}{d(v_j,v_i)^2}}{\frac{rS_B}{d(v_j,v_i)^2}+\frac{rS_B}{d(v_j,v_i)^2}} M(v_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{v_i\in V_B} M(v_i) = \frac{1}{2}M(T_B) \end{aligned}$$

よって、命題が示せた。 □

Lemma1 よりただちに次の Corollary1 が導ける。

Corollary1 $M_B < \frac{1}{2}M(T)$

Lemma2 与えられた点 x_A に対して B が x_A を含む枝上に配置するならば、B は枝の端点に配置する。

証明 点 x_A と異なる x_A を含む枝の頂点を v_j とする。B は x_A を含む枝上に頂点 v_j から距離 l $(0 \leq l < d(x_A,v_j))$ だけ離れた位置に配置したとする。T_B の任意の頂点 v_i に対して $d(x_B,v_i) = l + d(v_j,v_i)$ であるので、

$$M_B = \sum_{v_i\in T_B} \frac{\frac{rS_B}{\{l+d(v_j,v_i)\}^2}}{\frac{S_A}{d(x_A,v_i)^2}+\frac{rS_B}{\{l+d(v_j,v_i)\}^2}} M(v_i) = \sum_{v_i\in T_B} \frac{1}{\frac{S_A}{rS_B}\frac{\{l+d(v_j,v_i)\}^2}{d(x_A,v_i)^2}+1} M(v_i)$$

となる。これは l の減少関数であるので、命題が成り立つ。 □

3.2 プレイヤー A の戦略の支配関係

マーケットは A,B のいずれかに配分されるので、A は部分木 $T_i, i=1,\ldots,m$ の中の最大マーケットをできるだけ小さくするように x_A を配置する。A の戦略を限定するために、T の形状で区別して考える。

Lemma3 $M(v) \geq \frac{1}{2}M(T)$ を満たす頂点 v が存在するならば、A の最適配置は v である。

証明 今、$M(v) \geq \frac{1}{2}M(T)$ を満たす頂点 v が存在するとする。v が A の最適配置ではなく、A が v 以外に配置すると仮定すると、B が v に配置したとき、$M_B \geq \frac{1}{2}M(T)$ を得る。これは Corollary1 により矛盾する。よって、A の最適配置は頂点 v である。 □

次に、すべての $v_i \in V$ に対して $M(v_i) < \frac{1}{2}M(T)$ である場合を考える。

Lemma4 v を A が v に配置したことによって生成されるすべての部分木 $T_i, i = 1, \ldots, m$ において $M(T_i) < \frac{1}{2}M(T)$ を満たすような頂点であるとする。すべての部分木 T_i に対して

$$M(T_i) < \frac{1}{2}\{M(T_1) + \ldots + M(T_{i-1}) + M(T_{i+1}) + \ldots + M(T_m)\} \tag{a}$$

を満たすような頂点 v が存在するならば、A の最適配置は v である。

証明 A はすべての部分木 T_i において $M(T_i) < \frac{1}{2}M(T)$ を満たす次数 m の頂点 v に配置するとする。このとき、Lemma2 より B は部分木 $T_1, \ldots, T_m$ のどこかに配置する。B は $x_B \in T_B$ に配置し、最大利得 M_B を得るとする。次に、v とは異なる場所に A の最適な配置が存在するかを考える。

(i) A が T_B もしくは $e(v, v_i), v_i \in T_B$ 以外に配置する場合

A が x'_A に配置した下での B の最大利得 M'_B と A が v に配置した下での B の最大利得 M_B とを比較すると、$d(v, v_i) < d(x_A, v_i), v_i \in T_B$ より

$$M_B = \sum_{v_i \in T_B} \frac{\frac{rS_B}{d(x_B, v_i)^2}}{\frac{S_A}{d(v, v_i)^2} + \frac{rS_B}{d(x_B, v_i)^2}} M(v_i) < \sum_{v_i \in T_B} \frac{\frac{rS_B}{d(x_B, v_i)^2}}{\frac{S_A}{d(x_A, v_i)^2} + \frac{rS_B}{d(x_B, v_i)^2}} M(v_i) \leq M'_B$$

である。A の利得は v に配置したときより小さくなるため、T_B もしくは $e(v, v_i), v_i \in T_B$ 以外は最適な配置場所ではない。

(ii) A が T_B もしくは $e(v, v_i), v_i \in T_B$ 上に配置する場合

A が T_B もしくは $e(v, v_i), v_i \in T_B$ の中の x'_A に配置するとする。x'_A への配置によって生成される部分木を $T'_1, \ldots, T'_k$ とし、$T \backslash T_B \subseteq T'_1, T'_i \subseteq T_B, i = 2, \ldots, k$ であるように番号づけられたものとする。また，$F = \{T'_i, i = 2, \ldots, k\}$ とする。このとき、Lemma2 より B が配置することができる場所は、部分木 $T'_1, \ldots, T'_k$ 上だけである。B が $T'_i \in F$ 上に配置したときの最大利得 M^i_B は $T'_i \subseteq T_B$，$d(v, v_i) > d(x'_A, v_i), v_i \in T'_i$ より

$$\begin{aligned}
M^i_B &= \max_{x'_B \in T'_i} \sum_{v_j \in T'_i} \frac{\frac{rS_B}{d(x'_B, v_j)^2}}{\frac{S_A}{d(x'_A, v_j)^2} + \frac{rS_B}{d(x'_B, v_j)^2}} M(v_j) < \max_{x'_B \in T'_i} \sum_{v_j \in T'_i} \frac{\frac{rS_B}{d(x'_B, v_j)^2}}{\frac{S_A}{d(v, v_j)^2} + \frac{rS_B}{d(x'_B, v_j)^2}} M(v_j) \\
&< \max_{x'_B \in T'_i} \sum_{v_j \in T'_i} \frac{\frac{rS_B}{d(x'_B, v_j)^2}}{\frac{S_A}{d(v, v_j)^2} + \frac{rS_B}{d(x'_B, v_j)^2}} M(v_j) + \sum_{v_j \in T_B \backslash T'_i} \frac{\frac{rS_B}{d(x'_B, v_j)^2}}{\frac{S_A}{d(v, v_j)^2} + \frac{rS_B}{d(x'_B, v_j)^2}} M(v_j) < M_B
\end{aligned}$$

を得る。よって、B が F 上に配置したとき、A の利得は A が v に配置したときより高くなる。次に、B が T'_1 上に配置した場合を考える。B が $x'_B \in T'_1$ に配置したときの利得 M^1_B は Lemma1 と $T \backslash T_B \subseteq T'_1$ から

$$M^1_B > \frac{1}{2}\{M(T) - M(T_B)\}$$

を得る。もし条件 (a) を満たすならば

$$\frac{1}{2}\{M(T_1) + \ldots + M(T_{B-1}) + M(T_{B+1}) + \ldots + M(T_m)\} = \frac{1}{2}\{M(T) - M(T_B) - M(x_A)\} > M(T_B)$$

よって $M^1_B > M_B$ となり、命題が示せた。 □

3.3 プレイヤー B の戦略の支配関係

A が x_A に配置したとき、Lemma2 により B は部分木 $T_1, \ldots, T_m$ のいずれかに配置することになる。本節では、それらの中から B の戦略を制限する特徴を与え、B の最適配置を決定するための近似解法を提案する。

Lemma5 x_A とは異なる x_A を含む枝の端点を v_i とする。頂点 v_i と隣接する T_B の頂点を v_j とする。T_B から v_i と v_i を含む枝を取り除いて生成される部分木のうち、頂点 v_j を含む部分木を $\hat{T}_j$ とおく。このとき、頂点 v_j が $d(v_i, v_j) \geq d(v_i, x_A)$ かつ $M(\hat{T}_j) \leq M(v_i)$ を満たすならば、B は $\hat{T}_j$ 上に配置しない。

証明 頂点 v_j が $d(v_i, v_j) \geq d(v_i, x_A)$ かつ $M(\hat{T}_j) \leq M(v_i)$ を満たすと仮定する。与えられた x_A に対して B が頂点 v_i に配置したときの利得を M_B、部分木 T_j 上に B が配置したときの利得を M'_B とする。すべての $v_k \in V \backslash (V_A \cup V_B)$ に対して $p_B(v_k) < \frac{1}{2}$ より

$$M'_B < \frac{1}{2}\{M(T_B) + M(\hat{T}_j)\} \leq \frac{1}{2}\{M(T_B) + M(v_i)\} < M_B$$

よって、命題が示せた。 □

次に、B の最適解を与えるための手法を提案する。Lemma5 で最適ではない戦略を取り除いた後、以下のような各枝上での局所探索を行うことにより B の最適配置を求める：

v_i, v_j を $d(x_A, v_i) < d(x_A, v_j)$ を満たす隣接する頂点とし、枝 $e(v_i, v_j)$ 上で頂点 v_j から v_i の方へ距離 l $(0 \leq l \leq d(v_i, v_j))$ だけ離れた点に B が配置するとする。与えられた x_A に対して M_B が最大になるような距離 l を求める。今、

$$\begin{aligned} d(x_B, v_k) &= d(v_j, v_k) + l, \quad v_k \in V_B \\ d(x_B, v_k) &= d(v_j, v_k) - l, \quad v_k \in V \backslash (V_A \cup V_B) \end{aligned}$$

が成り立つ。これらを用いて M_B を l の関数で表すと、

$$\begin{aligned} M_B &= \sum_{v_k \in V_B} \frac{\dfrac{rS_B}{(d(v_j, v_k) + l)^2} M(v_k)}{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_k)^2} + \dfrac{rS_B}{(d(v_j, v_k) + l)^2}} + \sum_{v_k \in V \backslash (V_A \cup V_B)} \frac{\dfrac{S_B}{(d(v_j, v_k) - l)^2} M(v_k)}{\dfrac{S_A}{d(x_A, v_k)^2} + \dfrac{S_B}{(d(v_j, v_k) - l)^2}} \\ &= \sum_{v_k \in V_B} \frac{M(v_k)}{\dfrac{S_A}{rS_B} \dfrac{(d(v_j, v_k) + l)^2}{d(x_A, v_k)^2} + 1} + \sum_{v_t \in V \backslash (V_A \cup V_B)} \frac{M(v_k)}{\dfrac{S_A}{S_B} \dfrac{(d(v_j, v_k) - l)^2}{d(x_A, v_k)^2} + 1} \end{aligned}$$

となる。この式を l で微分すると

$$\frac{dM_B}{dl} = \sum_{v_k \in V_B} \frac{\dfrac{2S_A}{rS_B} \dfrac{(d(v_j, v_k) + l)}{d(x_A, v_k)^2} M(v_k)}{\left\{\dfrac{S_A}{rS_B} \dfrac{(d(v_j, v_k) + l)^2}{d(x_A, v_k)^2} + 1\right\}^2} + \sum_{v_k \in V \backslash (V_A \cup V_B)} \frac{\dfrac{2S_A}{S_B} \dfrac{(l - d(v_j, v_k))}{d(x_A, v_k)^2} M(v_k)}{\left\{\dfrac{S_A}{S_B} \dfrac{(d(v_j, v_k) - l)^2}{d(x_A, v_k)^2} + 1\right\}^2}$$

を得る。したがって、

$$\frac{dM_B}{dl} = 0$$

を解けば、M_B を最大にする l の値がわかる。しかしながら、M_B の導関数には各項の分子と分母両方に変数 l が含まれており、方程式を解くことは容易ではない。そこで、$p_B(v_k)$ を別の関数に近

似することを考える。

$$p_B(v_k) = \frac{\dfrac{S_B}{d(x_B,v_k)^2}}{\dfrac{S_A}{d(x_A,v_k)^2}+\dfrac{S_B}{d(x_B,v_k)^2}} = \frac{1}{\dfrac{S_A}{S_B}\dfrac{d(x_B,v_k)^2}{d(x_A,v_k)^2}+1}$$

より

$$\frac{1-p_B(v_k)}{p_B(v_k)} = \frac{S_A d(x_B,v_k)^2}{S_B d(x_A,v_k)^2}$$

を得る。$d(x_B,v_k)$ は変数 l の一次関数であるので、$\frac{1-p_B(v_k)}{p_B(v_k)}$ は l の二次関数である。

今、関数 $\frac{1-p_B(v_k)}{p_B(v_k)}$ を $p_B(v_k)$ の区分的線形関数で近似することを考える。区間 $[0,1]$ を n_1 等分し、各区間 $[\frac{i-1}{n_1},\frac{i}{n_1}]$, $i=1,2,\ldots,n_1$ の中点で関数の接線をとることにより、

$$\frac{1-p_B(v_k)}{p_B(v_k)} \approx -\left(\frac{2n_1}{2i-1}\right)^2 p_B(v_k) + \frac{4n_1}{2i-1} - 1 \quad \text{for } [\frac{i-1}{n_1},\frac{i}{n_1}],\ i=1,2,\ldots,n_1$$

と近似できる。このとき、$\frac{1-p_B(v_k)}{p_B(v_k)}$ は l の二次関数のため、$p_B(v_k)$ も l の二次関数となる。V_B 上で r が付いている場合も同様である。よって、M_B を最大にする l を容易に解くことが出来るようになる。

4 まとめと今後の課題

木グラフ上において企業と消費者の位置関係により魅力度が変化する改良ハフモデルを提案した。改良ハフモデルを木グラフ上のホテリングモデルに導入し、先手・後手ゲームとして、２人のプレイヤーの最適な配置場所についての考察を行った。改良ハフモデルの特徴について言及し、後手プレイヤー B の最適配置を決定するための近似解法を提案した。先手プレイヤー A については木グラフ T の形状により、戦略を変える必要があることがわかった。今後の課題として、近似解法において誤差をどの程度まで配慮すべきかについて考える必要がある。

参考文献

[1] Eiselt,H.A. (1992) Hoteling's duopoly on a tree, Annals of Operations Reseach, Vol.40, 195-207.

[2] Hotelling,H. (1929) Stability in competition, The Economic journal, Vol.39, No.153, 41-57.

[3] Huff,D.L. (1964) Defining and estimating a trading area, The Journal of Marketing, Vol.28, No.3, 34-38.