

特異点の解消と Igusa local zeta-functions

筑波大 数学系 木村達雄 (Tatsuo KIMURA)

$K = p\text{-adic field} \supset O_K \supset \pi O_K$, $\mathbb{F}_q = O_K/\pi O_K$
($q = \text{odd}$, π は仮定する), $U_K = O_K - \pi O_K$: units, とし
 $|\cdot|_K$ で K の絶対値で $|\pi|_K = q^{-1}$ とするものを表わす。
($\Rightarrow O_K = \{x \in K; |x|_K \leq 1\}$, $\pi O_K = \{x \in K; |x|_K < 1\}$,
 $U_K = \{x \in K; |x|_K = 1\}$)

dx : K^n 上の Haar measure で $\text{vol}(O_K^n) = \int_{O_K^n} dx = 1$
なるものとする。

$f(x) \in O_K[x_1, \dots, x_n]$ に対して,

$Z(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx$ を考えると, これは

$t = q^{-s}$ の有理関数になることが知られている (J. Igusa).

J.P. Serre により, $Z(s)$ は Igusa local zeta function

と名付けられた。本論の目的は与えられた $f(x)$ に

対し $Z(s) = \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx$ の計算法を考えることである。

一番簡単な例は次のように直接計算できる。

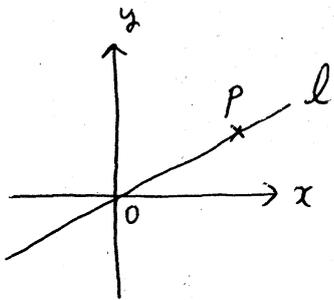
$$\text{Proposition 1. } \int_{O_k} |x|_k^s dx = \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-(s+1)}} \left(= \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-1}t} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Proof) } \int_{O_k} |x|_k^s dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi^k U_k} |x|_k^s dx = \sum_{k=0}^{\infty} q^{-k(s+1)} \int_{U_k} dx \\ &= \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-(s+1)}} \quad (d(\pi^k x) = q^{-k} dx, \text{ vol}(U_k) = 1-q^{-1}) // \end{aligned}$$

我々の基本的な考えは特異点の解消 (resolution of singularity of $\{f=0\}$) を用いて、一般の $Z(s)$ の計算を Prop. 1 へ帰着させようというものである。

そこで blowing up とは何かを簡単に復習してみよう。

$n=2$ の場合, $A^2 = \{(x, y)\}$ の原点 $\{(0, 0)\}$ に



関する blowing up とは,

原点を通る直線 l と, l 上の点 P の組 (P, l) 全体を考えることである。 $\{(P, l)\}$.

$P \neq 0$ なら, l は原点 0 と P を結ぶ直線として unique に定まるから $\{(P, l); P \neq 0\} \cong A^2 - \{(0, 0)\}$

であるが, $P=0 (= (0, 0))$ のところでは l は自由,

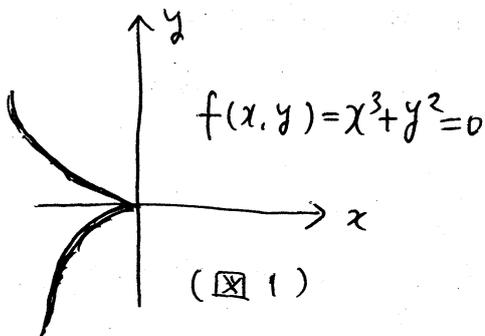
即ち $\{l : tx - uy = 0\} = \{(t:u)\} = \mathbb{P}^1$ と有り

blowing up $\{(P, l)\}$ は原点 $(0, 0)$ のかわりに \mathbb{P}^1 を入れ

そのようなもの (即ち原点 0 を P' にぶくすましたもの) である。

$\{(P, l)\}$ に於て $l \neq \{x=0\}$ ($\Rightarrow u \neq 0$; $y = \frac{t}{u}x$) のところで考えると, l は $y = \frac{t}{u}x$ と表わされ, l 上の点 P は, x 座標で *unique* に定まるから, そこで局所座標として $(x, \frac{t}{u})$ をとることかできる。

そこで $\lambda = x$, $\frac{t}{u} = y'$ とおくと, そこでは $(x, y) = (\lambda, \lambda y')$ となっている。



例として *cusp* の場合, 即ち $f(x, y) = x^3 + y^2 = 0$ を考えてみよう。これは

原点のみ *singularity* を

もっている ($f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

$= 0 \Rightarrow (x_0, y_0) = (0, 0)$) が 原点を *blowing up* した $\{(P, l)\}$ の $l \neq \{x=0\}$ なる部分の局所座標 (λ, y') でみると

$f(x, y) = x^3 + y^2 = \lambda^3 + (\lambda y')^2 = \lambda^2(\lambda + y'^2) = 0$ となり, $f=0$ の *singularity* は

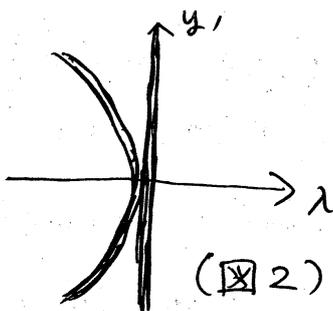
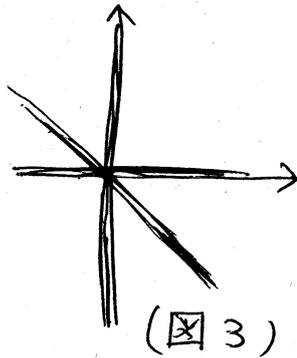


図1に比べて, 図2のように弱まっている。($l \neq \{y=0\}$

の所では局所座標として

(μ, x') 但し $(x, y) = (\mu x', \mu)$

もとることかできて $f(x, y) = \mu^2(\mu x^3 + 1) = 0$
 となり, $\mu=0$ も $\mu x^3 + 1 = 0$ も nonsingular になる)
 更に blowing up すると 図2 は 図3 のように
 なる. もう1回更に blowing up すると



\Rightarrow

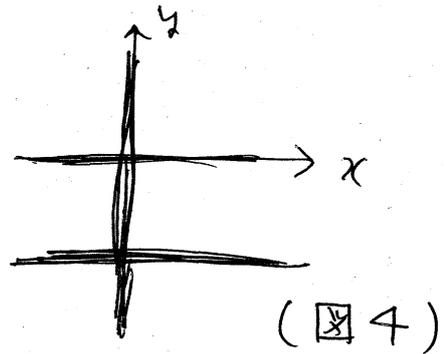


図4 のようになり $f=0$ の既約成分が
 Transversal に交わる (その tangent が 1次独立)
 ことかわかる.

n が一般 のときも 原点の x_i に関する blowing up
 は $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = (\lambda x'_1, \dots, \lambda x'_i, \lambda, \lambda x'_{i+1}, \dots, \lambda x'_n)$
 により $(x'_1, \dots, x'_i, \lambda, x'_{i+1}, \dots, x'_n)$ なる 局所座標 で考
 えることに相当する. blowing up に 無関係の変数 λ が
 入っていることもある.

一般に 次の embedded resolution (of singularity
 of $\{f=0\}$) (by H. Hironaka 1964) が知られている.

K 上 定義された nonsingular absolutely irreducible
 variety Y と K 上 定義された regular map h

$$f \circ h = \xi_1^2 (1 + \xi_1 \eta_1^3) = \xi_2^3 (1 + \xi_2 \eta_2^2) = \xi_3^6 \eta_3^3 (1 + \eta_3) = \chi_3^6 y_3^2 (1 + y_3)$$

$\downarrow h$

$$f = x^3 + y^2$$

$$\{f \circ h = 0\} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \quad \text{と ち っ て お り}$$

$$C_1 = \{\xi_1 = 0\} = \{y_3 = 0\} \quad \left((N_1, \nu_1) = (2, 2) \right)$$

$$C_2 = \{\xi_2 = 0\} = \{\eta_3 = 0\} \quad \left((N_2, \nu_2) = (3, 3) \right)$$

$$C_3 = \{\xi_3 = 0\} = \{x_3 = 0\} \quad \left((N_3, \nu_3) = (6, 5) \right)$$

$$C_4 = \{\eta_3 = -1\} = \{y_3 = -1\} \quad \left((N_4, \nu_4) = (1, 1) \right)$$

$$\{1 + \xi_1 \eta_1^3 = 0\} = C_2 \cup C_3 \cup C_4, \quad \{1 + \xi_2 \eta_2^2 = 0\} = C_3 \cup C_4$$

である (容易に check できる!)

ここで Denef の結果を 一 紹介する。

$\Upsilon(O_K)$ を $\text{mod } \pi O_K$ で考え $\Upsilon(\mathbb{F}_q)$ 上で考えたものを
一 をつけて表わす。

(仮定) $\overline{C_i} (i \in T)$ も \mathbb{F}_q -irreducible, nonsingular
で transversal に交わる。

(注: この仮定をみたさぬ例はいくらでもある。数体 K から
出発すれば, 有限個の finite place P を除いてこの仮
定がみたされるが, 我々は p -adic field から出発している
ので, これをちゃんと仮定しなければならぬ)

このとき, 各 $\overline{C_i}$ に対し 関数 $C_i(s)$ を

$$C_i(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(q-1)q^{-N_i s - \nu_i}}{1 - q^{-N_i s - \nu_i}} \quad \text{と おき } T \text{ の subset } I$$

$$\text{に 対して, } Z_I(s) \stackrel{\text{def}}{=} q^{-n} \prod_{i \in I} C_i(s) \quad \text{と おく.}$$

Theorem (Denef) 2. $\bar{a} \in \gamma(\mathbb{F}_q)$ に 対し T の subset $I(\bar{a})$ を $I(\bar{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in T; \bar{a} \in \bar{C}_i\}$ と 定め

$$Z_{\bar{a}}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\substack{y \in \gamma(O_k) \\ y \equiv \bar{a} \pmod{\pi}}} |f \circ h|^s |h^* dx| \quad \text{と おく と}$$

$$Z_{\bar{a}}(s) = Z_{I(\bar{a})}(s) \text{ が 成り立つ. } Z(s) = \sum_{\bar{a} \in \gamma(\mathbb{F}_q)} Z_{\bar{a}}(s)$$

$$\text{ゆえ, } Z(s) = \sum_{I \subset T} C_I Z_I(s) \quad \text{但し}$$

$$C_I = \#\{\bar{a} \in \gamma(\mathbb{F}_q); \bar{a} \in \bigcap_{i \in I} \bar{C}_i, \bar{a} \notin \bigcup_{j \notin I} \bar{C}_j\}$$

この定理により 6頁の仮定が満たされる $f \in O_k[x_1, \dots, x_n]$ の Igusa local zeta function $Z(s)$ を知るには, 次の Nerve complex with data が重要になる.

\bar{C}_i ($i \in T$) による Nerve complex とは

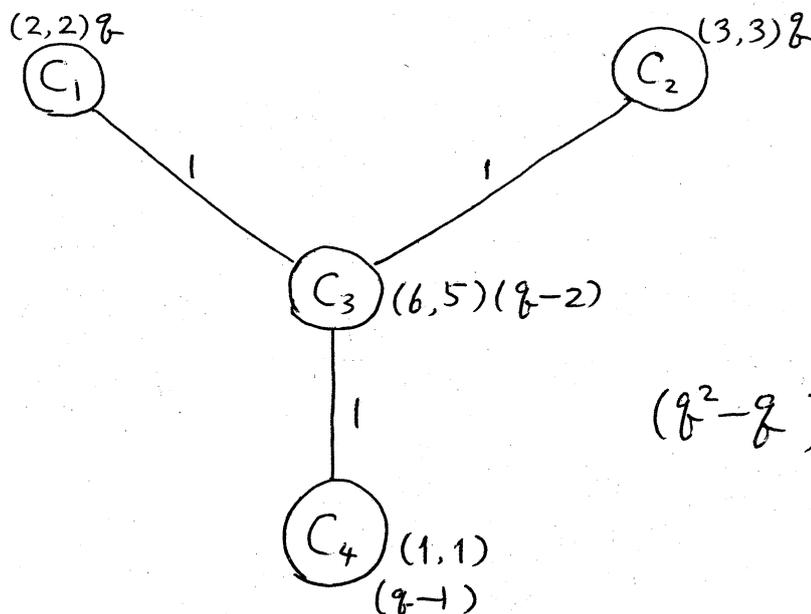
$$\{\bar{C}_{i_1}, \dots, \bar{C}_{i_p}\} = p\text{-simplex} \Leftrightarrow \bar{C}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{C}_{i_p} \neq \emptyset$$

で, 各 p -simplex に 対し data C_I ($I = \{i_1, \dots, i_p\}$)

を attach させる. 特に 各 \bar{C}_i に 対しては data (N_i, ν_i)

を attach させる. 全体 には C_\emptyset を attach させる.

例 えば $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2$ の Nerve complex with data は



$$Z(s) = q^{-2} \sum_{I \subset \{1, \dots, 4\}} C_I \prod_{i \in I} C_i(s)$$

$$= \frac{(1 - q^{-1}) \{ 1 - q^{-(s+2)} (1 - q^{-s}) - q^{-5(s+1)} \}}{(1 - q^{-(s+1)}) (1 - q^{-(6s+5)})}$$

と与る.

(上の例.) $f(x_1, \dots, x_n) = m$ 次 homogeneous τ^n
 $df(x) \neq 0$ for $x \neq 0$ (i.e. 原点以外の singularity はない)
 $N \stackrel{\text{def}}{=} \# \{ \xi \in \mathbb{F}_q^n ; f(\xi) = 0 \}$ とおくと,

$$Z(t) = \frac{(1 - q^{-n}N)(1-t) + (1 - q^{-1})(1 - q^{-n})t}{(1 - q^{-1}t)(1 - q^{-n}t^m)}$$

($t = q^{-s}$)

この二つの例は diagram で表わせるが、一般には complex
ゆえ 平面に書ける。

$$f(x) = \det X \quad (X = 3\text{次行列}) \Rightarrow \text{triangle diagram} \quad \text{etc.}$$

我々は $K = p\text{-adic field}$ を与えて、そこから出発して
いるから $f \in O_K[x_1, \dots, x_n]$ の Igusa local zeta 関数
を計算しようとするとき 6頁の(仮定)が満たされないと
Denef の結果は使えないので不便である。

(Denef は 6頁の(仮定)が満たされる $f = \text{homog.}$
of degree d に対しては $Z(s) = \frac{P(T)}{Q(T)}$ ($T = q^{-s}$,
 P, Q は T の多項式) に対し $\deg_T Z(s) \stackrel{\text{def}}{=} \deg P - \deg Q$
が $-d$ に等しい という Igusa conjecture を証明した
がそのときに 7頁の結果(FR)を使ったのである。井草生生
によると予想の証明よりも、むしろこの FR により Nerve complex
で記述されるという発見(これは Denef ではるか井草生生が気付か
れた)の方が重要とのこと)

そこで、実際の計算で役に立つ公式をみつ
けるため まず 次のことを示す。

Lemma 3. $O_K^n - \{0\} \cong D'_1 \sqcup \dots \sqcup D'_n$ (disjoint union)

$$D'_i = \{ (x_1^{(i)}, \dots, x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, x_{i+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \in O_K^n ; (x_1^{(i)}, \dots, x_{i-1}^{(i)}) \in \pi O_K^{i-1}, \lambda_i \neq 0 \} \quad (i=1, \dots, n).$$

Proof. $O_K^n - \{0\} \ni x = (x_1, \dots, x_n)$ に對して $\exists i$ s.t. $\min\{\text{ord } x_1, \dots, \text{ord } x_n\} = \text{ord } x_i$ ($\neq \text{ord } x_j$ for $\forall j < i$) のとき, $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (\lambda_i x_1^{(i)}, \dots, \lambda_i x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, \lambda_i x_{i+1}^{(i)}, \dots, \lambda_i x_n^{(i)})$ の關係で $(x_1^{(i)}, \dots, x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, x_{i+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ を定めると $(x_1^{(i)}, \dots, x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, x_{i+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \in D'_i$. 逆に D'_i の \forall 元 \equiv 對し, 上の關係で (x_1, \dots, x_n) を定めると $\min\{\text{ord } x_1, \dots, \text{ord } x_n\} = \text{ord } x_i$ ($\neq \text{ord } x_j$ for $\forall j < i$). (但し $\text{ord } 0 = +\infty$) //

公式 4. $D_i = \{ (x_1^{(i)}, \dots, x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, x_{i+1}^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}) \in O_K^m ; (x_1^{(i)}, \dots, x_{i-1}^{(i)}) \in \pi O_K^{i-1} \}$ とおくと,

$$\int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx = \sum_{i=1}^m \int_{D_i \times O_K^{n-m}} |f(\lambda_i x_1^{(i)}, \dots, \lambda_i x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, \lambda_i x_{i+1}^{(i)}, \dots, \lambda_i x_m^{(i)}, x_{m+1}, \dots, x_n)|_K^s \lambda_i^{m-1} d\lambda_i dx_1^{(i)} \dots dx_m^{(i)} dx_n$$

Proof. $\int_{O_K^n} = \int_{O_K^n - \{0\}} , \int_{D_i \times O_K^{n-m}} = \int_{D'_i \times O_K^{n-m}} \llcorner$

Lemma 3 より //

$$\text{例} \quad Z_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{M_n(\mathcal{O}_K)} |\det X|^s \cdot dX = \prod_{i=1}^n \frac{1 - q^{-i}}{1 - q^{-(s+i)}}$$

n に関する帰納法で示す。 $n=1$ のときは Prop 1 により正しい。第 1 行に関して blowing up する。

$$Z_n(s) = \sum_{i=1}^n \int_{D_i \times \mathcal{O}_K^{n^2-n}} \left| \det \begin{pmatrix} \lambda x'_{11}, \dots, \lambda, \dots, \lambda x'_{1n} \\ x_{21}, \dots, x_{2i}, \dots, x_{2n} \\ \vdots \\ x_{n1}, \dots, x_{ni}, \dots, x_{nn} \end{pmatrix} \right|_K^s \lambda^{n-1} d\lambda dx'_{11} \dots dx_{nn}$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\substack{x'_{11}, \dots, x'_{1,i-1} \in \pi \mathcal{O}_K \\ \lambda, x_{kl} \in \mathcal{O}_K}} \left| \lambda^s \right|_K \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & \dots & 0 & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & 0 & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \right|_K^s \lambda^{n-1} d\lambda dx'_{11} \dots dx_{nn}$$

(変数変換 えてる!)

$$= \sum_{i=1}^n q^{-(i-1)} \int_{\mathcal{O}_K} |\lambda|_K^{s+n-1} d\lambda \cdot Z_{n-1}(s)$$

$$= \left(\frac{1 - q^{-n}}{1 - q^{-1}} \right) \left(\frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-(s+n)}} \right) Z_{n-1}(s) = Z_{n-1}(s) \cdot \frac{1 - q^{-n}}{1 - q^{-(s+n)}}$$

$$\Rightarrow Z_n(s) = \prod_{i=1}^n \frac{1 - q^{-i}}{1 - q^{-(s+i)}} \quad //$$

原点 $f=0$ の singularity があるときは公式 4 を何回かくり返せば、原点で nonsingular な場合の計算に

帰着する。原点以外の singularity についても公式4の考
え方でやればよい。 $f(x)$ が weighted homogeneous ならば
公式4 (またはそれを modify したものを) をくり返すと積分は

$$\int_{O_k^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx \text{ の形に帰着する。}$$

但し $C_i = \{f_i = 0\}$ は K -irreducible, nonsingular
で $C_i (i \in T = \{1, \dots, t\})$ は transversal に交わる。

ここで $\text{mod } \pi$ による reduction $\bar{C}_i (i \in T)$ たちは
もはや同じ条件をみたすとは限らない。

例えば $f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_1 - \pi, f_3(x) = x_1 + \pi y - y^2$
とすると $C_i = \{f_i = 0\} (i=1, 2, 3)$ は 既約, nonsingular
で transversal に交わるが $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = \{\bar{x}_1 = 0\}, \bar{C}_3 =$
 $\{\bar{x}_1 - \bar{x}_2^2 = 0\}$ となり条件がくされる。Th 2 の特殊な場合
として次の公理を得る。証明簡単ゆえ与えずおこ。

公式5 (Denef) $\bar{C}_i = \{\bar{f}_i = 0\} (i \in T)$ たちは
~~*~~ irreducible, nonsingular で C_i は transversal に
交わる と仮定する。

$$\Rightarrow \int_{O_k^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx = q^{-n} \sum_{I \subset T} C_I \prod_{i \in I} \frac{(q-1)q^{-N_i s - 1}}{1 - q^{-N_i s - 1}}$$

但し $C_I = \#\{\bar{a} \in \mathbb{F}_q^n; \bar{a} \in \bigcap_{i \in I} \bar{C}_i, \bar{a} \notin \bigcup_{j \notin I} \bar{C}_j\}$

証明)
$$\int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx = \sum_{\xi \in \mathbb{F}_q^n} \int_{\xi + \pi O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx$$

今 $\xi \in \bigcap_{i \in I} \overline{C_i} = \overline{C_{i_1}} \cap \cdots \cap \overline{C_{i_k}}$, $\xi \notin \bigcup_{j \notin I} \overline{C_j}$

$$\Rightarrow \int_{\xi + \pi O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx = q^{-n} \int_{O_K^n} |f_1(\xi + \pi x)^{N_1} \cdots f_t(\xi + \pi x)^{N_t}|^s dx \quad (*)$$

一般に $f_j(\xi + \pi x) = f_j(\xi) + \pi(\dots)$ と表わせるから

$\xi \notin \overline{C_j} \Rightarrow f_j(\xi) \in U_K \Rightarrow |f_j(\xi + \pi x)| = 1$ for $\forall x$

$$\Rightarrow (*) = q^{-n} \int_{O_K^n} \left| \prod_{i \in I} f_i(\xi + \pi x)^{N_i} \right|^s dx \quad (**)$$

$\xi \in \overline{C_i} \Rightarrow f_i(\xi) = \pi u_i$ ($u_i \in O_K$) と表わせる.

nonsingular とする仮定により, 例えは $\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\xi) \neq 0$ と

する $f_i(\xi + \pi x) = \pi u_i + \pi \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi) \cdot x_j + \pi^2(\dots)$

$$= \left[\underbrace{x_1 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\xi) + \pi(\dots) \right)}_{\text{unit}} + (x_1 \text{ に無関係な項}) \right] \pi$$

と表わせる. $x_1' = \frac{1}{\pi} f_i(\xi + \pi x) \leftrightarrow x_1$ 変換
 $x_j' = x_j$ ($\forall j \neq 1$)

は $O_K^n \leftrightarrow O_K^n$ の bijection τ^n $d\alpha' = d\alpha$ である.

$\overline{f_i}$ ($i \in I$) が $\overline{\xi}$ で transversal に交わる とき

仮定から $O_K^n \leftrightarrow O_K^n$ bijection

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{s.t. } \frac{1}{\pi} f_i(\xi + \pi\alpha) = y_1, \dots, \frac{1}{\pi} f_{i_k}(\xi + \pi\alpha) = y_k$$

$$d\alpha = dy$$

となるものが存在する.

$$\Rightarrow (**) = q^{-n} \int_{O_K^n} \left| \prod_{i \in I} (\pi y_i)^{N_i s} \right| dy$$

$$= q^{-n} \prod_{i \in I} \int_{O_K} (\pi y_i)^{N_i s} dy_i = q^{-n} \prod_{i \in I} \frac{(q-1) q^{-N_i s - 1}}{1 - q^{-N_i s - 1}}$$

$$\text{Rpt } \overline{\xi} \in \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}, \quad \overline{\xi} \notin \bigcup_{j \notin I} \overline{C_j}$$

$$\Rightarrow \int_{\overline{\xi} + \pi O_K^n} |f_1(\alpha)^{N_1} \cdots f_t(\alpha)^{N_t}|^s d\alpha = q^{-n} \prod_{i \in I} \frac{(q-1)^{N_i s - 1}}{1 - q^{-N_i s - 1}}$$

公理 5

さて公式5は \overline{C}_2 ($\mathbb{C} \pm I$) たちが nonsingular で
transversal に交わる (そして既約) の場合だが,
一般の場合の

$$\int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx, \text{ 但し } C_2 = \{f_i = 0\} \text{ は}$$

K -irreducible, nonsingular で transversal に交わる,

はどうか? 結論を先にいうと

$$\int_{O_K^n} |f(x)|^s dx = \sum_{\xi \in \mathbb{F}_q^m} \int_{(\xi + \pi O_K^m) \times O_K^{n-m}} |f(x)|^s dx \quad (m \leq n)$$

という公式を有限回使って公式5の場合に帰着
させることができる。その証明をするためにいくつか
の概念を導入する。(これは講演では述べなかった部分)

$$A \stackrel{\text{def}}{=} O_K[x_1, \dots, x_n] - \pi O_K[x_1, \dots, x_n]$$

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in A; \{f=0\} \text{ は nonsingular}\},$$

$\xi \in O_K^m$ に対して 二つの map $R_\xi: A \rightarrow A$ と
(reduction)

$L_\xi: A \rightarrow A$ を 次のように定義する。
(lifting)

$$f \in A \text{ に対して } f(\xi + \pi x) = \pi^r \cdot (R_\xi f)(x)$$

(但し r は $R_\xi f \in A$ という条件で *unique* に定まる)

により $R_\xi f \in A$ を定める。

$$\text{一方 } f \in A \text{ に対して } \pi^{s'} f\left(\frac{x-\xi}{\pi}\right) = (L_\xi f)(x)$$

(s' は $L_\xi f \in A$ という条件で *unique* に定まる)

により $L_\xi f$ を定める。次の事は容易にわかる。

命題 6 : $R_\xi : A \rightarrow A$ 及び $L_\xi : A \rightarrow A$ は共に
bijection で $R_\xi L_\xi = L_\xi R_\xi = \text{id}_A$

$$\text{さて } \int_{O_K^n} |f(x)|^s dx = \sum_{\bar{\xi} \in \mathbb{F}_q^n} \int_{\xi + \pi O_K^n} |f(x)|^s dx \text{ に於て}$$

$$\int_{\xi + \pi O_K^n} |f(x)|^s dx = q^{-n} \int_{O_K^n} |f(\xi + \pi x)|^s dx = q^{-rs-n} \int_{O_K^n} |R_\xi f(x)|^s dx$$

$$\text{ゆえ } \int_{O_K^n} |f(x)|^s dx \text{ の計算は } \int_{O_K^n} |R_\xi f(x)|^s dx \text{ } (\bar{\xi} \in \mathbb{F}_q^n)$$

の計算に帰着する。

従って,

$f_1(x), \dots, f_t(x)$ (但し $C_2 = \{f_i=0\}$ は K -irreducible, nonsingular で transversal に交わる) が与えられたとき $t' \in \mathbb{N}$ が存在して $\forall \xi_1, \dots, \xi_{t'} \in O_K^n$ に対して

$R_{\xi_i} \cdot R_{\xi_1} f_1, \dots, R_{\xi_{t'}} \cdot R_{\xi_1} f_t$ は公式5の条件を

満たすことを示せば良いことになる。

$$\left. \begin{array}{l} \xi \in O_K^n \text{ に対して, } f(x) = \sum_d \pi^{a_d} f_d(x-\xi) \text{ と} \\ f(x) \in A \end{array} \right\}$$

表わす。ここで $f_d(x-\xi) \in A$ は $x-\xi = (x_1-\xi_1, \dots, x_n-\xi_n)$ に関して d 次 homogeneous. このとき

命題7 $\deg \bar{f} = d_0$ とするとき, 次は同値

$$(1) \deg \overline{R_{\xi} f} < \deg \bar{f}$$

$$(2) \exists d < d_0 \text{ s.t. } a_d + d < d_0$$

これは明らかである。 $\xi < 1 \Rightarrow \bar{f} \neq \text{homog w.r.t. } (x-\xi)$

$\Rightarrow \deg \overline{R_{\xi} f} < \deg \bar{f}$, 仮成り立。

$$\deg \bar{f} = 0 \Rightarrow |f(x)| = 1$$

$$\deg \bar{f} = 1 \Rightarrow \bar{f}(x) \text{ nonsingular, irreducible}$$

よって $\deg \bar{f} = d_0 \geq 2$ のとき $R_{\xi_1}, \dots, R_{\xi_t}$ たちの作用によつて $\deg \overline{R_{\xi_1} \cdots R_{\xi_t} f} \leq 1$ とすることができるともいえる。 $\overline{R_{\xi_1} \cdots R_{\xi_t} f}$ nonsingular, irreducible までいえる。(transversality についてはあとで扱う)

定義 8. $f(x) \in A$ が $\xi \in O_K^n$ に関して special type とは、
 $f(x) = \sum_d \pi^{a_d} f_d(x - \xi)$, $a_d + d \geq d_0$

($= \deg \bar{f}$) for $\forall d < d_0$, と表わすこと。

これは $\deg \overline{R_{\xi} f} = \deg \bar{f}$ と同値である。

定理 9. $F(x) \in A$, $\deg \bar{F} = d_0$ とするとき次の条件は同値。

(1) $\xi_i \in O_K^n$ の無限列 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \dots$ で

$\forall m$ に對して $R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} F$ は ξ_{m+1} に関して special

type i.e. $\deg \overline{R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} F} = d_0$ for $\forall m$

(2) $\exists \eta \in O_K^n$ s.t. $F(x) = \sum_{d \geq d_0} F_d(x - \eta)$

但し $F_d(x - \eta)$ は $(x - \eta) = (x_1 - \eta_1, \dots, x_n - \eta_n)$ の d 次 homogeneous 多項式

証明 (2) \Rightarrow (1) $\xi_1 = \eta$, $\xi_j = 0$ ($\forall j \geq 2$) とすればよい。(1) \Rightarrow (2) が重要である。

$R_{\xi_m} \dots R_{\xi_1} F$ は ξ_{m+1} に関して special type である

$$R_{\xi_m} \dots R_{\xi_1} F(x) = \sum_d \pi^{a_{m,d}} f_{m,d} (x - \xi_{m+1})$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{但し } f_{m,d} \in A, a_{m,d} > 0 \text{ for } \forall d > d_0, \\ a_{m,d_0} = 0, d + a_{m,d} \geq d_0 \text{ for } \forall d < d_0 \end{array} \right)$$

と表わせる。

このとき $R_{\xi_{m-1}} \dots R_{\xi_1} F = L_{\xi_m} (R_{\xi_m} \dots R_{\xi_1} F)$ を計算しよう。

$$\sum_d \pi^{a_{m,d}} f_{m,d} \left(\frac{x - \xi_m}{\pi} - \xi_{m+1} \right) = \sum_d \pi^{a_{m,d} - d} f_{m,d} (x - \xi_m - \pi \xi_{m+1})$$

たゞ $\deg L_{\xi_m} (R_{\xi_m} \dots R_{\xi_1} F) = d_0$ に注意すると

(f_{m,d_0} の係数は π^{-d_0} 中)

$$L_{\xi_m} (R_{\xi_m} \dots R_{\xi_1} F) = \sum_d \pi^{a_{m,d} + (d_0 - d)} f_{m,d} (x - \xi_m - \pi \xi_{m+1})$$

以下 \llcorner 返して

$$F(x) = \sum_d \pi^{a_{m,d} + m(d_0 - d)} f_{m,d} (x - \xi_1 - \pi \xi_2 - \dots - \pi^m \xi_{m+1})$$

か $\forall m$ に対して成り立つ。左辺は m と無関係ゆえ

$$F(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_d \pi^{a_{m,d} + m(d_0 - d)} f_{m,d} (x - \xi_1 - \pi \xi_2 - \dots - \pi^m \xi_{m+1})$$

$$\text{今 } \eta = \lim_{m \rightarrow \infty} (\xi_1 + \pi \xi_2 + \dots + \pi^m \xi_{m+1}) \in O_K^n \text{ とおく。}$$

$$F(x) = \sum_d F_d(x - \eta) \text{ と表わしたとき}$$

$$F_d(x - \eta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi^{a_{m,d} + m(d_0 - d)} f_{m,d} (x - \xi_1 - \pi \xi_2 - \dots - \pi^m \xi_{m+1})$$

$$\text{ゆえ } d < d_0 \text{ ならば } (a_{m,d} \geq 0 \text{ ゆえ}) F_d(x - \eta) = 0$$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{d \geq d_0} F_d(x - \eta) \quad //$$

Corollary 10. $F(x) \in A'$ (i.e. nonsingular, $\in A$)

か $\deg \bar{F}(x) = d_0 \geq 2$ とする。このとき自然数 N

が定まって $\forall \xi_1, \dots, \xi_N \in O_K^n$ に対して

$$\deg \overline{R_{\xi_N} \dots R_{\xi_1} F} < \deg \bar{F} (= d_0)$$

(証明) このような自然数 N が存在しなければ、

$\xi_1, \dots, \xi_m, \dots$ なる無限列を適当にとりて定理9の(1)を

みたすようにとれるから、 $F(x) = \sum_{d \geq d_0} F_d(x - \eta)$ ($d_0 \geq 2$)

と表わせる。これは η が $\{F=0\}$ の singular point で

あることを意味するから $F(x) \in A'$ に反する. //

この Cor 10 により, 結局 $\int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx,$

但し $\{f_i=0\}$ は K -med, non-singular, transversal に
交わり $\deg \bar{f}_i = 1$ ($\Rightarrow \{f_i=0\}$ med, nonsingular)
の計算に帰着した.

注) $R_{\xi}: A' \rightarrow A'$, $L_{\xi}: A' \rightarrow A'$ とやっている.

例えば $f \in A'$ に対し $R_{\xi} f \in A'$ とするには

$F(x) = f(\xi + \pi x)$ が nonsingular とする.

例えば η が $F(x)$ の singular point ならば,

$F(\eta) = 0$ ($\rightarrow f(\xi + \pi \eta) = 0$), $\forall \frac{\partial F}{\partial x_i}(\eta) = 0$ ($\rightarrow \pi \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi + \pi \eta) = 0$)
 $\Rightarrow \xi + \pi \eta$ が f の singular pt. 矛盾. //

注) $f =$ 既約 $\Rightarrow R_{\xi} f =$ 既約

$\therefore R_{\xi} f = f_1 \cdot f_2 \Rightarrow f = (L_{\xi} f_1) \cdot (L_{\xi} f_2)$ //

命題 11 f_1, \dots, f_t の $\forall \xi \in O_K^n$ での交わりが
transversal ならば, $\forall \xi$ に対し $R_{\xi} f_1, \dots, R_{\xi} f_t$ の
 $\forall \eta \in O_K^n$ での交わりも transversal である.

証明) $f(\xi + \pi x) = \pi^r \cdot (R_{\xi} f)(x)$ なる r が存在する。

$x_0 = \xi + \pi \eta$ に於て, $f_1(x_0) = \dots = f_l(x_0) = 0$, $f_{l+1}(x_0) \neq 0$,
 \dots , $f_t(x_0) \neq 0$ とすると f_1, \dots, f_l は x_0 で transversal に交わる
 から

$$f_1(x) = a_{11}(x_1 - (x_0)_1) + \dots + a_{1n}(x_n - (x_0)_n) + \text{(2次以上の項)}$$

$$\vdots$$

$$f_l(x) = a_{l1}(x_1 - (x_0)_1) + \dots + a_{ln}(x_n - (x_0)_n) + \text{(2次以上の項)}$$

と表わしたとき $\text{rank} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \end{pmatrix} = l$ として

$$f_1(\xi + \pi x) = \pi a_{11}(x_1 - \eta_1) + \dots + \pi a_{1n}(x_n - \eta_n) + \text{(2次以上の項)}$$

$$\vdots$$

$$f_l(\xi + \pi x) = \pi a_{l1}(x_1 - \eta_1) + \dots + \pi a_{ln}(x_n - \eta_n) + \text{(")}$$

従って

$$(R_{\xi} f_1)(x) = a_{11}(x_1 - \eta_1) + \dots + a_{1n}(x_n - \eta_n) + \text{(2次以上の項)}$$

$$\vdots$$

$$(R_{\xi} f_l)(x) = a_{l1}(x_1 - \eta_1) + \dots + a_{ln}(x_n - \eta_n) + \text{(2次以上の項)}$$

即ち, $R_{\xi} f_1, \dots, R_{\xi} f_l$ は $\forall \eta$ で transversal に交わる。

よして 明らか $(R_{\xi} f_k)(\eta) \neq 0$ ($l+1 \leq k \leq t$) //

命題 12 $f(x) \equiv a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \pmod{\pi^m}$ ($m \geq 1$)

$\xi \in O_K^n \Rightarrow (1) |R_{\xi} f| = 1$, または

(2) $R_{\xi} f(x) \equiv a'_0 + \sum_{i=1}^n a'_i x_i \pmod{\pi^{m+1}}$ 但し $\forall a'_i \equiv a_i \pmod{\pi^m}$

$$\text{証明) } f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \pi^m \left(\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j,k} a_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \right)$$

$$\Rightarrow f(\xi + \pi x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i (\xi_i + \pi x_i)$$

$$+ \pi^m \left(\sum_{i,j} a_{ij} (\xi_i + \pi x_i) (\xi_j + \pi x_j) + \sum_{i,j,k} a_{ijk} (\xi_i + \pi x_i) (\xi_j + \pi x_j) (\xi_k + \pi x_k) + \dots \right)$$

$$= \left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \right) + \pi \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

$$+ \pi^m (F_0(x) + \pi F_1(x) + \dots + \pi^r F_r(x))$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{0次 homog.} & \text{1次 homog.} & \text{r次 homog.} \end{array}$

$$= \left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \xi_i + \pi^m F_0 \right)$$

$$+ \pi \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i + \pi^m F_1(x) \right)$$

$$+ \pi^{m+2} (F_2(x) + \dots + \pi^{r-2} F_r(x))$$

もし $a_0 + \sum a_i \xi_i \in U_K$ ならば $f(\xi + \pi x) = R_\xi f(x)$ となる。

$|f(\xi + \pi x)| = 1$ かつ (1) になる。

$a_0 + \sum a_i \xi_i = \pi u$ のときは

$$R_\xi f = (u + \pi^{m+1} F_0) + \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i + \pi^m F_1(x) \right)$$

$$+ \pi^{m+1} (F_2(x) + \dots + \pi^{r-2} F_r(x))$$

即ち (2) の場合を得る。 //

命題 13 O_K^n の無限列 $\xi_1, \dots, \xi_m, \dots$ で $R_{\xi_{m-1}} \dots R_{\xi_1} f =$

$$a^{(m)} + \sum_{i=1}^k a_i^{(m)} x_i + \sum_{i=k+1}^n a_i^{(m)} x_i + \pi^m F_{m-1}(x),$$

$|R_{\xi_m} \dots R_{\xi_1} f| \neq 1$, $a_i^{(m)} \equiv 0 \pmod{\pi^m}$ for $\forall m, (k+1 \leq i \leq n)$

を満たすものがあるとする。 $\eta = \xi_1 + \pi \xi_2 + \dots \in O_K^n$ とおく。

然) 3は $R_{\eta} f(x) = b + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \pi \{x \text{ の 2 次 以 上 の 項} \}$
と なる。

証明) まず 次の Lemma を 示 せ う。

Lemma 14 (1) $\forall \xi_1, \dots, \xi_{m+1} \in O_K^n$ に 対 し て

$$\eta = \xi_1 + \pi \xi_2 + \dots + \pi^m \xi_{m+1} \quad \text{と お く と}$$

$$R_{\xi_{m+1}} \dots R_{\xi_1} f = R_0^m R_{\eta} f \quad \text{for } \forall f \in A$$

(2) O_K^n の 無 限 列 ξ_1, ξ_2, \dots に 対 し $\eta = \xi_1 + \pi \xi_2 + \dots \in O_K^n$

と お く と $\forall f \in A$ に 対 し て

$$R_0^m R_{\eta} f = R_{\xi} R_{\xi_m} \dots R_{\xi_1} f \quad \text{with } \xi \equiv \xi_{m+1}(\pi).$$

証明) (2) は $\xi = \xi_{m+1} + \pi \xi_{m+2} + \dots$ と お け ば

(1) に 帰 着 する。 (1) の 証 明: $f(\xi_1 + \pi x) = \pi^{\nu_1} (R_{\xi_1} f)(x)$

$$(R_{\xi_1} f)(\xi_2 + \pi x) = \pi^{\nu_2} (R_{\xi_2} R_{\xi_1} f)(x)$$

$$\Rightarrow f(\xi_1 + \pi \xi_2 + \pi^2 x) = \pi^{\nu_1 + \nu_2} (R_{\xi_2} R_{\xi_1} f)(x)$$

$$= \pi^{\nu_1 + \nu_2} (R_0 R_{\xi_1 + \pi \xi_2} f)(x) \quad \text{以下 同 様。} \quad //$$

命題 13 の 証 明) $|R_{\xi_m} \dots R_{\xi_1} f| \neq 1 (\forall m)$ と う

仮 定 より $|R_0^m R_{\eta} f| \neq 1 (\forall m)$ が Lemma 14 より わ かる。

従 っ て この とき, R_{η} の 1 次 の 項 と $R_0^m R_{\eta}$ の 1 次 の 項

は 一 致 する。 $R_{\eta} f$ の x_i ($k+1 \leq i \leq n$) の 係 数 は

$\forall m$ に 対 し π^m で わ かる 二 項 係 数 による 故 に $= 0$ 。 //

定義 15 作用素 R_{ξ} を次のように一般化する。

$1 \leq m \leq n$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in O_K^m$ に対して $R_{\eta} f$ を

$f(\eta + \pi x', x'') = \pi^r (R_{\eta} f)(x)$ で定義する。 r は

$R_{\eta} f \in A$ という条件で unique に定まる。ここで

$x = (x', x'')$, $x' = (x_1, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$

である。 R_{η} に関する 21 頁に述べた性質が成り立つ。

定理 16 $f_i(x) = a_i + \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + \pi^m F_i(x) \in A$
 $(i=1, \dots, t)$ が既約, 非特異, で transversal に交わる
とする。 $F_i(x)$ は x の 2 次以上の項。

このとき, 自然数 N が存在して (1) $|R_{\xi_N} f_i - R_{\xi_1} f_i|_K = 1$
for some i 又は (2) $\overline{R_{\xi_N} f_i - R_{\xi_1} f_i}$ ($1 \leq i \leq t$) は
transversal に交わる。

ここで各 $k=1, \dots, N$ に対し, 自然数 m_k が定まり

$1 \leq m_k \leq n$ で, ξ_k は $O_K^{m_k}$ の任意の元である。

この定理を示せば我々の目的は達せられる。

t に関する induction. $t=1$ なる明らかなゆえ

$t \leq P-1$ で成り立つとして $t=P$ のときを示す。

Lemma 17 一般性を失わずに $a_1 = \dots = a_l = 0$
 かつ $(\bar{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$ としよ.

Proof. $\text{rank}(\bar{a}_{ij}) = l$ なる変数の1次変換
 と f_1, \dots, f_t の順序を (必要なら) 変えることにより
 $(\bar{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$ としよ. $\xi \in O_K^n$ (\forall given)
 に対し, $f_i(\xi) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ とする i が存在すれば,
 $|R_\xi f_i|_K = 1$ かつ $t \leq T-1$ に帰着する. よって
 $f_i(\xi) \equiv 0 \pmod{\pi}$ としよ. Hensel's lemma により
 $\xi' \equiv \xi \pmod{\pi}$ なる ξ' で $f_i(\xi') = 0$ ($1 \leq i \leq l$) とする
 のがある. ξ は $\text{mod } \pi$ で自由にとれるから最初から
 $\xi' = \xi$ としよ. さて 命題 12 より $R_\xi f_i$ ($i=1, \dots, t$)
 は この Lemma の条件をみたす. //

Lemma 18 $a_1 = \dots = a_l = 0$, $(\bar{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$, かつ
 $\text{rank}(\bar{a}_{ij}) > l$ とし, 更に ある $j \geq l+1$ に対し
 $\min_i \text{ord } a_{ij}$ に比して m を十分大きくとれるとすると
 ある N があって (1) $|R_{\eta_N} f_i| = 1$, 又は
 (2) $R_{\eta_N} f_i$ に對し $(\bar{a}_{ij}) > l$ とする

∴) $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l) \neq 0 (\pi)$ 例えは $\eta_i \neq 0 (\pi)$ とす
 $|R_\eta f_i| = 1 (1 \leq i \leq l)$ かつ $\eta = (0, \dots, 0) \in O_K^l$ と
 してよい. 且 $a_i \neq 0 (\pi) (\exists i = l+1, \dots, n)$ とすれば
 $|R_0 f_i| = 1$ かつ

$$f_i = \pi a_i' + \sum_{j=1}^l a_{ij} x_j + \sum_{j=l+1}^n \pi a_{ij}' x_j + \pi^m F_i(x)$$

($a_i' = \dots = a_l' = 0, 1 \leq i \leq t$).

$$\text{よって } R_\eta f_i = a_i' + \sum_{j=1}^l a_{ij} x_j + \sum_{j=l+1}^n \pi a_{ij}' x_j + \pi^{m-1} F_i(x)$$

これをくり返せばよい. ($x_j (j=l+1, \dots, n)$ の係数の
 order があがって (よことに注意!) //

ここで Case I と Case II にわけよう.

Case I では Lemma 18 をくり返して適用できるときで
 このとき $\text{rank}(\bar{a}_{ij}) = \text{maximal}$ 即ち

$$\text{rank}(a_{ij}) = \text{rank}(\bar{a}_{ij}) \text{ としてよい.}$$

Lemma 18 が適用できる Case II は 命題 13 が
 成り立つときである.

Case I は次のようにして解決する.

$$\text{命題 19 } f_k(x) = a_k + a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n + \pi^m F_k(x)$$

$$(1 \leq k \leq t), \quad a_1 = \dots = a_l = 0, \quad \text{rank}(a_{ij}) \begin{pmatrix} 1 \leq i \leq t \\ 1 \leq j \leq n \end{pmatrix}$$

- $= l = \text{rank}(\overline{a_{ij}}) \quad (1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n)$. 然しこれは
 自然数 N が存在して O_K^n の $\forall \pi \xi_1, \dots, \xi_N$ に対して
 (1) $|R_{\xi_N} \cdots R_{\xi_1} f_k|_k = 1$ for $\exists k$, 又は
 (2) $\overline{R_{\xi_N} \cdots R_{\xi_1} f_k} \quad (1 \leq k \leq t)$ は transversal に交わる.

Proof. 無限列 $\xi_1, \dots, \xi_m, \dots$ で $\forall m$ と $\forall k=1, \dots, t$
 に対して $|R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} f_k|_k \neq 1$ なるものが存在すると仮定
 する。Hensel's lemma により $\xi'_i \equiv \xi_i(\pi)$ なる ξ'_i で
 $f_1(\xi'_1) = \dots = f_l(\xi'_l) = 0$ なるものがあつた。 ξ_1 は mod π の
 自由度が あつたから $\xi'_1 = \xi_1$ としよう。同様にして
 して $(R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} f_k)(\xi_{m+1}) = 0$ かつ $\forall m$ と $\forall k=1, \dots, l$
 に対して 成り立つとしよう。

これは $f_k(\xi_1 + \pi \xi_2 + \dots + \pi^m \xi_{m+1}) = 0$ をいふ。
 $\eta = \sum_{i=0}^{\infty} \pi^i \xi_{i+1} \in O_K^n$ とおくと $f_k(\eta) = 0 \quad (1 \leq k \leq l)$.

transversal に交わるという条件と $\text{rank}(\overline{a_{ij}}) = l$ より
 $f_k(\eta) \neq 0 \quad (l+1 \leq k \leq t)$. しか $\eta \equiv \xi_1(\pi) \pmod{\pi}$
 $f_k(\eta) \equiv 0(\pi) \quad (l+1 \leq k \leq t)$. よつて

$R_{\eta} f_k(x) = a'_k + a'_{k1}x_1 + \dots + a'_{kn}x_n + \pi^{m+1} F'_k(x)$
 $(1 \leq k \leq t)$ 但し $a'_k = 0 \quad (1 \leq k \leq l)$, $a'_k \neq 0 \quad (l+1$
 $\leq k \leq t)$, かつ $(\overline{a_{ij}}) = (\overline{a'_{ij}})$. さて,

$t=l$ なる明らかな $R_{\eta} f_k$ は transversal に交わる。

$t > l$ のとき、例えは $a \in \pi^r u$ ($u \in U_K = O_K - \pi O_K$)

とすれば $|R_0^{r+1} R_{\eta} f_t|_K = 1$. Lemma 14 により

これは $|R_{\bar{\xi}} R_{\bar{\xi}_{r+1}} \cdots R_{\bar{\xi}_1} f_t|_K = 1$ ($\bar{\xi} \equiv \bar{\xi}_{r+2}(\pi)$)

従って $|R_{\bar{\xi}_{r+2}} \cdots R_{\bar{\xi}_1} f|_K = 1$ を意味する。これは

仮定に反する。 //

最後に Case II の場合を扱う。即ち O_K^n の

無限列 $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m, \dots$ で $R_{\bar{\xi}_m} \cdots R_{\bar{\xi}_1} f_j$ ($j=1, \dots, t$)

の χ_i ($l+1 \leq i \leq n$) の係数 $\equiv 0 \pmod{\pi^m}$ ($\forall m$)

が成り立つとする。 $\eta = \bar{\xi}_1 + \pi \bar{\xi}_2 + \dots \in O_K^n$ とおく。

命題 13 により $R_{\eta} f_i = b_i + \sum_{j=1}^l b_{ij} \chi_j + \pi^m$ (2次以上の項) と表わせる。

ある $b_i \neq 0$ なる $b_i = \pi^r u$ ($u \in U_K$) と表わせるが

このとき $|R_0^{r+1} R_{\eta} f_i|_K = 1$, Lemma 14 により

$|R_{\bar{\xi}} R_{\bar{\xi}_{r+1}} \cdots R_{\bar{\xi}_1} f_i|_K = 1$, $\bar{\xi} \equiv \bar{\xi}_{r+2}(\pi)$ 即ち

$t \leq T-1$ の場合に戻る。

$b_i = 0$ ($\forall i=1, \dots, t$) のときは、 $R_{\eta} f_i$ は 0 で transversal に交わるが $t=l$ でなければならぬ。よって $\overline{R_{\eta} f_i}$ は transversal に交わる。 //

参考文献

- [1] J. Denef, On the degree of Igusa's local zeta function, Preprint.
- [2] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Annals of Math.* (1964), 109-326
- [3] J. Igusa, Some results on p -adic complex powers, *Amer. J. Math.* 106 (1984), 1013-1032.
- [4] T. Kimura, Complex powers on p -adic fields and a resolution of singularities, Preprint.