数理解析研究所講究録
630巻 1987年 34-45

Mathieu-Witt systems
の初等的・統一的記述

一橋大　商　　岩崎　史郎
(Shiro Iwasaki)

今日まで多くの人によって，Mathieu-Witt systems に関する種々の興味深い研究が行われてきたが，まだ研究が十分とは言いがたい面も少なからずあり——たとえば，小さな system W_{12} と大きな system W_{24} とはあまり統一的に扱われていないようであり，blocks の正体もどこか不明で，その記述のしかたも必ずしも簡単とはいえないであろう——これらの systems には依然として神秘的で，研究対象としての魅力が漂っていると思われる．

本稿の目的：従来の研究の一部を整理しながら，Mathieu-Witt systems をできるだけ自然で，統一的かつ初等的に記述する一つの試みをする．特に，全ての blocks を記述する簡単な一つの方法を述べる．

記号

$q=$ 素数巾 >7,　$q\equiv -1 \pmod 4$.

F_q:　q 個の元からなる有限体.

$\Omega=\Omega(q)=\{\infty\}\cup F_q$　:　F_q 上の射影直線.

$Q=\{x^2 \mid x\in F_q\setminus\{0\}\}$.

$i\in F_q$ に対し

$Q_i=Q+i$,

$U_i=\{i\}\cup Q_i = U_0+i$.

$G=PSL(2,q)=\left\{x\mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \mid a,b,c,d\in F_q,\ ad-bc\in Q\right\}$.

他に，次のような標準的な記号も使う.

$A, B\subset\Omega$ に対し

$A\vartriangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$: A, B の対称差.

$\overline{A}=\Omega\setminus A=\Omega\vartriangle A$.

G は Ω 上の置換群であるが，$A\subset\Omega$; $a, b, \cdots\in\Omega$ に対し

$A^G=\{A^\sigma \mid \sigma\in G\}$,

$G_{(A)}=\{\sigma\in G \mid A^\sigma=A\}$,

$G_{a,b,\dots}=\{\sigma\in G \mid a^\sigma=a,\ b^\sigma=b, \cdots\}$.

$q\equiv -1 \pmod 4$ より，G は Ω 上 3-斉次の置換群となる（Ω の 3 個の元からなる任意の 2 つの部分集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ に対し，$A^\sigma=B$ なる $\sigma\in G$ が存在する）が，

これから自然に，次のように3-designが構成される：

任意の$A \subset \Omega$，$|A| = k \geqq 3$ に対し，Ωを点集合，A^Gをblocks集合として

$$\underline{D(q, A)} = (\Omega, A^G)$$

は3-$(q+1, k, \lambda)$ designである．ここに

$$\lambda = |G : G_{(A)}| \binom{k}{3} \Big/ \binom{q+1}{3}.$$

（一般に，t-斉次の置換群からt-designが構成できる．たとえば，Lane [4] を参照）

問題：どんなqとAに対して，$D(q, A)$は興味あるdesignとなるか？ を考えよう．

$A = U_0$ のときは，次の結果を得る．

定理 1 (i) $D(q, U_0)$ は 3-$\left(q+1, \frac{q+1}{2}, \frac{(q+1)(q-3)}{8}\right)$ designであって，そのblocks 集合は

$$U_0^G = \{U_i \mid i \in F_q\} \cup \{\overline{U_i} \mid i \in F_q\} \cup \{U_i \triangle U_j (= \overline{U_i} \triangle \overline{U_j}) \mid i \neq j \in F_q\}$$
$$\cup \{U_i \triangle \overline{U_j} (= \overline{U_i} \triangle U_j = \overline{U_i \triangle U_j}) \mid i \neq j \in F_q\}$$

である．（注．$q = 7$ のとき，$D(7, U_0)$ は 3-$(8, 4, 1)$ designである．） 特に，$D(q, U_0)$ が4-designとなるのは $q = 11$ のときのみで，実際

(ii) (Beth の定理[1]) $\mathbf{D}(11, U_0)$ は $5-(12, 6, 1)$ design である.

証明の概略: (i) Frobenius 群の基本性質と G の部分群の表から $G_{(U_0)} = G_{\infty,0}$ がわかり, これより design $\mathbf{D}(q, U_0)$ のパラメータの値が求まる. 一方, G は Ω 上の2重可移群より, $G = G_\infty \cup G_\infty \tau G_\infty$ $\left(\tau : x \mapsto -\frac{1}{x}\right)$ であるが, 次のことが容易に示される.

- $\sigma \in G_\infty,\ i \in F_q \Rightarrow U_i^{\sigma} = U_{i\sigma}$.
- $U_0^{\tau} = \overline{U_0}$.
- $i \in Q \Rightarrow U_i^{\tau} = U_0 \triangle U_{i\tau}$.
- $i \in F_q \setminus (\{0\} \cup Q) \Rightarrow U_i^{\tau} = \overline{U_0} \triangle U_{i\tau}$.

これらから blocks 集合 U_0^{G} を書き上げることができる.

(ii) $\mathbf{D}(11, U_0)$ の blocks 集合を $\mathbf{B} = U_0^{PSL(2,11)}$ とし, $\Omega(11)$ の任意の5点集合 T に対し, $\lambda(T) = |\{B \in \mathbf{B} \mid T \subset B\}|$ とおく. $\mathbf{B}$ の元 (= blocks) 同士の共通部分の濃度を調べ, $\{(T, B) \mid T \subset \Omega(11), |T| = 5, T \subset B \in \mathbf{B}\}$ を2通りにかぞえることによって, $\lambda(T) = 1$ $(\forall T)$ を得る.

定理1が示すように, $\mathbf{D}(q, U_0)$ の blocks は, $U_i, \overline{U_i}$ $(i \in F_q)$ の高々2つの $\triangle$ による結合である. 次に, 3個以

上の結合を考える.

$\mathbf{U}(q)$: $U_i, \overline{U}_i$ ($i \in F_q$) の Δ による有限個の結合の全体

$$= \{ U_i, \overline{U}_i, U_i \Delta U_j, U_i \Delta \overline{U}_j, U_i \Delta U_j \Delta U_k, \cdots \mid i, j, k, \cdots (\neq) \in F_q \}.$$

とすると, 次を得る.

命題. $A \in \mathbf{U}(q)$ とする.

(i) $|A| \equiv 0 \pmod 2$

(ii) $q \equiv -1 \pmod 8 \Rightarrow |A| \equiv 0 \pmod 4$.

(iii) $q \equiv -1 \pmod{24} \Rightarrow 8 \leqq |A|$.

上の命題を証明する際, 次の等式 —— 自明な式 $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ の一般化 —— が有効である.

- $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ($n \geqq 2$) を有限集合の部分集合とすると

$$|A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n| = \sum_{1 \leqq i \leqq n} |A_i| - 2 \cdot \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 \leqq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$$
$$+ 2^2 \cdot \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < i_3 \leqq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \cdots\cdots$$
$$+ (-2)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| .$$

上の命題で, 特に $q = 23$ のときは

$$A \in \mathbf{U}(23) \Rightarrow |A| = 8, 12 \text{ or } 16$$

であるが, $|A| = 8$ なる A として, たとえば

$$U_0 \triangle U_1 \triangle U_4 = \{0, 4, 13, 14, 18, 19, 20, 22\}$$

がある．定理 1 (ii) と同様な証明で次を得る．

定理 2. $D(23, U_0 \triangle U_1 \triangle U_4)$ は 5-(24,8,1) design である．

以上の大半は既に知られているようであるが，こうしてある意味で —— $D(q, A)$ に於て，適当な q と A をとることによって，あるいは対称差と群 G を通して —— 統一的に，2つの Mathieu-Witt systems

$$W_{12} = D(11, U_0)$$

$$W_{24} = D(23, U_0 \triangle U_1 \triangle U_4)$$

を構成することができた．

これらの systems および $W_{11} = (W_{12})_\infty$, $W_{23} = (W_{24})_\infty$ —— 勿論，$(W_i)_\infty$ は W_i から ∞ をとり除いてできる design，即ち，点 ∞ に関する W_i の内部構造 —— の全ての blocks を統一的・簡潔に記述するために，差型または代表 blocks という概念を導入する．

以下，$q = 11$ または 23 とし，$\Omega(q)$ の元の間に

$$\infty < 0 < 1 < 2 < \cdots < q-1$$

という全順序を入れておくことにする．

定義　$\Omega(q)$ の部分集合

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \quad (a_1<a_2<\cdots<a_k)$$

に対し，次のような $\widetilde{A}$ をAの差型または差輪という：

$\infty<a_1$ なら $\widetilde{A}=(a_2-a_1, a_3-a_2, \cdots, a_k-a_{k-1}, a_1-a_k)$

$$=(a_3-a_2, \cdots, a_1-a_k, a_2-a_1)=\cdots=(a_1-a_k, a_2-a_1, \cdots, a_k-a_{k-1})$$

$\infty=a_1$ なら $\widetilde{A}=(\infty, a_3-a_2, a_4-a_3, \cdots, a_k-a_{k-1}, a_2-a_k)$

$$=(\infty, a_4-a_3, \cdots, a_2-a_k, a_3-a_2)=\cdots=(\infty, a_2-a_k, a_3-a_2, \cdots, a_k-a_{k-1})$$

また，$i=11, 12, 23, 24$ として

$$\widetilde{W_i}=\{\widetilde{B} \mid B : W_i \text{ の block}\}$$

を W_i の差型または差輪とよぶ．$d\in\widetilde{W_i}$ に対し，$\widetilde{B}=d$ なる W_i の任意の block B を1つ定めておき，それを差型 d に対応する代表 block ということにする．

すぐ分るように，A, B を W_i の blocks とするとき，

$\widetilde{A}=\widetilde{B}$ （A, B は同一の差型をもつ）

$\Leftrightarrow \exists c\in F_q$; $A=B+c$ （A, B は F_q の元による平行移動で互いにうつることができる）

定理3. (i) W_i ($i=11, 12, 23, 24$) の差型と代表 blocks は次の表のとおりである．

	Difference pattern	Representative blocks	Number
W_{12}	$(\infty,1,1,1,6,2)$, $(\infty,1,1,2,3,4)$, $(\infty,1,1,3,1,5)$ $(\infty,1,2,1,4,3)$, $(\infty,1,2,2,2,4)$, $(\infty,1,3,2,3,2)$; $(1,1,1,1,2,5)$, $(1,1,1,4,1,3)$, $(1,1,2,1,3,3)$, $(1,1,3,2,2,2)$, $(1,1,4,2,1,2)$, $(1,2,2,1,2,3)$.	$\{\infty,0,1,2,3,9\}$, $\{\infty,0,1,2,4,7\}$, $\{\infty,0,1,2,5,6\}$, $\{\infty,0,1,3,4,8\}$, $\{\infty,0,1,3,5,7\}$, $\{\infty,0,1,4,6,9\}$; $\{0,1,2,3,4,6\}$, $\{0,1,2,3,7,8\}$, $\{0,1,2,4,5,8\}$, $\{0,1,2,5,7,9\}$, $\{0,1,2,6,8,9\}$, $\{0,1,3,5,6,8\}$.	12
W_{11}	$(1,1,1,6,2)$, $(1,1,2,3,4)$, $(1,1,3,1,5)$, $(1,2,1,4,3)$, $(1,2,2,2,4)$, $(1,3,2,3,2)$	$\{0,1,2,3,9\}$, $\{0,1,2,4,7\}$, $\{0,1,2,5,6\}$, $\{0,1,3,4,8\}$, $\{0,1,3,5,7\}$, $\{0,1,4,6,9\}$.	6
W_{24}	$(\infty,1,1,1,2,9,3,6)$, $(\infty,1,1,4,1,12,2,2)$, $(\infty,1,1,6,3,1,6,5)$ $(\infty,1,1,7,1,5,5,3)$, $(\infty,1,2,1,7,8,1,3)$, $(\infty,1,2,3,2,2,3,10)$, $(\infty,1,2,4,2,7,2,5)$, $(\infty,1,3,2,3,3,5,6)$, $(\infty,1,3,6,4,4,3,2)$, $(\infty,1,4,4,2,2,8,2)$, $(\infty,1,4,5,2,4,3,4)$; $(1,1,1,1,3,3,2,11)$, $(1,1,1,5,7,1,3,4)$, $(1,1,1,10,5,2,1,2)$, $(1,1,2,1,4,9,1,4)$, $(1,1,2,2,2,6,6,3)$, $(1,1,2,7,4,2,4,2)$, $(1,1,3,1,6,1,2,8)$, $(1,1,3,2,4,5,4,3)$, $(1,1,4,4,6,1,1,5)$, $(1,1,7,3,2,2,5,2)$, $(1,1,8,1,2,1,5,4)$, $(1,2,2,3,1,3,8,3)$, $(1,2,2,5,1,4,3,5)$, $(1,2,3,1,8,2,3,3)$, $(1,2,3,6,2,4,1,4)$, $(1,2,4,1,3,3,7,2)$, $(1,2,6,1,7,2,2,2)$, $(1,3,1,5,3,4,3,3)$, $(1,3,2,1,4,2,5,5)$, $(1,3,4,4,1,6,2,2)$, $(1,5,2,1,6,3,3,2)$, $(2,2,4,2,3,2,3,5)$.	$\{\infty,0,1,2,3,5,14,17\}$, $\{\infty,0,1,2,6,7,19,21\}$, $\{\infty,0,1,2,8,11,12,18\}$, $\{\infty,0,1,2,9,10,15,20\}$, $\{\infty,0,1,3,4,11,19,20\}$, $\{\infty,0,1,3,6,8,10,13\}$, $\{\infty,0,1,3,7,9,16,18\}$, $\{\infty,0,1,4,6,9,12,17\}$, $\{\infty,0,1,4,10,14,18,21\}$, $\{\infty,0,1,5,9,11,13,21\}$, $\{\infty,0,1,5,10,12,16,19\}$; $\{0,1,2,3,4,7,10,12\}$, $\{0,1,2,3,8,15,16,19\}$, $\{0,1,2,3,13,18,20,21\}$, $\{0,1,2,4,5,9,18,19\}$, $\{0,1,2,4,6,8,14,20\}$, $\{0,1,2,4,11,15,17,21\}$, $\{0,1,2,5,6,12,13,15\}$, $\{0,1,2,5,7,11,16,20\}$, $\{0,1,2,6,10,16,17,18\}$, $\{0,1,2,9,12,14,16,21\}$, $\{0,1,2,10,11,13,14,19\}$, $\{0,1,3,5,8,9,12,20\}$, $\{0,1,3,5,10,11,15,18\}$, $\{0,1,3,6,7,15,17,20\}$, $\{0,1,3,6,12,14,18,19\}$, $\{0,1,3,7,8,11,14,21\}$, $\{0,1,3,9,10,17,19,21\}$, $\{0,1,4,5,10,13,17,20\}$, $\{0,1,4,6,7,11,13,18\}$, $\{0,1,4,8,12,13,19,21\}$, $\{0,1,6,8,9,15,18,21\}$, $\{0,2,4,8,10,13,15,18\}$.	33
W_{23}	$(1,1,1,2,9,3,6)$, $(1,1,4,1,12,2,2)$, $(1,1,6,3,1,6,5)$, $(1,1,7,1,5,5,3)$, $(1,2,1,7,8,1,3)$, $(1,2,3,2,2,3,10)$, $(1,2,4,2,7,2,5)$, $(1,3,2,3,3,5,6)$, $(1,3,6,4,4,3,2)$, $(1,4,4,2,2,8,2)$, $(1,4,5,2,4,3,4)$.	$\{0,1,2,3,5,14,17\}$, $\{0,1,2,6,7,19,21\}$, $\{0,1,2,8,11,12,18\}$, $\{0,1,2,9,10,15,20\}$, $\{0,1,3,4,11,19,20\}$, $\{0,1,3,6,8,10,13\}$, $\{0,1,3,7,9,16,18\}$, $\{0,1,4,6,9,12,17\}$, $\{0,1,4,10,14,18,21\}$, $\{0,1,5,9,11,13,21\}$, $\{0,1,5,10,12,16,19\}$.	11

$W_{12} = D(11,U_0)$, $W_{11} = (W_{12})_\infty$; $W_{24} = D(23,U_0\Delta U_1\Delta U_4)$, $W_{23} = (W_{24})_\infty$

All the blocks of W_{12}, W_{11} (respe., W_{24}, W_{23}) are obtained by translating the representative blocks by all elements of F_{11} (resp., F_{23}).

(ii) W_{12}, W_{11} (W_{24}, W_{23}) の全ての blocks は，代表 blocks を F_{11} (F_{23}) の元で平行移動することによって得られる．（たとえば，W_{24} の $759 = 33 \cdot 23$ 個の全 blocks は，33 個の代表 blocks を F_{23} の元で平行移動して得られる．）

証明は，W_{12} と W_{24} の差型を直接計算で出すだけである．たとえば，W_{24} の場合，

$$U = U_0 \triangle U_1 \triangle U_4 , \quad G = PSL(2,23) \ni \tau : x \longmapsto -\frac{1}{x}$$

とすると，直接計算によって

$$W_{24} \text{ の blocks 集合} = U^G = \{aU+b,\ a(U+b)^\tau + c \mid a \in Q;\ b,c \in F_{23}\},$$

$$\widetilde{W_{24}} = \{\widetilde{aU},\ \widetilde{aU^\tau},\ \widetilde{a(U+6)^\tau} \mid a \in Q\}.$$

この $\widetilde{W_{24}}$ の元を具体的に書き表したのが定理3の表における W_{24} の差型である．差型から代表 blocks は直ちに求まる．また，$\widetilde{W_{24}}$ の表の中で ∞ を含む 11 個のものから ∞ をとり除けば $\widetilde{W_{23}}$ が得られる．

差型の利点と応用

① 定理3で見たように，差型あるいは代表 blocks は，Mathieu-Witt systems $W_{24}, W_{23}, W_{12}, W_{11}$ の全ての blocks をある意味で統一的に記述する簡単な方法を与えて

いるといえる.（注. $W_{22}=(W_{23})_0$ はやや異質である.
$|\widetilde{W_{22}}|=77=W_{22}$ の blocks の個数 で, W_{22} の差型は無意味である. しかし, W_{22} の全ての blocks も, W_{23} の 11 個の代表 blocks を F_{23} の適当な7個の元で平行移動すれば得られる.）

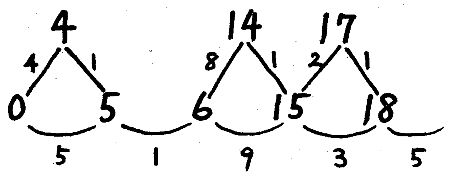
次の 2, 3 は W_{24} について述べるが, 他の W_i でも同様になりたつ.

②. $\Omega(23)$ の8点集合Aが W_{24} の block かどうかの判定:

$$A : W_{24} \text{ の block} \iff \widetilde{A} \in \widetilde{W_{24}}$$

たとえば, $A=\{\infty,0,1,3,12,15,21,22\}$ とすると,
$\widetilde{A}=(\infty,1,2,9,3,6,1,1)=(\infty,1,1,1,2,9,3,6) \in \widetilde{W_{24}}$
より, A は W_{24} の block である.

③. 与えられた5点を含む W_{24} の unique block の見つけ方: たとえば, $\Omega(23)$ の与えられた5点を $A=\{0,5,6,15,18\}$ とする. W_{24} の差型表から, その適当な部分和が
$\widetilde{A}=(5,1,9,3,5)$ であるような差型を探すと, ただ1つの差型 $\quad (\underbrace{1}_{5},1,\underbrace{8,1}_{9},\underbrace{2,1}_{3},5,4)$
が見つかる. 従って, 求める block は



即ち, $\{0,4,5,6,14,15,17,18\}$.

なお，近藤武先生は，与えられた s (≦5) 個の点を含む全ての blocks を直ちに見つけるパソコンのプログラムを作って下さった．

最後に，2，3 の注意をつけ加える．

(1) これまでの全ての議論に於て，$U_i=\{i\}\cup Q_i$ の代りに $V_i=\{\infty\}\cup Q_i$ を用いても全く同様のことがなりたち，

$$\mathbf{D}(8, U_0)\cong\mathbf{D}(8, V_0)\ ;\ \mathbf{D}(23, U_0\triangle U_1\triangle U_4)\cong\mathbf{D}(23, V_0\triangle V_1\triangle V_4)$$

(design として同型) である．Todd [5] に出ている W_{24} の blocks の表や Curtis [2] の MOG によるものは，上の定理 3 (ii) による blocks の表 ($\mathbf{D}(23, U_0\triangle U_1\triangle U_4)$) と一致している．また，$\mathbf{D}(23, U_0\triangle U_1\triangle U_4)$ と $\mathbf{D}(23, V_0\triangle V_1\triangle V_4)$ の差型とは逆回りである：$(d_1, d_2, \cdots, d_8)\in\widetilde{\mathbf{D}(23, U_0\triangle U_1\triangle U_4)}$

$$\Longleftrightarrow (d_8, \cdots, d_2, d_1)\in\widetilde{\mathbf{D}(23, V_0\triangle V_1\triangle V_4)}.$$

(2) 定理 1(i) の証明では，Frobenius 群の基本性質と $G=PSL(2, 8)$ の部分群の表を用いたが，その他の全ての議論は全く初等的である．特に，定理 1(ii)，定理 2，3 の証明は完全に初等的である．

(3) Curtis の MOG [2] も差型も，その正体が私にはまだよく分らないが，差型に現われる数列はどのような規則で並んでいるのだろうか？ MOG や差型を決定ないしは

controlしている，より本質的な何かがあるのだろうか？

本稿の詳しい内容は [3] を参照されたい．

参　考　文　献

[1] T. Beth: Some remarks on D.R. Hughes' construction of M_{12} and its associated designs, in "Finite geometries and designs", London Math. Soc. Lect. Note Ser. 49, 22-30, Camb. Univ. Press, 1981.

[2] R.T. Curtis: A new combinatorial approach to M_{24}, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), 25-42.

[3] S. Iwasaki: An elementary and unified approach to the Mathieu-Witt systems, to appear.

[4] R.N. Lane: t-designs and t-ply homogeneous groups, J. Comb. Th. 10 (1971), 106-118.

[5] J.A. Todd: A representation of The Mathieu group M_{24} as a collineation group, Ann. di Math. Pura. ed. Appl. 71 (1966), 199-238.