数理解析研究所講究録
583巻 1986年 59-72

$O(1,g+1)$ 上の wave form について.

東工大・理　高瀬幸一 (Koichi Takase)

本講では、符号数 $(1,g+1)$ の2次形式の直交群上の wave form を定義して, それに附随する2種類の Dirichlet series の解析接続と関数等式について考察する。Mellin 変換と Rankin-Selberg method によりり2種類の Dirichlet series が生ずるが, 後者は前者の部分和に相当する。最後の§では, $g=2$ の場合に, 虚2次体上の $GL(2)$ 上の automorphic form との関連で考察する。

§1. 記号.

1. 符号数 $(1,g+1)$ $(g>0)$ の対称行列 $S\in Mat(g+2,\mathbb{Q})$ を取り, $S=\begin{pmatrix} & & 1\\ & S_0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ $(S_0\in Mat(g,\mathbb{Q})$ s.t. ${}^tS_0=S_0>0)$ であるとする。$\tilde{G}$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された reductive 代数群で, $\mathbb{Q}$-rational points は,

$$\tilde{G}_{\mathbb{Q}}=\{g\in GL(g+2,\mathbb{Q})\mid {}^tg\cdot S\cdot g=\nu(g)\cdot S\quad \text{for } \nu(g)\in\mathbb{Q}^\times\}$$

とする。$\tilde{G}$ の元 g は, $g=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ h & i & j\end{pmatrix}\begin{matrix}\}1\\ \}g\\ \}1\end{matrix}$ とブロック分けして表わす。$\tilde{G}$ の semi-simple part は, $G=\{g\in\tilde{G}\mid \nu(g)=1\}$ である。

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \in G \right\}$$

は, $\mathbb{Q}$上定義されたGの minimal parabolic subgroup である。Pは, 分解 $P = N\cdot A\cdot M$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P \right\},\quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \in P \right\},\quad M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P \right\}$$

をもつ。$\mathbb{Q}$上の同型 $n : \mathbb{Q}^{b} \xrightarrow{\sim} N_{\mathbb{Q}}$ が

$$n(x) = \begin{pmatrix} 1 & -{}^{t}x\cdot S_0 & -\frac{1}{2}\cdot{}^{t}x\cdot S_0\cdot x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により定義される。$\tilde{G}_0$は, $\mathbb{Q}$上定義された, 連結 reductive 代数群で, $\mathbb{Q}$-rational points は,

$$\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}} = \left\{ e \in GL(b,\mathbb{Q}) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^{t}e\cdot S_0\cdot e = \nu(e)\cdot S_0 \ \text{ for } \nu(e) \in \mathbb{Q}^{\times} \\ \det e = \nu(e)^{b/2} \ \text{ if } b \text{ is even} \end{array} \right\}$$

とする。代数群 $\tilde{G}, G, P$, etc. の$\mathbb{Q}$上の adelization を $\tilde{G}_{A}, G_{A}, P_{A}$, etc. とする。

2. $L_0 \subset \mathbb{Q}^{b}$ は, S_0に関する maximal integral $\mathbb{Z}$-lattice (i.e. $\frac{1}{2}\cdot{}^{t}x\cdot S_0\cdot x \in \mathbb{Z}$ for $^{\forall}x \in L_0$ となる極大な $\mathbb{Z}$-lattice) とすると,

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{b+2} \;\middle|\; x, z \in \mathbb{Z},\ y \in L_0 \right\}$$

は, Sに関する maximal integral $\mathbb{Z}$-lattice である。$\mathbb{Q}$の finite place pに対して,

$$\tilde{K}_p = \{ g \in \tilde{G}_p \mid g(L_p) = L_p \} \qquad (L_p = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

とおくと，$\tilde{K}_f = \prod_{p<\infty} \tilde{K}_p$ は，$\tilde{G}_A$ の finite part $\tilde{G}_f$ の open compact subgroup となる。$\tilde{G}_\infty$ の maximal compact subgroup を

$$\tilde{K}_\infty = \left\{ g \in \tilde{G}_\infty \;\middle|\; {}^t g \cdot \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_0 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \cdot g = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_0 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \right\}$$

として，$\tilde{K} = \tilde{K}_\infty \times \tilde{K}_f$ は $\tilde{G}_A$ の compact subgroup である。$K = \tilde{K} \cap G_A$ とおく。

$\mathbb{Q}$ の finite place p に対して，

$$\tilde{U}_p = \{ e \in \tilde{G}_{0,p} \mid e(L_{0,p}) = L_{0,p} \} \qquad (L_{0,p} = L_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

とおくと，$\tilde{U}_f = \prod_{p<\infty} \tilde{U}_p$ は $\tilde{G}_{0,A}$ の finite part $\tilde{G}_{0,f}$ の open compact subgroup となる。

§2. Maass forms.

3. 実 Lie 群 G_∞ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ として，$D = 2\cdot(q-1) \times$ Casimir element for $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とおくと，D は G_∞ 上の両側不変微分作用素である。D の作用は次の様に表わされる；G_∞ 上の右 $\tilde{K}_\infty$-不変 C^∞-関数 φ に対して，

$$F(x, y) = \varphi\left(n(x) \cdot \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix}\right) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^q,\ 0 < y \in \mathbb{R}$$

とおくと，

$$D \cdot F = \left\{ y^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (q-1) \cdot y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + 2y^2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_q}\right) \cdot S_0^{-1} \cdot {}^t\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_q}\right) \right\} F$$

となる（$g = n(x) \cdot \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \cdot k \in G_\infty$ ($k \in \tilde{K}_\infty$) は G_∞ の岩沢分解を与える）。

$\mathbb{R}^\times$ の連続 unitary character ω_∞，$\rho \in \mathbb{C}$，及び $u \in \mathbb{R}^q$ に対して，実解析

的関数 $W : \widetilde{G}_\infty \to \mathbb{C}$ で，条件

1) $W(z \cdot n(x) \cdot g \cdot k) = w_\infty(z) \cdot \Lambda_\infty({}^t u \cdot S_0 \cdot x) \cdot W(g)$ for ${}^\forall z \in \mathbb{R}^\times$, ${}^\forall x \in \mathbb{R}^g$, ${}^\forall k \in \widetilde{K}_\infty$

（但し，$\Lambda_\infty(r) = \exp(-2\pi\sqrt{-1} \cdot r)$ for $r \in \mathbb{R}$ ）

2) $D \cdot W = \{ \rho^2 - (\frac{g}{2})^2 \} \cdot W$

3) $\left| W \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \right| \leq C \cdot \mathrm{Max}\{ y^r, y^{-r} \}$ for ${}^\forall y \in \mathbb{R}, y > 0$ （但し，$C > 0$, $r \geq 0$ は y によらない定数）.

を満す W の成す $\mathbb{C}$-vector space を $W(w_\infty, \rho, u)$ とすると，次の lemma が成り立つ.

<u>Lemma 1.</u> 1) $u \neq 0$ のとき，$\dim_{\mathbb{C}} W(w_\infty, \rho, u) = 1$ で

$$W_{\rho, u} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = K_\rho\left(4\pi \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot {}^t u \cdot S_0 \cdot u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot |y|\right) \cdot \left|4\pi\left(\tfrac{1}{2} \cdot {}^t u \cdot S_0 \cdot u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y\right|^{\frac{g}{2}} \quad (y \in \mathbb{R}^\times)$$

なる $\mathbb{C}$-base $W_{\rho,u} \in W(w_\infty, \rho, u)$ をもつ. ここで

$$K_\rho(x) = \int_0^\infty \cosh(\rho t) \cdot \exp(-x \cdot \cosh t)\, dt \quad (x > 0)$$

は modified Bessel 関数である.

2) $u = 0$ のときは，$\dim_{\mathbb{C}} W(w_\infty, \rho, u) = 2$ で

$$W_\rho^{(1)} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = |y|^{\frac{g}{2}+\rho}, \quad W_\rho^{(2)} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{cases} |y|^{\frac{g}{2}-\rho} & : \text{if } \rho \neq 0 \\ |y|^{\frac{g}{2}} \cdot \log|y| & : \text{if } \rho = 0 \end{cases}$$

なる $\mathbb{C}$-base $\{ W_\rho^{(1)}, W_\rho^{(2)} \} \subset W(w_\infty, \rho, u)$ をもつ.

4. idele class group $\mathbb{Q}_A^\times/\mathbb{Q}^\times$ の連続 unitary character ω, 及び $\rho\in\mathbb{C}$ に対して,

Φ が $\tilde{G}_A$ 上の wave form of type (ω,ρ) であるとは,

1) Φ は $\tilde{G}_A$ 上の複素数値連続関数であり, $\tilde{G}_A$ の infinite part に関しては, 実解析的である,

2) $\Phi(x\cdot\gamma\cdot g\cdot k)=\omega(x)\cdot\Phi(g)$ for $^\forall x\in\mathbb{Q}_A^\times$, $^\forall\gamma\in\tilde{G}_\mathbb{Q}$, $^\forall k\in\tilde{K}$,

3) $D\cdot\Phi=\{\rho^2-(\frac{g}{2})^2\}\cdot\Phi$,

4) slowly increasing,

を満すことである。 $\tilde{G}_A$ 上の wave form of type (ω,ρ) の成す $\mathbb{C}$-vector space を $A(\omega,\rho)$ とする. $\dim_\mathbb{C} A(\omega,\rho)<\infty$ である。

$^\forall\Phi\in A(\omega,\rho)$ は Fourier 展開

$$\Phi(n(x)\cdot g)=\sum_{u\in\mathbb{Q}^g}\Phi_u(g)\cdot\Lambda({}^tu\cdot S_0\cdot x)$$

をもつ。ここで, Λ は $\mathbb{Q}_A/\mathbb{Q}$ の連続 unitary character で $\Lambda_\infty(x)=$ $=\exp(-2\pi\sqrt{-1}x)$ なるものとする。 $\tilde{G}_A$ の infinite part 上の関数としては Φ_u は $W(\omega_\infty,\rho,u)$ の元であって (ω_∞ は ω の infinite part), Lemma 1 より,

$$\Phi_u(g)=C_u(\Phi,g_f)\cdot W_{\rho,u}(g_\infty)\qquad(u\neq 0)$$

とおく。又, $e\in\tilde{G}_{0,A}$, $y\in\mathbb{Q}_A^\times$ に対して,

$$\Phi_0\begin{pmatrix}\nu(e)\cdot y&&\\&e&\\&&y^{-1}\end{pmatrix}=a(\Phi,e)\cdot W_\rho^{(1)}\begin{pmatrix}|y|_A&&\\&1&\\&&|y|_A^{-1}\end{pmatrix}+b(\Phi,e)\cdot W_\rho^{(2)}\begin{pmatrix}|y|_A&&\\&1&\\&&|y|_A^{-1}\end{pmatrix}$$

とおく ($|y|_A$ は, idele y の絶対値)。

$S(w,\rho)=\{\Phi\in A(w,\rho)\mid \Phi_0(g)=0 \text{ for } {}^\forall g\in\tilde{G}_A\}$ は, cuspidal wave forms の成す $\mathbb{C}$-vector space である.

$A(w,\rho)\neq 0$ となるのは, $w=1\cdot 1_A^\sigma$ $(\sigma\in\sqrt{-1}\cdot\mathbb{R})$ の場合に限ることに注意する。

wave form の Fourier 係数に関して, 次の lemma が成り立つ.

<u>Lemma 2</u> wave form $\Phi\in A(w,\rho)$ と, $e\in\tilde{G}_{0,f}$, $a\in\mathbb{Q}_f^\times$, $0\neq u\in\mathbb{Q}^g$ に対して,

$$C_u(\Phi,\begin{pmatrix}\nu(e)\cdot a & & \\ & e & \\ & & a^{-1}\end{pmatrix})\neq 0$$

となるのは, $u\in\mathbb{Q}^g\cap(a\cdot\nu(e))^{-1}\cdot e\cdot\prod_{p<\infty}\hat{L}_{0,p}$ の場合に限る。ここで

$$\hat{L}_{0,p}=\{y\in\mathbb{Q}_p^g\mid {}^ty\cdot S_0\cdot x\in\mathbb{Z}_p \text{ for } {}^\forall x\in L_{0,p}\}\quad(p<\infty)$$

は, S_0 に関する $L_{0,p}$ の dual lattice である.

§3. Mellin 変換.

5. $w=1\cdot 1_A^\sigma$ $(\sigma\in\sqrt{-1}\cdot\mathbb{R})$, と $\rho\in\mathbb{C}$ を取る。wave form $\Phi\in A(w,\rho)$ と連続関数 $\varphi:\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}}\backslash\tilde{G}_{0,f}/\tilde{U}_f\to\mathbb{C}$ に対して,

$$Z(s;\Phi,\varphi)$$
$$=2^{\frac{g}{2}-1}\cdot(2\pi)^{-s}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\tfrac{g}{2}+\rho))\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\tfrac{g}{2}-\rho))\times$$
$$\times\sum_{0\neq u\in\mathbb{Q}^g}\sum_{e}C_u(\Phi,\begin{pmatrix}\nu(e) & & \\ & e & \\ & & 1\end{pmatrix})\cdot\varphi(e)\cdot|\nu(e)|_f^{\frac{1}{2}(s-\sigma)}\cdot(\tfrac{1}{2}{}^tu\cdot S_0\cdot u)^{-\frac{s}{2}}$$

とおく。ここで，$\sum_{e}$ は $\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}}\backslash\tilde{G}_{0,f}/\tilde{U}_f$ の完全代表系上の和（$\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}}\backslash\tilde{G}_{0,f}/\tilde{U}_f$ は有限集合），又 $|\cdot|_f$ は $|\cdot|_A$ の finite part である。<u>Lemma 2</u> より，$Z(s;\Phi,\varphi)$ は Dirichlet series となり，Φ の増大条件より，$Z(s;\Phi,\varphi)$ は，$\mathrm{Re}\, s \gg 0$ で絶対収束する。一方 $\check{\Phi}(g) = \Phi(g)\cdot\omega(\nu(g))^{-1}$ とおくと，$\check{\Phi} \in A(\omega^{-1},\rho)$ である。このとき，次の定理が成りたつ。

<u>Theorem 1</u>　Dirichlet series $Z(s;\Phi,\varphi)$ は全 s-平面に有理的に解析接続され，関数等式 $Z(s;\Phi,\varphi) = Z(-s;\check{\Phi},\check{\varphi})$ を満す。ここで $\check{\varphi}(e) = \varphi(\nu(e)^{-1}\cdot e)$ とおく。更に，

$$Z(s;\Phi,\varphi) + a(\Phi,\varphi)\cdot(s+\tfrac{k}{2}+\rho)^{-1} + b(\Phi,\varphi)\times\begin{cases}(s+\frac{k}{2}-\rho)^{-1} & :\text{if } \rho\neq 0\\ -(s+\frac{k}{2})^{-2} & :\text{if } \rho=0\end{cases}$$

$$-\,a(\check{\Phi},\check{\varphi})\cdot(s-\tfrac{k}{2}-\rho)^{-1} - b(\check{\Phi},\check{\varphi})\times\begin{cases}(s-\frac{k}{2}+\rho)^{-1} & :\text{if } \rho\neq 0\\ (s-\frac{k}{2})^{-2} & :\text{if } \rho=0\end{cases}$$

は，s の entire function である。ここで

$$a(\Phi,\varphi) = \sum_{e} a(\Phi,e)\cdot\varphi(e)\ ,\quad b(\Phi,\varphi) = \sum_{e} b(\Phi,e)\cdot\varphi(e)$$

とおく（$\sum_{e}$ は，$\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}}\backslash\tilde{G}_{0,f}/\tilde{U}_f$ の完全代表系上の和）。

<u>Remark</u>　φ として，$\tilde{G}_{0,f}$ における $\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}}\cdot\tilde{U}_f$ の characteristic function を取ると，<u>Theorem 1</u> は，Dirichlet series

$$\sum_{0\neq u\in\mathbb{Q}^k} c_u(\Phi,1)\cdot(\tfrac{1}{2}\,{}^t u\cdot S_0\cdot u)^{-\frac{s}{2}} \qquad (\mathrm{Re}\, s\gg 0)$$

の解析接続，関数等式，及び，possible poles を与える。上の Dirichlet series は Maass [2] により考察された。

§4. Rankin-Selberg method.

6. この§を通じて，$S_0 = \begin{pmatrix} S_0' & 0 \\ 0 & S_0'' \end{pmatrix}\begin{matrix}\}m \\ \}g-m\end{matrix}$ $(0<m<g)$ と仮定し，更に $\mathbb{Z}$-lattice $L_0' \subset \mathbb{Q}^m$, $L_0'' \subset \mathbb{Q}^{g-m}$ があって，

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^g \;\middle|\; x \in L_0',\ y \in L_0'' \right\}$$

となる (i.e. L_0 は orthogonal splitting $L_0 = L_0' \oplus L_0''$ をもつ) と仮定する。$S' = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_0' & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ に対して，§1 と同様に，代数群 G', P', N', A', M' を定義する。G' は，写像

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{pmatrix}\begin{matrix}\}1 \\ \}m \\ \}1\end{matrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 & c \\ d & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ h & i & 0 & j \end{pmatrix}\begin{matrix}\}1 \\ \}m \\ \}g-m \\ \}1\end{matrix} \end{array}$$

により，G の部分代数群と同一視する。

$$L' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{m+2} \;\middle|\; x, z \in \mathbb{Z},\ y \in L_0' \right\}$$

として，L' に対して，§1 と同様に G_A' の compact subgroup K' を定義する。上の同一視により $K' \hookrightarrow K$ となる。

7. L' が S' に関して maximal integral $\mathbb{Z}$-lattice であることから，$G_A' = P_A' \cdot K'$ となるから，$s \in \mathbb{C}$ と $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \cdot k \in G_A'$ $(k \in K')$ に対して，

$$\theta(g, s) = |a|_A^{\,s}$$

とおく。$M_{\mathbb{Q}}' \cdot A_A' \cdot N_A' \backslash G_A' / K'$ 上の複素数値連続関数 φ を取る ($M_{\mathbb{Q}}' \cdot A_A' \cdot N_A' \backslash G_A' / K'$ 上の連続関数は，$\varphi \longmapsto \varphi|_{M_A'}$ により，$M_{\mathbb{Q}}' \backslash M_A' / (M_A' \cap K')$

上の連続関数と1対1に対応する）。G' の parabolic subgroup P' と φ に附随する Eisenstein series は，

$$E(\varphi ; s, g) = \sum_{\gamma \in P'_{\mathbb{Q}} \backslash G'_{\mathbb{Q}}} \varphi(\gamma \cdot g) \cdot \theta(\gamma g, s + \tfrac{m}{2}) \qquad (s \in \mathbb{C},\ g \in G'_{A})$$

により定義される。$E(\varphi ; s, g)$ は $\mathrm{Re}\, s > \frac{m}{2}$ で絶対収束し，全 s-平面に解析接続されて，s に関して関数等式を満す（c.f. Arthur [1]）。特に $m=1$ のときは，$M' = \{\pm 1\}$ で，$E(1; s, g)$ の関数等式は，

$$E(1; s, g) = \mathrm{vol}(\mathbb{R}/L_0)^{-1} \cdot \sqrt{2/S_0'} \cdot \frac{Z(2s)}{Z(2s+1)} \cdot E(1; -s, g)$$

となる。ここで $Z(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s)$ である。

8. 連続関数 $\varphi : M'_{\mathbb{Q}} A'_{A} \cdot N'_{A} \backslash G'_{A} / K' \to \mathbb{C}$ と Maass form $\Phi \in A(w, P)$，及び $0 \neq u \in \mathbb{Q}^{\ell - m}$ に対して，

$$C_{u, \varphi}(\Phi) = \sum_{h} C_{\binom{0}{u}}(\Phi, h) \cdot \varphi(h)$$

とおく。ここで，$\sum_{h}$ は $M'_{\mathbb{Q}} \backslash M'_{f} / (M'_{f} \cap K')$ の完全代表系上の和である（M'_{f} は，M'_{A} の finite part，又 $M'_{\mathbb{Q}} \backslash M'_{f} / (M'_{f} \cap K')$ は有限集合である）。このとき，次の定理が成り立つ。

<u>Theorem 2.</u> 連続関数 $\varphi : M'_{\mathbb{Q}} A'_{A} \cdot N'_{A} \backslash G'_{A} / K' \to \mathbb{C}$ と cuspidal Maass form $\Phi \in S(w, P)$ に対して，次の Rankin-Selberg type の等式を得る；

$$\int_{G'_{\mathbb{Q}}\backslash G'_{\mathbb{A}}} \Phi(g)\cdot E(\varphi; s-\tfrac{m}{2}, g)\, dg \qquad (\mathrm{Re}\, s \gg 0)$$

$$= 2^{\frac{g}{2}-1}\cdot(2\pi)^{-s}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\tfrac{g}{2}+\rho))\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\tfrac{g}{2}-\rho))\times\sum_{0\neq u\in\mathbb{Q}^{g-m}} C_{u,\varphi}(\Phi)\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot{}^t u\cdot S_0''\cdot u)^{-\frac{s}{2}} 。$$

特に，Dirichlet series $\sum_{0\neq u\in\mathbb{Q}^{g-m}} C_{u,\varphi}(\Phi)\cdot(\frac{1}{2}\cdot{}^t u\cdot S_0''\cdot u)^{-\frac{s}{2}}$ は全 s－平面に有理形に解析接続される。

連続関数 $\varphi: M'_{\mathbb{Q}}\cdot A'_{\mathbb{A}}\cdot N'_{\mathbb{A}}\backslash G'_{\mathbb{A}}/K' \to \mathbb{C}$ として，$\varphi|_{M'_f}$ が $M'_{\mathbb{Q}}\cdot(M'_f\cap K')$ の characteristic function となるものを取れば，Theorem 2 から，次の corollary を得る。

Corollary 1. 任意の cuspidal mass form $\Phi\in S(w,\rho)$ に対して，Dirichlet series $\sum_{0\neq u\in\mathbb{Q}^{g-m}} C_{\binom{0}{u}}(\Phi,1)\cdot(\frac{1}{2}\cdot{}^t u\cdot S_0''\cdot u)^{-\frac{s}{2}}$ $(\mathrm{Re}\, s\gg 0)$ は，全 s－平面に，有理形に解析接続される。

$m=1$ のときには，$E(1;s,g)$ の関数等式と Theorem 2 から，次の corollary を得る．

Corollary 2. $m=1$ とする。cuspidal mass form $\Phi\in S(w,\rho)$ に対して，

$$\tilde{Z}(s,\Phi) = 2^{-s}\cdot\pi^{-2s}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\tfrac{g}{2}+\rho))\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\tfrac{g}{2}-\rho))\times$$
$$\times\,\zeta(2s)\cdot\sum_{0\neq u\in\mathbb{Q}^{g-1}} C_{\binom{0}{u}}(\Phi,1)\cdot(\tfrac{1}{2}{}^t u\cdot S_0''\cdot u)^{-\frac{s}{2}} \qquad (\mathrm{Re}\, s\gg 0)$$

は，全 s-平面に有理形に解析接続され，関数等式

$$\tilde{Z}(1-s,\Phi) = vol(\mathbb{R}/L_0') \cdot \sqrt{S_0'/2} \cdot \tilde{Z}(s,\Phi)$$

を満す。

§5. $g=2$ の場合.

9. 虚2次体 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ($m\in\mathbb{Z}$: square-free) を取り，その整数環を O_F とする。$F/\mathbb{Q}$ の norm を $N_{F/\mathbb{Q}}$ と書くと，$(F, N_{F/\mathbb{Q}})$ は，quadratic space over $\mathbb{Q}$ で正定値であって，O_F は $N_{F/\mathbb{Q}}$ に関して，maximal integral $\mathbb{Z}$-lattice となる。F の $\mathbb{Q}$-base $\{1,\sqrt{m}\}$ に対して，2次形式 $N_{F/\mathbb{Q}}$ は行列表現 $\begin{pmatrix}2&0\\0&-2m\end{pmatrix}$ をもつ。$\{1,\sqrt{m}\}$ により $F=\mathbb{Q}^2$ として，$S_0=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2m\end{pmatrix}$，$L_0=O_F\hookrightarrow\mathbb{Q}^2$ とおく。$V=\{X\in Mat(2,F)\mid {}^tX=\bar{X}\}$ とおくと，$(V,-\det)$ は quadratic space over $\mathbb{Q}$ で，符号数は $(1,3)$ である。V の $\mathbb{Q}$-base

$$\left\{ e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&\sqrt{m}\\-\sqrt{m}&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix} \right\}$$

に関して，2次形式 $-\det$ は行列表現 $S=\begin{pmatrix}&&1\\&S_0&\\1&&\end{pmatrix}$ をもつ。$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ により $V=\mathbb{Q}^4$ とすると，$L=V\cap Mat(2,O_F)$ は，

$$L=\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^4 \;\middle|\; x,z\in\mathbb{Z},\ y\in L_0 \right\}$$

となる。$(V,-\det)$ の similitude のついた直交群

$$GO_{\mathbb{Q}}(V,-\det) = \{\varphi\in GL_{\mathbb{Q}}(V) \mid \det\circ\varphi = \nu(\varphi)\cdot\det \ \ \text{for}\ \nu(\varphi)\in\mathbb{Q}^\times\}$$

を $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ に関して行列表現すると，$GO_{\mathbb{Q}}(V, -\det) = \tilde{G}_{\mathbb{Q}}$ となる。$\mathcal{G}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群で，$\mathbb{Q}$-rational points は，$\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} = GL(2, F)$ なるものとする。$\pi : \mathcal{G} \to \tilde{G}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された準同型写像で，

$$\pi_{\mathbb{Q}}(g) \cdot X = g \cdot X \cdot {}^t\bar{g} \quad \text{for } g \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}},\ X \in V$$

なるものとする。π は，adelization $\pi_A : \mathcal{G}_A \to \tilde{G}_A$ に延長される。

$$F^\times \ni x + y\sqrt{m} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} x & my \\ y & x \end{pmatrix} \in \tilde{G}_{0,\mathbb{Q}} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

なる $\mathbb{Q}$ 上の同型に注意する。

10. wave form $\Phi \in A(w, \rho)$ に対して，$\tilde{\Phi} = \Phi \circ \pi_A$ は automorphic form on $GL(2)$ over F となり（c.f. Weil [4]），Fourier 展開

$$\tilde{\Phi}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{\Phi}_0\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{t \in F^\times} C(\tilde{\Phi}, t \cdot \operatorname{div} y) \cdot W\begin{pmatrix} t \cdot y_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (y \in F_A^\times)$$

をもつ。ここで $\operatorname{div} y$ は $y \in F_A^\times$ に対応する F の ideal，y_∞ は $y \in F_A^\times$ の infinite part，又 W は $GL(2, \mathbb{C})$ 上の複素数値実解析的関数で

$$W\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} = K_\rho(4\pi \cdot y) \cdot (4\pi \cdot y) \quad (0 < y \in \mathbb{R})$$

なるものである（K_ρ は modified Bessel 関数）。更に

$$C(\tilde{\Phi}, \operatorname{div} y) = C_{\binom{1}{0}}\left(\Phi, \pi_f\begin{pmatrix} y_f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \quad (y \in F_A^\times)$$

となる。ここで，y_f (resp. π_f) は $y \in F_A^\times$ (resp. π_A) の finite part である。このとき，

$$\int_{F_A^\times/F^\times} (\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}_0)\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot |y|_A^s \, d^\times y$$

$$= (2\pi)^{1-2s-\sigma} \cdot \Gamma\left(s + \frac{\sigma}{2} + \frac{1+\rho}{2}\right) \cdot \Gamma\left(s + \frac{\sigma}{2} + \frac{1-\rho}{2}\right) \times \sum_{\mathfrak{a} \subset F} c(\tilde{\Phi}, \mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{a})^{-s}$$

($N(\mathfrak{a})$ は, F の ideal $\mathfrak{a}$ の 絶対 norm) は, $\tilde{\Phi}$ に附随した standard L-function である。 一方

$$\int_{F_A^\times/F^\times} (\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}_0)\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot |y|_A^s \, d^\times y = \int_{F_A^\times} \Phi_{\binom{1}{0}}\left(\pi_A\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot |y|_A^s \, d^\times y$$

$$= \frac{2\pi}{|U_F|} \cdot Z(2s+\sigma \,;\, \Phi, 1) \qquad (U_F : F \text{の単数群})$$

である。 よって, $Z(2s+\sigma \,;\, \Phi, 1)$ は $\tilde{\Phi}$ の standard L-function に対応する。

11. $m \equiv 2, 3 \pmod 4$ とすると, $L_0 = \mathbb{Z} \oplus \sqrt{m}\,\mathbb{Z}$ なる orthogonal splitting を生ずるので, $L_0' = \sqrt{m} \cdot \mathbb{Z}$, $L_0'' = \mathbb{Z}$ として, §4 の 議論 を適用する。

$$\sum_{0 < u \in \mathbb{Q}} c_{\binom{u}{0}}(\Phi, 1) \cdot u^{-s} = \sum_{0 < t \in \mathbb{Q}} c(\tilde{\Phi}, (t)) \cdot t^{-s}$$

となるが ($(t) = t \cdot O_F$ は, F の principal ideal),

$$\int_{\mathbb{Q}_A^\times} \Phi_{\binom{1}{0}}\begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \cdot |y|_A^s \, d^\times y$$

$$= (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{2}(s+1+\rho)\right) \cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{2}(s+1-\rho)\right) \times \sum_{0 < u \in \mathbb{Q}} c_{\binom{u}{0}}(\Phi, 1) \cdot u^{-s}$$

であるから，Φが全ての Hecke operator の eigen function であれば，Dirichlet series $\sum_{0<u\in\mathbb{Q}} c_{\binom{u}{0}}(\Phi, 1)\cdot u^{-s}$ は Euler 積をもち（c.f. Sugano [3, §3]），それは，Langlands の意味で，Φに附随する standard L-function となる。よって，

$$\sum_{0<t\in\mathbb{Q}} c(\tilde{\Phi}, (t))\cdot t^{-s}$$

は，Φの standard L-function に対応する。

References.

[1] Arthur,J.: Eisenstein series and the trace formula. Proc.Sympos.Pure Math. vol 33. Part I, Amer.Math.Soc. Providence R.I. (1979) 253-274.

[2] Maass,H.: Automorphe Funktionen von mehreren Veranderlichen und Dirichletsche Reihen. Abh.Math.Sem.Univ. Hamburg 16 (1949) 72-100.

[3] Sugano,T.: On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on SO(2,q). (to appear)

[4] Weil,A.: Dirichlet series and automorphic forms. Lecture Notes in Math. 189. (1971) Springer-Verlag.