数理解析研究所講究録
631巻 1987年 180-194

セルバーグ型ゼータ関数の特殊値について

東工大・理，髙瀬幸一 (Koichi Takase)

広く信じられているように，代数体 K の Dedekind zeta 関数 $\zeta_K(s)$ の $0<m\in\mathbb{Z}$ での特殊値は，次のように書けると予想されている； $\zeta_K(m)=R\cdot P\cdot A$。ここで R: regulator，P: period，A: algebraic part と呼ばれて，A は代数的数，$R=\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{R}^r)$ $r=\mathrm{ord}_{s=1-m}\zeta_K(s)$，$\Gamma\subset\mathbb{R}^r$: lattice である。典型的な例は，

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_K(s)=R\cdot P\cdot A \qquad \begin{array}{l} R=\mathrm{vol}(U_K\backslash\mathbb{R}^{r_1+r_2-1}),\quad r_1+r_2-1=\operatorname*{ord}_{s=0}\zeta_K(s) \\ P=2^{r_1}\cdot(2\pi)^{r_2},\quad A=\dfrac{h}{w}\cdot|D|^{-\frac{1}{2}} \end{array}$$

ここで，$r_1=\#\{\text{real place of } K\}$，$r_2=\#\{\text{complex place of } K\}$，$U_K$：$K$の単数群，$h$：$K$の類数，$w=\#\{1\text{の巾根}\in K\}$，$D$：$K$の判別式。

本講では，Selberg zeta 関数の特殊値が，同様に，regulator と period の積に分解される，ということを主張する。

§1. 準備.

Selberg zeta 関数は，$\mathbb{R}$-rank $=1$ の半単純 Lie 群に対して構成されているが (Gangolli [3]，Wakayama [7, 8])，ここでは，$SU(1,q+1)$ $(q>0)$ について考える。

1) $SU(1,q+1)$ $J=\begin{pmatrix} & & 1\\ & -I_q & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ $(q>0)$ として、

$$G=SU(1,q+1)=\{g\in SL(q+2,\mathbb{C})\mid g^*\cdot J\cdot g=J\}\quad (g^*={}^t\bar{g})$$

$$K=\{g\in G\mid g^*\cdot g=1\}=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & -d\\ c & -b & a\end{pmatrix}\in G\right\}\subset G:\text{極大コンパクト部分群}$$

として、$G=K\cdot A_p\cdot N$：岩澤分解 とする。ここで

$$N=\left\{\begin{pmatrix} 1 & b & \frac{1}{2}\cdot b\cdot b^*+\sqrt{-1}t\\ 0 & I_q & b^*\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, b\in\mathbb{C}^q,\ t\in\mathbb{R}\right\},\quad A_p=\left\{\begin{pmatrix} a & & \\ & I_q & \\ & & a^{-1}\end{pmatrix}\,\middle|\, 0<a\in\mathbb{R}\right\}$$

$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)=\{X\in\mathfrak{sl}(q+2,\mathbb{C})\mid X^*J+J\cdot X=0\}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ として、

$$\mathfrak{a}=\left\{\begin{pmatrix} a_0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_{q+1}\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}\right\}\subset\mathfrak{g}:\text{Cartan subalgebra}$$

$$\lambda_j\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*\quad\text{s.t.}\quad \lambda_j\begin{pmatrix} a_0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_{q+1}\end{pmatrix}=a_j\quad\text{for } j=0,1\cdots q+1$$

$$\Delta=\{\lambda_i-\lambda_j\mid i,j=0,1\cdots q+1,\ i\neq j\}:\text{root system of }(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$$

$$\{\alpha_j=\lambda_j-\lambda_{j+1}\mid j=0,1\cdots q\}:\text{fundamental root system of }\Delta$$

$$\mathfrak{a}_p=\mathrm{Lie}(A_p)=\left\{\begin{pmatrix} a & & \\ & 0 & \\ & & -a\end{pmatrix}\,\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathfrak{g}$$

$$P_+=\{0<\lambda\in\Delta\mid \lambda(\mathfrak{a}_p)\neq 0\}$$

$$=\{\lambda_0-\lambda_j,\ \lambda_j-\lambda_{q+1},\ \lambda_0-\lambda_{q+1}\mid j=1\cdots q\}$$

$$\rho=\frac{1}{2}\cdot\sum_{0<\lambda\in\Delta}\lambda=-\sum_{j=0}^{q+1}j\cdot\lambda_j$$

とする。

$G\ni x=\kappa(x)\cdot\exp H(x)\cdot n$ for $\kappa(x)\in K$, $H(x)\in\mathfrak{a}_p$, $n\in N$ とする。

Haar measure を次のように定める；

d_K : Haar measure on K s.t. $\int_K d_K(k) = 1$

$d_{A_\mathfrak{p}}$: 〃 〃 on $A_\mathfrak{p}$ s.t. $d_{A_\mathfrak{p}}\begin{pmatrix} a & & \\ & I_g & \\ & & a^{-1} \end{pmatrix} = \dfrac{da}{a}$

d_N : 〃 〃 on N s.t. $\int_N e^{-2\rho H(n^*)} d_N(n) = 1$

d_G : 〃 〃 on G s.t. $d_G(x) = e^{2\rho H(x)} d_N(n)\, d_{A_\mathfrak{p}}(a)\, d_K(k)$

for $x = kan \in G = K \cdot A_\mathfrak{p} \cdot N$

2) 既約ユニタリ表現　$K \simeq U(g+1)$ で、K の 1 次元表現は、

$$\delta_r : K \ni \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & -d \\ c & -b & a \end{pmatrix} \mapsto (a+c)^{-r} \in \mathbb{C}^\times \quad \text{for } r \in \mathbb{Z}$$

により尽くされる（同型 $K \simeq U(g+1)$ により、δ_r は $\det^r$ になる）。G の既約ユニタリ表現のユニタリ同値類全体を $\hat{G}$ として、$\hat{G}(\delta_r) = \{\pi \in \hat{G} \mid m(\delta_r, \pi|_K) > 0$ （実は、$m(\delta_r, \pi|_K) = 1$）$\}$ とおく（$m(\alpha, \beta) = \beta$ における α の重複度）。$\hat{G}(\delta_r)$ は、次のようにして、$\mathbb{C}$ の部分集合と同一視される（c.f. Kraljević [5]）；まず、$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p},\mathbb{C}}^*$ に対して、

$$\varphi_{\lambda,r}(x) = \int_K e^{-(\lambda+\rho)H(x^{-1}k)} \cdot \delta_r(k) \cdot \bar{\delta}_r(\kappa(x^{-1}k))\, d_K(k) \quad (x \in G)$$

とおくと、$\varphi_{\lambda,r}$ は G 上の spherical function of type δ_r であり、G 上の spherical function of type δ_r は、$\varphi_{\lambda,r}$ で尽くされる（c.f. Warner [8] vol II P42）。よって、

$$(\pi, H) \in \hat{G}(\delta_r) \Rightarrow {}^\exists u \in H \text{ s.t. } |u| = 1,\ \pi(k)u = \delta_r(k) \cdot u \text{ for } {}^\forall k \in K$$

$$\Rightarrow \varphi_{\pi,\delta_r}(x) = (\pi(x)u, u) : \text{spherical function of type } \delta_r$$

$$\Rightarrow {}^{\exists_1}\lambda \in \mathfrak{a}_{g,\mathbb{C}}^{*} \quad \text{s.t.} \quad \varphi_{\pi,\delta_r} = \varphi_{\lambda,r}$$

そこで，$\pi \mapsto \lambda\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ により，$\hat{G}(\delta_r)$ を $\mathbb{C}$ の部分集合と同一視する。このとき

$$\hat{G}(\delta_r) = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \subset \mathbb{C}$$

$$U_1 = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ 0 > \lambda^2 - \lambda_r^2 \in \mathbb{R} \\ 2)\ \mathrm{Re}\,\lambda > 0 \text{ or } \mathrm{Im}\,\lambda \geq 0 \end{array} \right\}, \quad \lambda_r = \begin{cases} g+1-|r| & \text{if } |r| < g+1 \\ 0 & \text{if } |r| \geq g+1,\ r \equiv g+1 \pmod 2 \\ 1 & \text{if } |r| \geq g+1,\ r \not\equiv g+1 \pmod 2 \end{cases}$$

$$U_2 = \begin{cases} \phi & \text{if } r = 0 \\ \{ m \in \mathbb{Z} \mid m \equiv r+g+1\ (2),\ r-(g+1) \geq m \geq \mathrm{Min}\{r-(g+1), 0\} \} & \text{if } r > 0 \\ \{ m \in \mathbb{Z} \mid m \equiv r+g+1\ (2),\ r+g+1 \leqq m \leqq \mathrm{Max}\{r+g+1, 0\} \} & \text{if } r < 0 \end{cases}$$

$$U_3 = \begin{cases} \{g+1\} & \text{if } r = 0 \\ \phi & \text{if } r \neq 0 \end{cases}$$

となる。G の自明な 1 次元表現は，$g+1 \in U_3$ に対応する．

$\pi \in \hat{G}$ の infinitesimal character を χ_π とすると，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Casimir operator Ω に対して，

$$\chi_\pi(\Omega) = \frac{1}{4(g+2)} \cdot \left\{ \pi^2 + \frac{g}{g+2} \cdot r^2 - (g+1)^2 \right\} \quad \text{for } \pi \in \hat{G}(\delta_r) \subset \mathbb{C}$$

となる。

<u>3)離散系列表現</u>　$\hat{G}_d = \{ \pi \in \hat{G} : 2\text{ 乗可積分} \}$ の Harish-Chandra parametrizationを書き下すと，次のようになる；

$$\mathfrak{b} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \;\middle|\; e = \begin{pmatrix} e_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_g \end{pmatrix} \right\}$$

は，$\mathfrak{g}$ の compact Cartan subalgebra で

$$\nu_j \in \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^* \quad \text{for } j = 0, 1 \cdots g$$

$$\text{s.t.}\quad \nu_0\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} = a - c,\quad \nu_j\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} = e_j \quad \left(e = \begin{pmatrix} e_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_g \end{pmatrix},\ j > 0 \right)$$

とおくと、

$$\Lambda^+ = \left\{ \sum_{j=0}^{g} m_j \nu_j \in \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^* \;\middle|\; 0 \neq m_j \in \mathbb{Z},\ m_0 > m_1 > \cdots > m_g \right\}$$

$$\Lambda^+ \ni \lambda \mapsto \pi_\lambda \in \hat{G}_d : \text{bijective} \quad (\text{Harish-Chandra parametrization})$$

である。G の Haar measure をいで定めたように取れば

$$\text{formal degree of } \pi_\lambda \in \hat{G}_d \quad \text{for } \lambda = \sum_{j=0}^{g} m_j \nu_j \in \Lambda^+$$

$$= \frac{\pi^{g+1}}{2^g \cdot g!} \times (2\pi)^{-(g+1)} \cdot \prod_{0 \leq i < j \leq g} \frac{m_i - m_j}{j - i} \cdot \prod_{j=0}^{g} |m_j|$$

又、Hecht-Schmid [4] により、$\lambda = \sum_{j=0}^{g} m_j \nu_j \in \Lambda^+$ に対して、

$$\pi_\lambda \in \hat{G}_d : \text{integrable} \iff |m_j| > g+1 \quad \text{for } j = 0, 1 \cdots g$$

である。

$r \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\{\lambda \in \Lambda^+ \mid \pi_\lambda \in \hat{G}(S_r)\} \underset{\text{put}}{=} \Lambda^+(S_r)$$

$$= \begin{cases} \phi & \text{if } |r| \leq g+1 \\[2ex] \left\{ \sum_{j=0}^{g} m_j \nu_j \in \Lambda^+ \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 < m_g \leq r - (g+1) \\ m_{g-j} = \frac{1}{2}(m_g + r - (g+1)) + j \quad \text{for } j = 1 \cdots g \end{array} \right\} & \text{if } r > g+1 \\[2ex] \left\{ \sum_{j=0}^{g} m_j \nu_j \in \Lambda^+ \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 > m_0 \geq r + g + 1 \\ m_j = \frac{1}{2}(m_0 + r + g + 1) - j \quad \text{for } j = 1 \cdots g \end{array} \right\} & \text{if } r < -(g+1) \end{cases}$$

又、$\lambda = \sum_{j=0}^{g} m_j \nu_j \in \Lambda^+(S_r)$ に対して、$\pi_\lambda \in \hat{G}(S_r)$ の $\mathbb{C}$ とすると、

$$\pi_\lambda = \begin{cases} m_q & \text{if } r > q+1 \\ m_0 & \text{if } r < -(q+1) \end{cases}$$

となる。

<u>4) Paley-Wiener Theorem</u>　$\mathfrak{g}$ の Killing form は $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = 2(q+2)\mathrm{tr}(XY)$ で，$\theta\cdot X = -X^*$ として，$\mathfrak{g}$ 上の norm を $|X|_\theta^2 = -B_{\mathfrak{g}}(X, \theta\cdot X)$ により定めて，$\mathfrak{g}$ を Eucledian space とする。$\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta\cdot X = -X\}$ とおくと，

$$K \times \mathfrak{s} \ni (k, X) \mapsto k\cdot\exp X \in G : \text{bijective}$$

となり，$G \ni x = k\cdot\exp X(x)$ for $k \in K$, $X(x) \in \mathfrak{s}$ に対して，$\sigma(x) = |X(x)|_\theta$ とする。$f \in C^\infty(G)$, $0 < p \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\nu_{D,r}^p(f) = \sup_{x \in G} (1+\sigma(x))^r \cdot w_0(x)^{-\frac{2}{p}} \cdot |(D\cdot f)(x)| \quad \text{for } \begin{matrix} 0 \leqq r \in \mathbb{R} \\ D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \end{matrix}$$

$\left(w_0(x) = \int_K e^{-\rho H(x)} d_K(k) \right)$ として，

$$\mathcal{C}^p(G) = \{ f \in C^\infty(G) \mid \nu_{D,r}^p(f) < \infty \text{ for } 0 \leqq {}^\forall r \in \mathbb{R}, {}^\forall D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \}$$

とおくと，$\mathcal{C}^p(G) \subset L^p(G)$, $\mathcal{C}^p(G) \subset \mathcal{C}^q(G)$ if $p \leqq q$ である。

$r \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\mathcal{C}^p(G, \delta_r) = \{ f \in \mathcal{C}^p(G) \mid f(kx) = f(xk) = \delta_r(k) f(x) \text{ for } {}^\forall k \in K \}$$

とおく。

$V_{q+1} = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\lambda| \leqq q+1 \}$ とおくと，

$$V_{q+1} \cap \hat{G}_d(\delta_r) = \{ \pi \in \hat{G}_d(\delta_r) : \text{not integrable} \}$$

そこで，

$$\mathcal{F}(r)=\left\{\begin{array}{l}\varphi : V_{g+1}\cup \hat{G}_d(\delta_r)\to \mathbb{C} : \text{map.} \\ \text{s.t. 1)}\ \varphi : \text{holomorphic on } |\mathrm{Re}\,\lambda|<g+1 \\ \quad 2)\ \sup_{|\mathrm{Re}\,\lambda|<g+1}(1+|\lambda|)^{\alpha}\cdot|\varphi^{(n)}(\lambda)|<\infty \text{ for } 0\leq{}^{\forall}\alpha\in\mathbb{R},\ 0\leq{}^{\forall}n\in\mathbb{Z} \\ \quad 3)\ \varphi(-\lambda)=\varphi(\lambda) \text{ for } {}^{\forall}\lambda\in V_{g+1}\end{array}\right\}$$

とおくと，

$$\mathcal{C}'(G,\delta_r)\ni f \overset{\wedge}{\mapsto} \hat{f}\in\mathcal{F}(r) : \text{bijective (Paley-Wiener Theorem)}$$

である。ここで $\lambda\mapsto\lambda\begin{pmatrix}1&0\\&-1\end{pmatrix}$ により $\mathfrak{a}_{g,\mathbb{C}}^{*}=\mathbb{C}$ と同一視して，

$$\hat{f}(\lambda)=\int_G f(x)\cdot\varphi_{\lambda,r}(x)\,d_G(x) \quad \text{for } f\in\mathcal{C}'(G,\delta_r)$$

とおいた (c.f. Trombi[6], Wakayama[7] P603)。

§2. Selberg zeta 関数

以下，$r\in\mathbb{Z}$ を固定して，

$\Gamma\subset G$: torsion-free discrete subgroup s.t. $\Gamma\backslash G$: compact

(χ,Γ) : Γ の有限次ユニタリ表現

とする。

$J_h=\left\{\begin{pmatrix}a_0&&0\\&\ddots&\\0&&a_{g+1}\end{pmatrix}\in G\right\}$ は，G の non-compact Cartan subgroup で，Γ の条件から，$1\neq{}^{\forall}\gamma\in\Gamma$ は hyperbolic (i.e. J_h の元と G-共役) であり，$\Gamma_\gamma=\{x\in\Gamma \mid x\gamma=\gamma x\}$ は cyclic group となる。そこで

$P_\Gamma=\{\{\gamma\}_\Gamma\in \mathrm{Conj}(\Gamma) \mid \Gamma_\gamma=\langle\gamma\rangle\}$

: the set of the primitive hyperbolic conjugacy classes of Γ

$$1 \neq \gamma \in \Gamma \Rightarrow h(\gamma) = \begin{pmatrix} a(\gamma) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \in J_h \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{l} 1)\ \gamma \underset{G}{\sim} h(\gamma) : G\text{-共役} \\ 2)\ |a(\gamma)| > 1 \quad (a(\gamma) \in \mathbb{C}) \end{array}$$

とおく。$\alpha \in P_+$ の root vector を $X_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ として、

$$Ad(h) \cdot X_\alpha = \xi_\lambda(h) \cdot X_\alpha \quad for\ {}^\forall h \in J_h \quad (\xi_\alpha(h) \in \mathbb{C})$$

$$(\text{i.e. } \xi_\lambda(h) = a_i \cdot a_j^{-1} \quad for\ \alpha = \lambda_i - \lambda_j \in P_+,\ h = \begin{pmatrix} a_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{g+1} \end{pmatrix} \in J_h\ )$$

とおいて、

$$\langle P_+ \rangle = \{ \sum_{\alpha \in P_+} m_\alpha \cdot \alpha \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid 0 \leq m_\alpha \in \mathbb{Z} \}$$

$$\xi_\lambda = \prod_{\alpha \in P_+} \xi_\alpha^{m_\alpha} \quad for\ \lambda = \sum_{\alpha \in P_+} m_\alpha \cdot \alpha \in \langle P_+ \rangle$$

$$n(\lambda) = \# \{ (m_\alpha)_{\alpha \in P_+} \mid 0 \leq m_\alpha \in \mathbb{Z},\ \lambda = \sum_{\alpha \in P_+} m_\alpha \cdot \alpha \} \quad for\ \lambda \in \langle P_+ \rangle$$

とおく。

データ (Γ, r, χ) に基く Selberg zeta 関数は、

$$Z_{\Gamma, r}(\chi, s)$$
$$= \prod_{\{\gamma\}_\Gamma \in P_\Gamma} \prod_{\lambda \in \langle P_+ \rangle} \det\left(1 - \chi(\gamma) \cdot \xi_\lambda(h(\gamma)^{-1}) \cdot \left(a(\gamma)/|a(\gamma)|\right)^r \cdot |a(\gamma)|^{-(s+g+1)}\right)^{n(\lambda)}$$
$$for\ Re\, s > Max\{ g+1,\ |r| - (g+1) \}$$

により定義される (Gangolli [3], Wakayama [7])。

trace formula により、$\Xi_{\Gamma, r}(\chi, s) = \frac{d}{ds} \log Z_{\Gamma, r}(\chi, s)$ が全 s-平面に有理型に解析接続され、その pole は全て simple pole で、その位置と residue は次の通り。ここで、§1,2) で定めた同一視 $\hat{G}(S_r) \hookrightarrow \mathbb{C}$ を用いる。

$$n \in \mathbb{Z} \ \text{s.t.}\ n \geq |r| + g + 1,\ n \equiv r + g + 1 \pmod 2$$

$\Rightarrow m(n) = \dim\chi \cdot \mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\cdot d_{\pi_\lambda}$ for $\pi_\lambda \in \hat{G}_d$ s.t. $\lambda = n\nu_0 + \sum_{j=1}^{g}\left(\frac{n+|r|+g+1}{2} - j\right)\nu_j \in \Lambda^+$

d_{π_λ} : formal degree of π_λ

とおく。 $m(n) = m(\pi_\lambda, \mathrm{Ind}_\Gamma^G\chi)$ if $n > g+1-|r|$ 又，常に $m(n) \in \mathbb{Z}$ 。

$|r| > g+1$ のとき

	pole	residue
(A)	$\lambda \in \mathbb{C}$ s.t. $\lambda^2 - \lambda_r^2 < 0,\ \lambda \neq 0$	$m(\lambda, \mathrm{Ind}_\Gamma^G\chi)$
(B)	0	$2\cdot m(0, \mathrm{Ind}_\Gamma^G\chi)$
	$-n \in \mathbb{Z}$ s.t. $1 < n \leqq |r| - (g+1)$, $n \equiv r+g+1 \pmod 2$	$2\cdot m(\pi, \mathrm{Ind}_\Gamma^G\chi)$ for $\pi \in \hat{G}_d(S_r) \subset \mathbb{C}$ s.t. $|\pi| = n$
(C)	$-n \in \mathbb{Z}$ s.t. $n \geqq |r| + g+1$, $n \equiv r+g+1 \pmod 2$	$(-1)^g\cdot 2\cdot m(n)$
	± 1 (only if $r \equiv g \pmod 2$)	$m(\pi, \mathrm{Ind}_\Gamma^G\chi) \pm \dim\chi\cdot\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\cdot d_\pi \in \mathbb{Z}$ for $\pi \in \hat{G}_d(S_r) \subset \mathbb{C}$ s.t. $|\pi| = 1$, d_π : formal degree of π

$0 < |r| \leqq g+1$ のとき　上の (A), (B), (C) に加えて，$|r| < g+1$ のときには，

pole	residue
$\pm(g+1-|r|)$	$m(\pi, \mathrm{Ind}_\Gamma^G\chi)$ for $\pi \in \hat{G}(S_r) \subset \mathbb{C}$ s.t. $|\pi| = g+1-|r|$

$r = 0$ のとき　上の (A), (B), (C) に加えて，

pole	residue
$-(g+1)$	$(-1)^g\cdot 2\cdot m(g+1) + m(\mathbb{1}_\Gamma, \chi)$
$g+1$	$m(\mathbb{1}_\Gamma, \chi)$

よって，$Z_{\Gamma,r}(\chi,s)$ は全 s-平面に有理型に解析接続され，その zero, pole の位置と order は上の表から与えられる．更に，次の関数等式が成り立つ；

$$Z_{\Gamma,r}(\chi,-s)=Z_{\Gamma,r}(\chi,s)\cdot\exp\left\{\dim\chi\cdot\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\cdot\int_0^s\mu_r(\sqrt{-1}s)\,ds\right\}$$

ここで

$$\mu_r(t)=\frac{\pi}{(2^g\cdot g!)^2}\cdot\frac{t}{2}\cdot\prod_{j=1}^{g}\left\{\left(\frac{t}{2}\right)^2+\left(\frac{r+g+1}{2}-j\right)^2\right\}\times\begin{cases}\tanh\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) & : r\equiv g\ (2)\\ \coth\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) & : r\not\equiv g\ (2)\end{cases}$$

は，Planchrel measure の weight function である。

$\hat{G}_d(\delta_r)$ から生ずる $Z_{\Gamma,r}(\chi,s)$ の zero は，critical strip 内の trivial zero である。

§3. Selberg zeta 関数の特殊値.

§2 の記号を用いる。$n\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$J_n(s)=(2\pi)^{-1}\cdot\{4(g+2)\}^s\cdot\int_0^\infty(x^2+n^2)^{-s}\cdot\mu_r(x)\,dx$$

は，$\mathrm{Re}\,s>g+1$ で絶対収束し，全 s-平面に有理型に解析接続され，$s\neq1,2,\cdots g+1$ で正則，$s=1,2,\cdots g+1$ に高々 simple pole をもつ．

$n_0=\mathrm{Max}\{g+1,\ |r|-(g+1)\}$，$u_0=\dfrac{1}{4(g+2)}\cdot\left\{n_0^2+\dfrac{g}{g+2}r^2-(g+1)^2\right\}$ とする。

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Casimir operator Ω と $u\geq u_0$ に対して，$\Omega-u$ を δ_r-isotypic component $(\mathrm{Ind}_\Gamma^G\chi)(\delta_r)$ に作用させたものを $\Delta_{r,u}$ として，$\Delta_{r,u}$ の functional determinant を $\det\Delta_{r,u}$ と書く。即ち，$\chi_\pi(\Omega-u)\leq0$

for $\forall \pi \in \hat{G}(S_r)$ で（χ_π = infinitesimal character of π）,

$$T(s, \Delta_{r,u}) = \sum_{\substack{\pi \in \hat{G}(S_r) \\ \text{s.t. } \chi_\pi(\Omega - u) \neq 0}} m(\pi, \mathrm{Ind}_\Gamma^G \chi) \cdot |\chi_\pi(\Omega - u)|^{-s}$$

は，$\mathrm{Re}\, s \gg 0$ で絶対収束し，全 s-平面へ有理型に解析接続され，$s=0$ で正則になるので，$\det \Delta_{r,u} \underset{\mathrm{df}}{=} \exp(-T'(0, \Delta_{r,u}))$ とする。このとき，次の定理が成り立つ；

__定理 1__ $n_0 < n \in \mathbb{Z}$ に対して，$u = \frac{1}{4(g+2)} \cdot \{n^2 + \frac{g}{g+2} \cdot r^2 - (g+1)^2\}$ とおくと，$Z_{\Gamma,r}(\chi, n) = R \cdot P$ となる。ここで

$$P = \exp\{J_n'(0) \cdot \dim \chi \cdot \mathrm{vol}(\Gamma \backslash G)\}$$

$$R = (\det \Delta_{r,u}) \cdot \prod_{\pi \in \hat{G}_d(S_r)} |\chi_\pi(\Omega) - u|^{-\dim \chi \cdot \mathrm{vol}(\Gamma \backslash G) \cdot d_\pi}$$

__定理 2__ $r=0$ のとき，$s = g+1$ は $Z_{\Gamma,r}(\chi, s)$ の $m(\mathbb{1}_\Gamma, \chi)$ 位の zero で，

$$Z_{\Gamma,r}(\chi, s) = a \cdot (s-(g+1))^{m(\mathbb{1}_\Gamma, \chi)} + \cdots$$

とおくと，

$$a = R \cdot P \qquad \begin{aligned} R &= \det \Delta_{0,0} \\ P &= (2g+2)^{m(\mathbb{1}_\Gamma, \chi)} \cdot \exp\{J_{g+1}'(0) \cdot \dim \chi \cdot \mathrm{vol}(\Gamma \backslash G)\} \end{aligned}$$

__証明__ Fried [2] と同様の議論とする。それは，次のような議論を含む。$f \in \mathcal{C}'(G, S_r)$ に対して，trace formula は

$$\sum_{\pi \in \hat{G}(\delta_r)} m(\pi, \mathrm{Ind}_\Gamma^G \chi) \cdot \hat{f}(\pi) = \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \in \mathrm{Conj}(\Gamma)} \mathrm{tr}\,\chi(\gamma) \cdot \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \cdot \int_{G_\gamma \backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\, d\dot{x}$$

と書けるが，f として，熱方程式 $\Omega f = \frac{\partial f}{\partial t}$ $(t>0)$ の解を取る．

$\pi \in \hat{G}(\delta_r)$ で Fourier 変換すれば，$\frac{\partial \hat{f}(\pi)}{\partial t} = \chi_\pi(\Omega) \cdot \hat{f}(\pi)$ だから，

$\hat{f}(\pi) = \alpha(\pi) \cdot \exp(\chi_\pi(\Omega) \cdot t)$ となるが，Paley-Wiener Theorem より，

$\exists f_t \in \mathcal{C}'(G, \delta_r)$ s.t. $\hat{f}_t(\pi) = \exp(\chi_\pi(\Omega) \cdot t)$ for $\forall \pi \in \hat{G}(\delta_r)$, $\forall t > 0$.

このとき，

$$\text{trace formula の左辺} \times e^{-ut} = \sum_{\pi \in \hat{G}(\delta_r)} m(\pi, \mathrm{Ind}_\Gamma^G \chi) \cdot \exp\{\chi_\pi(\Omega - u) \cdot t\}$$

$$= \underbrace{\sum_{\chi_\pi(\Omega-u)=0}}_{\text{finite sum}} + \underbrace{\sum_{\chi_\pi(\Omega-u)<0} m(\pi, \mathrm{Ind}_\Gamma^G \chi) \cdot \exp\{\chi_\pi(\Omega-u) \cdot t\}}_{\overset{\text{put}}{=}\, H(t)} \qquad (t>0)$$

として，$H(t)$ を t について Mellin 変換すると

$$\int_0^\infty H(t) \cdot t^{s-1}\, dt = \Gamma(s) \cdot T(s, \Delta_{r,u})$$

となる． $T'(0, \Delta_{r,u})$ を trace formula の右辺から計算して，上の定理を得る．

§4. Dedekind zeta 関数の場合．

K を有限次代数体，$\zeta_K(s)$ を K の Dedekind zeta 関数，$D = D(K/\mathbb{Q})$ を K の絶対判別式としたとき，explicit formula と呼ばれる，次のような等式が成り立つ（Weil [10]）；

$$\sum_{\substack{\zeta_K(w)=0 \\ 0<\mathrm{Re}\,w<1}}' \Phi(w) = F(0)\cdot\log|D| + 2\cdot\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cdot \cosh\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$-\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{n>0} N(\mathfrak{p})^{-\frac{n}{2}}\cdot\log N(\mathfrak{p})\cdot\left\{F(\log N(\mathfrak{p}^n)) + F(-\log N(\mathfrak{p}^n))\right\}$$
$$+\sum_{v|\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{-1}x\right)\cdot \mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma_v'}{\Gamma_v}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{-1}x\right)\right)dx$$

ここで

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{(s-\frac{1}{2})x}dx, \quad \Gamma_v(s) = \begin{cases} \pi^{-\frac{s}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) & \text{if } v = \text{real place} \\ (2\pi)^{1-s}\cdot\Gamma(s) & \text{if } v = \text{complex place}\end{cases}$$

であり，$\sum'$ は $\zeta_K(s)$ の critical zero w 上の，重複度を込めた，和。

F として，熱方程式 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial t}$ の基本解

$$F(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{t}\right\} \quad (x\in\mathbb{R},\ t>0)$$

を取れば，$\Phi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{-1}u\right) = e^{-u^2t}$。よって，

$$\text{explicit formula の左辺} \times e^{-\frac{t}{4}} = \sum_{\substack{\zeta_K(w)=0 \\ 0<\mathrm{Re}\,w<1,\ w=\frac{1}{2}+\sqrt{-1}u}} e^{-(\frac{1}{4}+u^2)\cdot t} \overset{\text{put}}{=} H(t)$$

$$\int_0^\infty H(t)\cdot t^{s-1}dt = 2\cdot\Gamma(s)\cdot T(s,\Delta_K), \quad T(s,\Delta_K) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{\substack{\zeta_K(w)=1 \\ 0<\mathrm{Re}\,w<1,\ w=\frac{1}{2}+\sqrt{-1}u}}\left(\frac{1}{4}+u^2\right)^{-s}$$

$T(s,\Delta_K)$ は $\mathrm{Re}\,s>\frac{1}{2}$ で絶対収束し，全 s-平面へ有理型に解析接続され，$s=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\cdots$ に高々 simple pole をもつ以外には正則である（証明は Delsarte [1] と同様）。$T'(0,\Delta_K)$ を explicit formula の右辺から計算して，次の等式を得る；

$$T'(0,\Delta_K) = -\log \operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_K(s) - \frac{1}{4}\log|D| + J'(0)$$

ここで

$$J(s)=\sum_{v|\infty} J_v(s) \qquad J_v(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{4}+x^2\right)^{-s}\cdot \mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma_v'}{\Gamma_v}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{-1}x\right)\right)dx.$$

そこで，$\det\Delta_K \underset{\mathrm{def}}{=} \exp(-T'(0,\Delta_K))$ とおくと，冒頭に示した $\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_K(s)$ の公式から，次の定理を得る；

<u>定理 3</u>　$2^{r_1}\cdot(2\pi)^{r_2}\cdot R(K)\cdot\frac{h}{w}\cdot|D|^{-\frac{1}{4}} = (e^{J_1'(0)})^{r_1}\cdot(e^{J_2'(0)})^{r_2}\cdot\det\Delta_K$

ここで，$J_1=J_{\mathrm{real}}$，$J_2=J_{\mathrm{complex}}$，$R(K)=K$ の regulator.

§5. 結論.

定理3 の両辺を，$K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ の構造のみで決る部分とそうでない部分とに分ければ，次のような対応関係が成り立つ；

$$2^{r_1}\cdot(2\pi)^{r_2} \longleftrightarrow (e^{J_1'(0)})^{r_1}\cdot(e^{J_2'(0)})^{r_2},\quad R(K)\cdot\frac{h}{w}\cdot|D|^{-\frac{1}{4}} \longleftrightarrow \det\Delta_K \qquad (*)$$

一方，比例式

Dedekind zeta 関数 : explicit formula

= Selberg zeta 関数 : trace formula

が成り立つから，定理1,2,3 とその証明を比較して，対応関係 (*) から，定理1.2 において，Selberg zeta 関数の特殊値が，regulator R と period P の積に分解されたと解釈するのが，自然である。

References.

[1] Delsarte,J.: Formules de Poisson avec reste. J.Anal.Math. 18 (1960) 419-431

[2] Fried,D.: Analytic torsion and closed geodesics on hyperbolic manifolds. Inv.Math. 84 (1986) 523-540

[3] Gangolli,R.: Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one. Illinois J.Math. 21 (1977) 1-42

[4] Hecht,H.-Schmid,W.: On integrable representations of a semisimple Lie groups. Math.Ann. 220 (1976) 147-149.

[5] Kraljević,H.: Representations of the universal covering group of thr group SU(n,1). Glasnik Matematicki 8 (1973) 22-72

[6] Trombi,P.C.: Harmonic analysis of $C^p(G,F)$ $(1 \leq p<2)$. J.Funct.Anal. 40 (1981) 84-125

[7] Wakayama,M.: Zeta function of Selberg's type for compact quotient of SU(n,1) $(n \geq 2)$. Hiroshima Math.J. 14 (1984) 597-618

[8] Wakayama,M.: Zeta functions of Selberg's type associated with homogeneous vector bundles. Hiroshima Math.J. 15 (1985) 235-295

[9] Warner,G.: Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I,II Springer-Verlag (1972)

[10] Weil,A. : Sur les "formules explicites" de la theorie des nombres premiers. Comm.Sem.Math.Univ. de Lund, Medd. Lunds Univ. Math.Sem. Tome supplementaire (1952) 252-265