

ケーターの可逆振り子を用いた重力加速度の絶対測定

京都大学 大学院 理学研究科 地球惑星科学専攻
地球物理学教室 測地学研究室 助教

風間 卓仁 (かざま たかひと)
takujin@kugi.kyoto-u.ac.jp

(2022年8月19日初版公開)

1 ケーターの可逆振り子とは

ケーターの可逆振り子（ケーター振り子）は、Henry Kater (1818) が重力加速度の絶対測定のために考案した棒状の振り子である（図 1a）。ケーター振り子の上下 2 箇所にはナイフエッジが付いており、このそれぞれを支点として振り子を振動させることができる（図 1b）。ケーター振り子の質量構造は上下方向に不均等となっているため、正位置と逆位置における振り子の振動周期（それぞれ T_1 および T_2 とする）は通常異なる値となる。ただし、振り子中央部の錘（図 1c の m_3 ）の位置を調整することで、 $T_1 = T_2$ となるような質量分布を作り上げることができる。このとき、重力加速度 g の算出式は振り子の重心位置に依らない形で表現でき、その結果重力加速度 g を簡単にかつ高精度に決定することができる。

本稿では、質量 m_3 が任意の場所に位置する時の方程式を記述し、その後質量 m_3 を特定の位置に動かすことで重力加速度 g の算出式が簡単になることを示す。また、京都大学の一般教養科目「地球科学実験」におけるケーター振り子振動実験の現状についても紹介する。

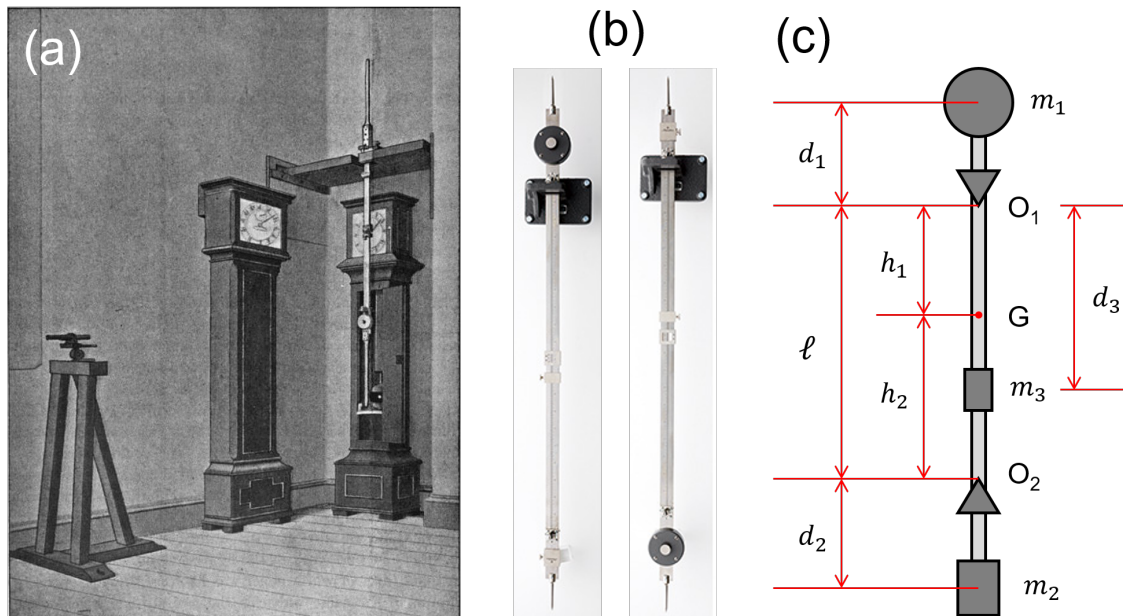


図 1: (a) ケーター振り子の設置風景 (Kater, 1818)。振り子時計の前にケーター振り子が設置されているのが分かる。(b) ケーター振り子の正位置と逆位置 (写真は島津理化ウェブサイトより)。本稿では大きい錘を上にした状態 (左側の写真) を正位置としている。(c) ケーター振り子の模式図。

2 質量 m_3 の位置を固定したときの方程式系

支点 O_1 から質量 m_3 までの距離を d_3 で固定する場合を考える (図 1c)。まず、 O_1 を支点に取った時の剛体振り子の運動方程式は、振動角 θ を用いて以下のように書ける (ただし $M = m_1 + m_2 + m_3$)。

$$I_1 \ddot{\theta} = -Mgh_1 \sin \theta \simeq -Mgh_1 \theta \quad (1)$$

O_1 まわりの慣性モーメント I_1 は、具体的には以下のように書ける。

$$I_1 = m_1 d_1^2 + m_2 (\ell + d_2)^2 + m_3 d_3^2 \equiv Mk_1^2 \quad (2)$$

この式で、 O_1 まわりの慣性モーメント I_1 における回転半径を k_1 と定義している。なお本稿においては、 m_1 と m_2 を繋ぐ金属棒や、2つのナイフエッジの質量を無視している。しかしながら、金属棒やナイフエッジの質量を加味したところで式 (2) 右辺の M や k_1 の数値が変わるだけであり、ケータ振子の質量分布が $I_1 = Mk_1^2$ で書けるといいう状況から乖離することはない。本章でこれ以降に出てくる方程式についても同様のことが言えるので、金属棒やナイフエッジの質量を考慮する／しないに関わらず本章の方程式系の一般性は保持される。次に、 O_2 を支点に取った時の運動方程式は以下のように書ける。

$$I_2 \ddot{\theta} = -Mgh_2 \sin \theta \simeq -Mgh_2 \theta \quad (3)$$

$$I_2 = m_2 d_2^2 + m_1 (\ell + d_1)^2 + m_3 (\ell - d_3)^2 \equiv Mk_2^2 \quad (4)$$

この式で、 O_2 まわりの慣性モーメント I_2 における回転半径を k_2 と定義している。さらに、重心 G まわりの慣性モーメントを I_G と定義すると、 O_i まわりの慣性モーメント I_i は並行軸の定理より以下のように書ける ($i = 1, 2$)。

$$I_i = I_G + Mh_i^2 \quad (5)$$

$$I_G = m_1 (d_1 + h_1)^2 + m_2 (d_2 + h_2)^2 + m_3 (d_3 - h_1)^2 \equiv Mk_G^2 \quad (6)$$

この式で、重心 G まわりの慣性モーメント I_G における回転半径を k_G と定義している。式 (5) をさらに書き下すと、回転半径に関する以下の式を導出できる。

$$k_i^2 = k_G^2 + h_i^2 \quad (7)$$

ここで、式 (1),(3) は相当単振り子の運動方程式と同じ形になっている。相当単振り子の長さを ℓ_i ($i = 1, 2$) と定義すると、相当単振り子の運動方程式は以下のように書ける。

$$M\ell_i \ddot{\theta} = -Mg \sin \theta \simeq -Mg \theta \quad (8)$$

式 (1),(3) と式 (8) の係数を比較することで、相当単振り子の長さ ℓ_i を以下のように表現できる。

$$\ell_i = \frac{k_i^2}{h_i} \quad (9)$$

また、相当単振り子の周期 T_i (= O_i まわりの振り子運動におけるケータ振子の振動周期) は以下のように書ける。

$$T_i = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_i}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{k_i^2}{gh_i}} = 2\pi \sqrt{\frac{k_G^2 + h_i^2}{gh_i}} \quad (10)$$

なお、 T_i の式は相当単振り子の方程式を介さずとも、式 (1),(3) の解における角周波数 ω_i に着目することで導出することができる。

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = 2\pi \sqrt{\frac{I_i}{Mgh_i}} = 2\pi \sqrt{\frac{k_i^2}{gh_i}} = 2\pi \sqrt{\frac{k_G^2 + h_i^2}{gh_i}} \quad (10)'$$

この式をさらに変形すると、

$$h_i T_i^2 = \frac{4\pi^2}{g} (k_G^2 + h_i^2) \quad (11)$$

この式に $i = 1, 2$ を代入し、かつ両式の差分を取ることで k_G を消去すると、

$$h_1 T_1^2 - h_2 T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g} (h_1^2 - h_2^2) \quad (12)$$

$$\frac{1}{2}(h_1 + h_2)(T_1^2 - T_2^2) + \frac{1}{2}(h_1 - h_2)(T_1^2 + T_2^2) = \frac{4\pi^2}{g}(h_1 + h_2)(h_1 - h_2) \quad (13)$$

この式を g について解くと、重力加速度 g は以下のように書ける。

$$g = 8\pi^2 \left[\frac{T_1^2 + T_2^2}{h_1 + h_2} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{h_1 - h_2} \right]^{-1} \quad (14)$$

すなわち、質量 m_3 の任意の位置 d_3 に対して重心位置 (h_1 および h_2) が決まり、そのような質量分布の振り子に対して周期 (T_1 および T_2) を測定できるので、その結果重力加速度 g をこの式より計算できる。

3 質量 m_3 の位置を変えると

式 (14) を用いて重力加速度 g を計算する際に問題となるのは、「重心位置 (h_1 および h_2) を正確に把握する必要がある」という点である。もちろん、図 1c の重心位置は

$$h_1 = \frac{m_1(-d_1) + m_2(\ell + d_2) + m_3 d_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (15)$$

$$h_2 = \ell - h_1 \quad (16)$$

のように計算することができる。しかしながら、図 1c の模式図では m_1 と m_2 を繋ぐ金属棒や、2つのナイフエッジの質量を無視している。そのため、実際のケーター振子の重心位置は式 (15)–(16) とわずかに異なると考えられるので、重心位置の算出に式 (15)–(16) を使用することで重力加速度 g の推定値 (式 (14)) に誤差が乗ってしまうことになる。ここまでの状況設定を修正して金属棒やナイフエッジの質量の寄与を加味することもできるが、それは式 (15)–(16) がさらに複雑になることを意味する。すなわち、重心位置 (h_1 および h_2) を介して重力加速度 g を求めるような状況下においては、多かれ少なかれ重心位置の計算が煩雑になってしまうのである。

ところで、上式中の h_1, h_2, T_1, T_2 は質量 m_3 の位置 d_3 によって変化するので、これら4つのパラメータは変数 d_3 に対する関数とみなすことができる。ここで、質量 m_3 の位置 d_3 を調整し、 $T_1 = T_2 \equiv T$ となるような d_3 を見つけ出せたとする。このとき、 $h_1 + h_2 = \ell = \text{const.}$ という関係式も使うと (図 1c 参照)、式 (14) は以下のように簡略化できる。

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2} \quad (17)$$

すなわち、周期が $T_1 = T_2$ となるような質量 m_3 の位置 d_3 を探し出すことができれば、このときケーター振子の振動周期は長さ ℓ の単振り子の振動周期と一致し、かつ重力加速度 g は重心位置 (h_1 および h_2) に依らない形で表現されるのである。(なお、式 (14) は $h_1 = h_2$ の時に発散してしまいそうだが、実際のケーター振子ではそのような状況になることはない。なぜなら、ケーター振子の錘は $m_1 \gg m_2$ となっているため、あらゆる d_3 に対して $h_1 < \ell/2 < h_2$ の状態が維持されるからである。)

特に、島津理化製の可逆振子 KP-1000 (図 1b) は $l = 1.000$ m に設計されているので上式はさらに簡単になり、 $T_1 = T_2$ となるような周期 ($\equiv T$) を代入しさえすれば重力加速度 g を算出できる。

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad (17)'$$

また、KP-1000 はその設計上、質量 m_3 の位置を $0 \leq d_3 \leq l = 1$ [m] の範囲で変化させると、 $T_1 = T_2$ となるような位置 d_3 を 2ヶ所で見つけることができる (図 2)。実際に KP-1000 を用いて重力加速度を決定するには、以下の手順で実験を進めればよい。

- ① 支点を O_1 に取り、 $0 \leq d_3 \leq 1$ [m] の範囲で質量 m_3 の位置を変えながら、周期 $T_1 = T_1(d_3)$ を網羅的に測定する。
- ② 支点を O_2 に取り、 $0 \leq d_3 \leq 1$ [m] の範囲で質量 m_3 の位置を変えながら、周期 $T_2 = T_2(d_3)$ を網羅的に測定する。
- ③ $T_1(d_3)$ および $T_2(d_3)$ のグラフを描き、両者の交点 (2ヶ所) における周期 T をそれぞれ読み取る。
- ④ 周期 T の平均値を式 (17)' に代入し、重力加速度 g を計算する。
- ⑤ 十分な実験時間があれば、 $T_1(d_3)$ と $T_2(d_3)$ が一致しそうな d_3 をグラフから読み取り、そのような d_3 の周辺で質量 m_3 を細かく動かす。 $T_1(d_3) = T_2(d_3)$ となるような位置 d_3 を実際に探し出し、この時の周期 T を式 (17)' に代入することで重力加速度 g をより正確に算出する。

錘の位置と周期の関係

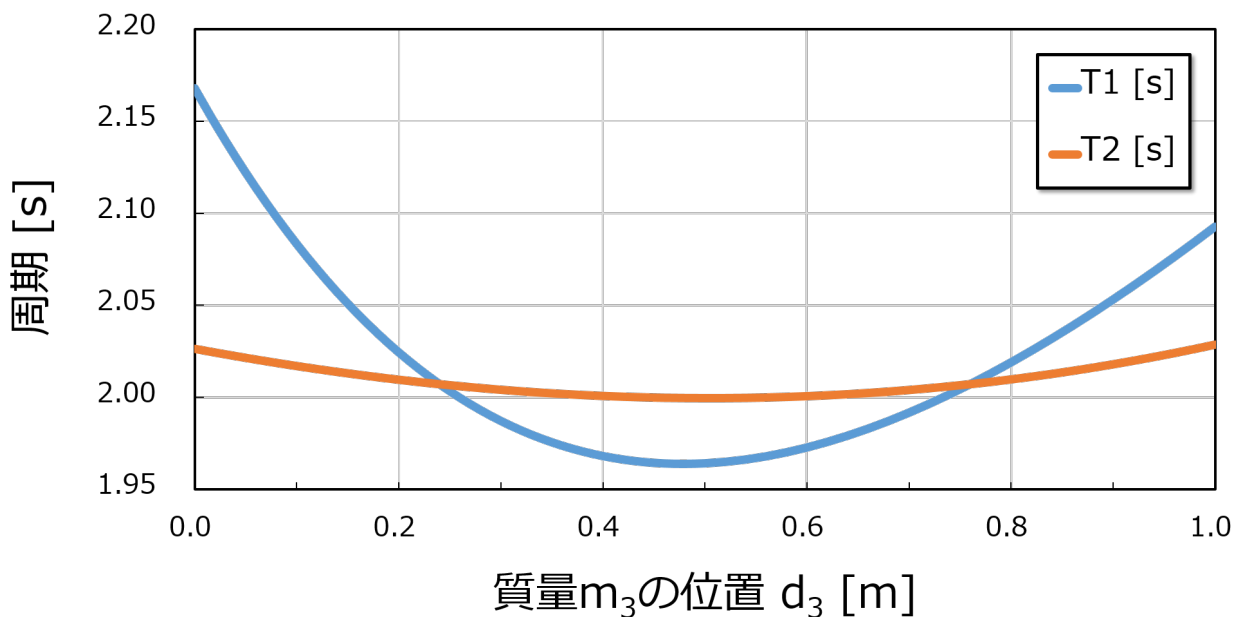


図 2: 質量 m_3 の位置 d_3 の変化に対する、周期 T_1 および T_2 の変化。式 (10)' のパラメーターに適当な値 ($m_1 = 10$ kg, $m_2 = 1.5$ kg, $m_3 = 1.2$ kg, $l = 1$ m, $d_1 = 0.02$ m, $d_2 = 0.01$ m, $g = 9.8$ m/s²) を代入することで T_1 と T_2 を再現した。 $d_3 = 0.24$ m および $d_3 = 0.76$ m 付近で $T_1 = T_2 = 2.007$ s となっていて、この値を式 (17) に代入すると確かに重力加速度を $g = 9.800878... \approx 9.8$ m/s² と算出できる。

4 地球科学実験における実験例

京都大学の一般教養科目「地球科学実験」では、ケータ振子を用いた絶対重力測定が行われてきた。この実習は主に吉田南3号館地下1階の地球科学第6実験室で行われており、実験室には以下の機材・設備が4組備わっている。

- 可逆振子（島津理化製 KP-1000）
- 可逆振子用架台（実験室内の壁に取り付けられている）
- レーザー発振器
- レーザー受信器
- ユニバーサルカウンター（横河電機製 TC110）

ユニバーサルカウンターは振り子の振動周期 T_i を測定するために使用されている。具体的には、レーザー発振器を振り子の手前側（観察者側）に、レーザー受信器を振り子の奥側（壁側）に設置し、振り子の静止時に振り子先端がレーザーを遮るように配置する。次に、レーザー受信器の配線をユニバーサルカウンターに繋ぎ、図3の写真のようにカウンターを設定する。ここで、振り子を左右方向にわずかに振動させると、カウンターはレーザー光が遮られたタイミングを記録し、レーザー光が1度遮られてから次に遮られるまでの時間の10回平均値（ $\equiv \bar{t}_{10}$ ）を表示する（図3では1.01195424 secと表示されている）。この時間は振り子の振動周期 T_i の半分になっているので（ $\bar{t}_{10} = T_i/2$ ）、 \bar{t}_{10} を2倍すれば振動周期 T_i を得ることができる。

なお、可逆振子用架台は吉田南3号館地下1階・地球科学第6実験室の壁に合計4台設置されているほか、吉田南2号館5階の壁にも1台取り付けられている。これは地球重心～測定点間の距離変化に対する絶対重力値の変化を観察するために設置されたものと考えられる。理想的には、フリーエア勾配（ $-3 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2/\text{m}$ ）に典型的な建物の高さ（ $3.6 \times 5 = 18 \text{ m}$ ）を掛け合わせると、地下1階と5階の重力差は 0.000054 m/s^2 程度になると期待される。筆者自身は吉田南2号館5階で測定を実施したことがないので、このような小さな重力差をケータ振子によって測定可能かどうかは不明であるが、今後の「地球科学実験」担当時にそのような測定を実施する予定である。

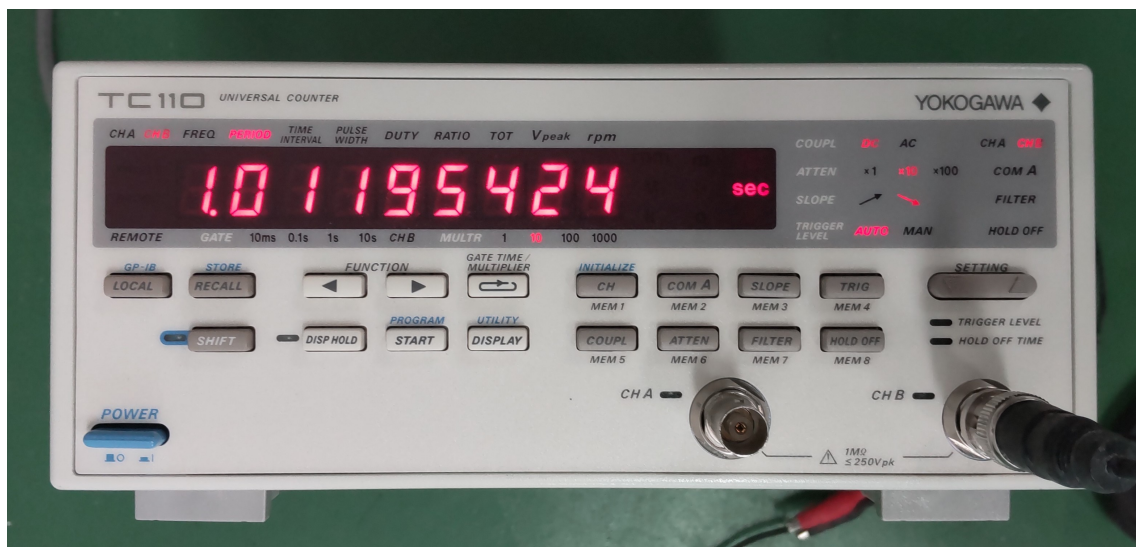


図3: 横河電機製のユニバーサルカウンター TC110 を用いた半周期 ($T_i/2$) の測定風景。設定値が赤く表示されている。特に重要な設定値は以下の通り。FUNCTION: PERIOD, MULTIPLIER: 10, SLOPE: 右下がり。

5 実験時の注意点

筆者が「地球科学実験」において本実験を指導するにあたり、以下の点に注意が必要であることに気づいた。本章では参考のために、ケータ振子実験における注意点を列挙する。

- ケータ振子は左右方向のみに振動させ、奥行方向に揺れないように気を付ける。奥行方向の揺れが大きいと、振動周期 T_i の測定誤差が大きくなる可能性がある。
- ケータ振子の振れ幅は鉛直軸を中心として ± 5 cm 程度で毎回統一すべきである。これは、振れ幅を大きくしすぎると $\sin \theta \simeq \theta$ という近似が成り立たなくなるため、および振れ幅が毎回異なると振動角の有限性に伴う系統誤差の寄与がその都度異なってしまうためである。地球科学実験ではレーザー受信センサーの付近に定規を貼り付けているので、これを目安として振れ幅を ± 5 cm 程度に保つことができる。
- ユニバーサルカウンター（横河電機製 TC110）では、ケータ振子が 5 往復するごとに半周期 ($T_i/2$) の平均値を表示する。ただし、各回の表示値にランダム誤差が含まれている可能性があるため、実際にはこの表示値を何回分か記録し、これの平均を取るとよい。筆者担当の地球科学実験では表示値を少なくとも 5 回記録し、この全記録を平均化することにしてきた。

謝辞

向井厚志氏（福山市立大学都市経営学部）および加藤護氏（京都大学大学院人間・環境学研究科）には、ケータ振子に関する各種資料をご提供いただいた。また、両者には 2022 年 8 月 12 日のケータ振子の試験観測の際にご指導・ご協力いただいた。

参考文献

- 島津理化 (19??): ケータ可逆振子 KP-1000 形 取扱説明書, 7 pp.
- 戸田盛和 (1982): 物理入門コース 1 力学, 岩波書店, 244 pp.
- 山内恭彦・末岡清市 (1957): 大学演習力学. 裳華房, 325 pp.
- Kater, Henry (1818): An Account of Experiments for Determining the Length of the Pendulum Vibrating Seconds in the Latitude of London. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **108**, 33–102.
- VALUE @ Amrita (2011): Kater's pendulum. <https://vlab.amrita.edu/?sub=1&brch=280&sim=518&cnt=1>

更新履歴

- 2022 年 8 月 19 日（初版）：本稿を京都大学学術情報リポジトリ (KURENAI) 上で公開。
- 2022 年 9 月 22 日（第 2 版）：体裁に関して本稿を微修正。
- 2024 年 1 月 9 日（第 3 版）：第 5 章を追加し、ケータ振子実験における注意点を記載した。