数理解析研究所講究録
631巻 1987年 150-168


# Non-holomorphic modular forms について

神戸大・理 髙田一郎 ( Ichiro Takada )
神戸大・理 平松豊一 ( Toyokazu Hiramatsu )

この稿では、Non-holomorphic modular forms に関するいくつかの話題についての解説を行う。

まず、記号と定義について;

$\Gamma$ : 第1種Fuchs群,

$\Gamma \ni -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $k \in \mathbb{R}$,

$\chi$ : multiplier of weight $k$ , i.e.,

$$\chi\left(-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{ik\pi},$$

$$\chi(\gamma_1\gamma_2)(j_{\gamma_1\gamma_2}(z))^k = (j_{\gamma_1}(z))^k (j_{\gamma_2}(z))^k \chi(\gamma_1)\chi(\gamma_2), \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma.$$

ただし、$j_\gamma(z) = cz+d$ , $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\Delta_k := y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - iky\frac{\partial}{\partial x}.$$

上半平面 H 上の関数 f(z) が non-holomorphic modular forms であるとは、

$$\Delta_k f = -\lambda f \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

$$f(\gamma z) = e^{ik\arg(cz+d)}\chi(\gamma) f(z) \quad , \quad {}^{\forall}\gamma \in \Gamma ,$$

$$(+ \text{ polynomial growth at infinity }).$$

特に以下では、

$$k = 0 \quad : \quad \Delta_0 = \Delta .$$

とし、断わりのない限り

$$\Gamma = \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

としておく。

また、$f$ : cusp form, eigenfunction of the Hecke operators, i.e.,

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} a_n \sqrt{y}\, K_{ir}(2\pi |n| y)\, e^{2\pi i n x} ,$$

$$K_s(y) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{2}(u+\frac{1}{u})} u^{s-1} du \quad , \quad \lambda = \frac{1}{4} + r^2 .$$

のとき、興味深い次の予想がなされている。

<u>Ramanujan-Petersson Conjecture</u>

$$|a_n| \leqq |a_1|\, d(n), \qquad \text{ただし、} \quad d(n) = \sum_{0<d|n} 1 .$$

<u>Selberg Conjecture</u>

$f$ の first eigenvalue $\lambda_1 = \lambda_1(\chi)$ に対し、

$$\lambda_1 \geqq \frac{1}{4} .$$

前者は、既に証明されている holomorphic case に関する主張の、non-holomorphic case への類推であり、後者は実2次体の

類数に関するGauss-Hasseの予想や、zeta関数等の零点分布にも関連している。([2])

本稿では、これらの予想に関連する結果の解説を通して、non-holomorphicの世界の一部を俯瞰する。

## §1. 特別な群に対するSelberg Conjectureの証明

いくつかの特別な群$\Gamma$に対しては、既に$\lambda_1 \geq \frac{1}{4}$が示されており、証明には大きく分けて次の様なアプローチの方法が知られている。

(a) the Maass method,

(b) the $L_2$ method (Roelcke, Vignéras),

(c) the Weyl method (Selberg, Buser).

以下、これらの方法による実際の証明を追ってみることにしよう。

### 1.1 $\Gamma=\Gamma(1)$に対する証明 (the Maass method)

$s=\frac{1}{2}+ir$, $\lambda=s(1-s)$ として、

$$f(z)=\sum_{n\neq 0} c_n W_s(2\pi|n|y)e^{-2\pi|n|y}e^{2\pi inx},$$

ただし、$W_s(y)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}\left(1+\frac{u}{2y}\right)^{s-1}du$,

$$\left(c_n=\frac{1}{2}|n|^{-\frac{1}{2}}a_n\right).$$

とおく。

ここで、もし　$\lambda = \lambda_1 \leqq \frac{1}{4}$　であるとすると、

$$\frac{1}{2} \leqq s \leqq 1.$$

$W_s(y)$ は減少関数で、　$0 < W_s(y) < W_s(\infty) = 1.$

さらに、$\frac{1}{2} \leqq s \leqq 1$ より、

$$W_s(y) \geqq 1 - \frac{1}{8y}.$$

今、$z = x + iy$，$y \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$　において、$|f(z)|$ が $z = z_0 = x_0 + iy_0$ で最大値 $M$ をとるものとする。

$0 < \rho < 1$ に対し、

$$|C_n| W_s(2\pi|n|\rho y_0) e^{-2\pi|n|\rho y_0}$$
$$= \left| \int_0^1 f(x + i\rho y_0) e^{-2\pi i n x} dx \right| \leqq M.$$

従って、

$$M = |f(z_0)| \leqq \sum_{n \neq 0} \frac{M \cdot W_s(2\pi|n|\rho y_0) e^{-2\pi|n| y_0}}{W_s(2\pi|n|\rho y_0) e^{-2\pi|n|\rho y_0}}$$
$$\leqq \sum_{n \neq 0} M \cdot \frac{e^{-2\pi|n|y_0(1-\rho)}}{1 - \frac{1}{16\pi\rho y_0}}$$
$$\leqq \frac{2M}{\left(1 - \frac{1}{8\sqrt{3}\pi\rho}\right)\left(e^{\sqrt{3}\pi(1-\rho)} - 1\right)}.$$

特に、$\rho = \frac{3}{\pi}$ ととると、

$$\frac{2}{\left(1 - \frac{1}{8\sqrt{3}\pi\rho}\right)\left(e^{\sqrt{3}\pi(1-\rho)} - 1\right)} = 0.20\cdots < 1.$$

$$\therefore M = 0 \quad : \quad f(z) \equiv 0.$$

## 1.2 $\Gamma=\Gamma(N)$, $N\leqq 7$ に対する証明 ( the $L_2$ method )

$$\Gamma=\Gamma(N)=\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod . N \right\},$$

$\|f\|=1$ とすると.

$$\lambda = (-\Delta f, f) = \iint_{D_N} \left\{ \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 \right\} dx\,dy ,$$

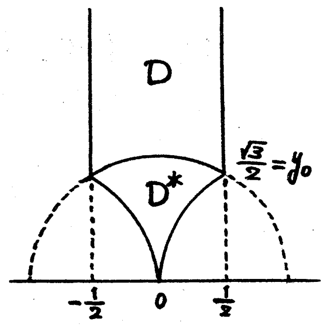
ただし、$D_N$ は $\Gamma(N)$ の基本領域。

さて、

$$PSL(2,\mathbb{Z})/\bar{\Gamma} = \bigcup_i \gamma_i \bar{\Gamma},$$

$$f(\gamma_i(z)) = f_i = \sum_{n\neq 0} a_n^{(i)}(y)\, e^{2\pi i n x/N}.$$

とおくと、




$y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ : D の height

$$2\lambda = \iint_{D+D^*} \left\{ \sum_i \left( \left|\frac{\partial f_i}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f_i}{\partial y}\right|^2 \right) \right\} dx\,dy$$

$$> \iint_{D+D^*} \sum_i \left|\frac{\partial f_i}{\partial x}\right|^2 dx\,dy$$

$$> \int_{y_0}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_i \left|\frac{\partial f_i}{\partial x}\right|^2 dx\,dy$$

$$= \int_{y_0}^{\infty} \sum_{n\neq 0} \frac{4\pi n^2}{N^2} \sum_i |a_n^{(i)}(y)|^2 dy$$

上式では. Parseval の公式 : $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f|^2 dx = \sum_{n\neq 0} |a_n(y)|^2$ を用いた。

$$> \frac{4\pi}{N^2}\cdot y_0^2 \int_{y_0}^{\infty} \sum_{n\neq 0} \sum_i |a_n^{(i)}(y)|^2 \frac{dy}{y^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 y_0^2}{N^2} \int_{y_0}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_i |f_i|^2 \frac{dx\,dy}{y^2} \qquad \leftarrow \text{Parseval}$$

$$> \frac{4\pi^2 y_0^2}{N^2} \iint_D \sum_i |f_i|^2 \frac{dxdy}{y^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 y_0^2}{N^2} \|f\| = \frac{3\pi^2}{N^2} .$$

故に、 $\lambda > \dfrac{3\pi^2}{2N^2}$ .

従って、 $N \leqq 7$ ならば、 $\lambda > \dfrac{1}{4}$ .

## 1.3 $\Gamma = \Gamma_0(N)$ , $N \leqq 17$ と Hecke triangle group に対する証明 ( the Weyl method & the $L_2$ method , [1], [5] )

まず、上半平面 $H$ 上の関数 $f$ が domain（滑らかな単純閉曲線の内部）$D$ 上の境界条件を満足するとは、次のうち 1 つが成立することである。

(i) $\partial D$ 上で $f=0$.（Dirichlet condition）

(ii) ベクトル grad $f$ は、境界の方向を指している
(i.e. 法線方向の導関数： $\dfrac{\partial f}{\partial n} = 0$ on $\partial D$)

(iii) $\partial D$ は有限個の弧に分けられ、それらは 2 つずつ対になっていて合同で、合同な 2 つの弧の対応する点での $f$ の値は等しい。（Periodic condition）

(iv) $\partial D$ は (i), (ii) または (iii) のどれか 1 つが成立する有限個の弧に分かれる。

このとき、$f$ が domain $D$ 上の eigenfunction とは、次の (i) (ii) (iii) を満足する関数のことである。

(i) div grad $f = -\lambda f$ on $D$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ ,

(ii) $f$ は $D$ 上の境界条件を満足する。

(iii) $\iint_D f^2 d\mu < \infty$ （ただし、$d\mu = \frac{dxdy}{y^2}$）.

例えば、Eisenstein 級数は domain $D = \Gamma(1)\backslash H - \{\infty\}$ 上の eigenfunction である。 Divergence theorem （Gauss の定理）より、$f$ が $D$ 上の境界条件を満足する関数のとき、

$$\iint_D |\mathrm{grad}\, f|^2 d\mu = -\iint_D f \,\mathrm{div}\,\mathrm{grad} f\, d\mu .$$

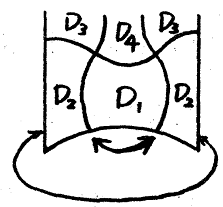
特に、$f$ が $D$ 上の eigenfunction のときは、

$$\iint_D |\mathrm{grad}\, f|^2 d\mu = \lambda \iint_D f^2 d\mu .$$

今、$f$ を上半平面上の関数とするとき、$f=0$ となる曲線を nodal line、nodal line の内部を nodal domain という。このとき、次の定理が成立する。

（Courant's Nodal Line Theorem）

Periodic boundary condition のある domain $D$ での eigenfunction の nodal line, nodal domain は $\partial D$ において対応する部分が接合される。

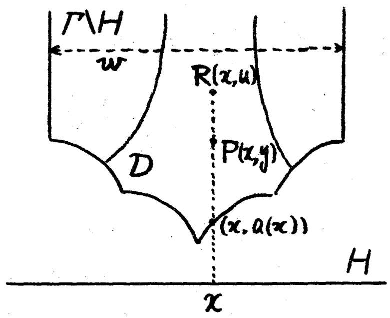



さて、話を Selberg conjecture の方へ戻そう。

$\Gamma = \Gamma_0(N)$, $D$ を $\Gamma\backslash H$ 内の nodal domain, $f(z)$ を $D$ 上の eigenfunction, $f(z) = f(x, y)$ $[z = x + iy]$ の Fourier 展開を、

$$\sum_{n\neq 0} a_n(y)\, e^{2\pi i n x/w} \qquad (\text{ただし. } w : \Gamma\backslash H \text{ の width }).$$

とする。また、




$$a = a(x) = \min_{x+iy\in D} y ,$$

点 $P$, $R$ を右図の様におくと、

$$f(x,y) = f(x,u) - \int_y^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,v)\,dv$$

従って、

$$f(x,y)^2 \quad \left(1+\frac{1}{k}\right) f(x,u)^2 + (1+k)\left\{\int_y^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,v)\,dv\right\}^2 \quad (k>0),$$

さらに、

$$\left\{\int_y^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,v)\,dv\right\}^2 \leq \int_y^u h(v)\,dv \int_y^u \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,v)\right|^2 \frac{dv}{h(v)} .$$

ここで、

$$h(v) = \begin{cases} v-a & (a \leq v \leq 2a), \\ a & (2a \leq v), \end{cases} \qquad k = \frac{\frac{7}{8}a^2}{y^2-\frac{7}{8}a^2} .$$

とおくと、上の2つの不等式より、

$$(*) \quad \int_a^{2a} \frac{f(x,y)^2}{y^2}\,dy \leq \int_a^{2a} \frac{8y^2}{7a^2} f(x,u)^2 \frac{dy}{y^2}$$
$$+ \int_a^{2a} \frac{y^2}{y^2-\frac{7}{8}a^2}\left(a(u-2a)+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}(y-a)^2\right)\int_y^u \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,v)\right|^2 \frac{dv}{v-a}\frac{dy}{y^2}.$$

右辺第2項の積分の順序を交換すると、

$$\int_{v=a}^{2a} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,v)\right|^2 \int_{y=a}^{v} \frac{a(u-\frac{3a}{2})-\frac{1}{2}(y-a)^2}{y^2-\frac{7}{8}a^2}\,dy\,\frac{dv}{v-a} \quad \cdots\cdots ①$$

$$+\int_{v=2a}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,v)\right|^2 \int_{y=a}^{u^{-1}(v)} \frac{a(u-\frac{3a}{2})-\frac{1}{2}(y-a)^2}{y^2-\frac{7}{8}a^2}\,dy\,\frac{dv}{v-a} . \quad \cdots\cdots ②$$

ここで、$y$ の被積分関数を constant 4 にすると、

$$u = u(y) = \frac{3}{2}a + \frac{(y-a)^2}{2a} + \frac{4}{a}\left(y^2 - \frac{7}{8}a^2\right).$$

従って、①式は、

$$4\int_a^{2a} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 dv.$$

また、$u(v) - v$ は $v \geqq a$ で増加 より $\dfrac{u^{-1}(v) - a}{v - a} < 1$ よって、

$$(②式) < 4\int_{2a}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 dv.$$

まとめて、(*)式右辺第2項は、

$$< 4\int_a^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,v)\right|^2 dv.$$

次に、(*)式右辺第1項は、

$$\frac{8}{7a^2}\int_a^{2a} f(x,u)^2 dy \leqq \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{7a^2}\int_a^{2a} f(x,u)^2 \frac{9y-a}{a} dy$$

$$= \frac{1}{7a^2}\int_{2a}^{\frac{29}{2}a} f(x,u)^2 du$$

$$\leqq \frac{1}{7a^2}\int_{2a}^{\infty} f(x,u)^2 du.$$

以上まとめて、

$$\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\int_a^{\infty} f^2 d\mu = \iint_a^{2a} f^2 \frac{dxdy}{y^2} + \iint_{2a}^{\infty} f^2 \frac{dxdy}{y^2}$$

$$< \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\left[\frac{1}{7a^2}\int_{2a}^{\infty} f^2 dy + 4\int_a^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,v)\right|^2 dv\right]dx + \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\frac{1}{4a^2}\int_{2a}^{\infty} f^2 dydx$$

$$= \iint_{2a}^{\infty}\frac{11}{28a^2} f^2 dydx + \iint_a^{\infty} 4\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 dydx$$

$$\leqq \frac{w^2}{4\pi^2}\iint_{2a}^{\infty}\frac{11}{28a^2}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 dydx + 4\iint_a^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 dydx$$

$a = a(x) \geqq a_0 = \sqrt{3}/2$ より

$$\leqq \max\left(\frac{11w^2}{112\pi^2 a_0^2}, 4\right)\iint_a^{\infty}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)dydx$$

$$= \max\left(\frac{11w^2}{112\pi^2 a_0^2}, 4\right) \iint_a^\infty |\mathrm{grad}\, f|^2 d\mu .$$

故に、

$$\lambda > \frac{1}{\max\left(\frac{11w^2}{112\pi^2 a_0^2}, 4\right)} .$$

即ち、

$$\frac{11w^2}{112\pi^2 a_0^2} < 4 \quad \text{ならば} \quad \lambda > \frac{1}{4} .$$

$w \leqq N$ であったから、

$$N \leqq 17 \quad \text{ならば} \quad \lambda > \frac{1}{4} .$$

Hecke triangle group :

$$\Gamma = \Gamma_q = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2\cos\frac{\pi}{q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle , \quad q \geqq 3 \ (q \in \mathbb{Z}) ,$$

の場合も、Nodal line に関する理論を用いて、上と同様の方法で Sarnak により

$$\lambda_1(1) > \frac{1}{4}$$

が示されている。

<u>Remark</u>

Moreno は、$\Gamma_0(148)$ の cusp form で、$\lambda_1(\chi) = \frac{1}{4}$ となるものを構成している。

## §2. Selberg conjecture と Ramanujan-Petersson conjecture の関係について

Selberg conjecture は、Ramanujan-Petersson conjecture の無限素点での内容であると解釈することができる。それは、holomorphic case (Satake [7]) と、non-holomorphic case (Langlands [4]) に分けて成されている。まず、holomorphic case から解説することにしよう。

### 2.1 Zonal spherical functions

$G$ : locally cpt. unimodular group, $K$ : cpt. subgroup of $G$ とし、

$L = L(G,K)$ : cpt. support をもつ $G$ 上の複素数値連続関数 $\phi$ の成す algebra (convolution が積) で、

$\phi(kgk') = \phi(g)$ $[{}^\forall k, k' \in K, {}^\forall g \in G]$ なるもの。

$L$ : commutative と仮定する。

<u>Def.</u> $\omega$ : zonal spherical func. on $G$ (relative to $K$) とは、

$\omega$ : $G$ 上の複素数値関数で、$\omega(1) = 1$.

$\omega(kgk') = \omega(g)$, ${}^\forall k, k' \in K$, ${}^\forall g \in G$.

${}^\forall \phi \in L$, $\phi * \omega = \lambda_\phi \cdot \omega$.

となるもの。

$L \ni \phi \longrightarrow \lambda_\phi \in \mathbb{C}$ : ring homomorphism であって、

$$\lambda_\phi = \hat{\omega}(\phi) = \int_G \phi(g)\,\omega(g^{-1})\,dg$$

と書くと、$\omega$ より一意的に $\hat{\omega}$ が定まる。

<u>*Def.*</u> $\Omega=\Omega(G,K)$ : zonal spherical func. (rel. to $K$) 全体の成す集合。

$\Omega^+$ : positive definite zonal spherical func. 全体の成す集合。

<u>Lemma</u> ([6] 参照) $\omega\in\Omega^+$, $\phi\in L$ のとき,

$\phi$ : self-adjoint $\Longrightarrow$ $\hat{\omega}(\phi)\in\mathbb{R}$,

$\phi$ : real-non-negative $\Longrightarrow$ $|\hat{\omega}(\phi)|\leqslant\hat{\mathbf{1}}(\phi)$.

以下特に,

$$G=PL(2,\mathbb{Q})=GL(2,\mathbb{Q})/center$$

として,

$$G_p=PL(2,\mathbb{Q}_p),$$

$$K_p=\begin{cases} O(2)/\{\pm1\} & \text{if } p=\infty, \\ GL(2,\mathbb{Z}_p)/center & \text{if } p<\infty, \end{cases}$$

$A_p$ : $\left\{\begin{pmatrix}\xi_1 & 0\\ 0 & \xi_2\end{pmatrix}\right\}$ の $G_p$ 内の image,

$N_p$ : $\left\{\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ の $G_p$ 内の image.

とおくと、岩沢分解と elementary divisor decomposition より,

$$G_p=K_pA_pN_p=K_pA_pK_p.$$

さて, $\alpha$ を $A_p$ の (quasi-) character として. $G$ 上の複素数値関数 $\phi$ で,

$$\begin{cases} \phi(gan)=\alpha(a)\phi(g), & {}^\forall a\in A_p,\ g\in G_p,\ n\in N_p, \\ \|\phi\|=\int_K|\phi(k)|^2dk<\infty. \end{cases}$$

を満足するもの全体を $\mathfrak{H}^{\alpha}$ とすると、

$$T_{g_1}^{\alpha}(\phi)(g) = \phi(g_1^{-1}g) \quad , \quad \phi \in \mathfrak{H}^{\alpha},$$

によって $G_p$ の表現 $T_{g_1}^{\alpha}(\phi)$ が得られる。

ここでもし、 $\alpha|_{A_p \cap K_p} = 1$ であれば、

$$\alpha(a) = \left|\frac{\xi_1}{\xi_2}\right|_p^{s-\frac{1}{2}},$$

ただし、 $s \in \mathbb{C}$ は $mod.\ \frac{2\pi i}{\log p}$ for $p<\infty$ できまる。

が成り立ち、さらにこの場合

$$\psi_{\alpha}(kan) = \alpha(a) \ , \quad k \in K_p\ ,\ a \in A_p\ ,\ n \in N_p,$$

とおくと、$\psi_{\alpha}$ は $\mathfrak{H}^{\alpha}$ の $K_p$-不変な unit vector となり、対応する zonal spherical function は、

$$\omega_s(g) = \langle \psi_{\alpha}, T_g^{\alpha}\psi_{\alpha} \rangle = \int_K \psi_{\alpha}(g^{-1}k)\,dk \tag{2.1}$$

となる。 上の準備の下で、次の結果が得られる。([6])

<u>Theorem</u>

- $L(G_p, K_p)$ は可換。
- $\Omega_p = \Omega(G_p, K_p) = \{\omega_s \mid s \in \mathbb{C}\}$ であって、

$$\omega_s = \omega_{s'} \iff \begin{cases} s' \equiv \pm s \quad (mod.\ \frac{2\pi i}{\log p}) & \text{for } p<\infty, \\ s' = \pm s & \text{for } p=\infty. \end{cases}$$

- $$\Omega_p^+ = \begin{cases} \{\omega_s \mid Re\, s=0\} \cup \{\omega_s \mid -\frac{1}{2} \leq Re\, s \leq \frac{1}{2}\ ,\ Im\, s = \frac{n\pi i}{\log p} \ (n \in \mathbb{Z})\}\ , & p<\infty, \\ \{\omega_s \mid Re\, s=0\} \cup \{\omega_s \mid -\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{1}{2}\}\ , & p=\infty. \end{cases}$$

この定理より、 $\omega_s \in \Omega_p^+$ のとき

(i) $p < \infty$ ならば

$\tau_p$ : $K_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_p$ の特性関数とすれば (2.1) より、

$$\hat{\omega}_s(\tau_p) = p^{\frac{1}{2}}(p^s + p^{-s}).$$

さらに、Lemma より、

$$\hat{\omega}_s(\tau_p) \in \mathbb{R} \text{ かつ } |\hat{\omega}_s(\tau_p)| \leq \hat{\mathbf{1}}(\tau_p) = 1 + p.$$

(ii) $p = \infty$ ならば、

$\Delta$ : 上半平面 $H = G_\infty / K_\infty$ 上の Laplacian のとき、

$$\Delta \omega_s = (s^2 - \tfrac{1}{4}) \omega_s.$$

従って、 $s$ : 純虚数 $\Rightarrow \lambda > \frac{1}{4}$.

上述の事は、positive definite な zonal spherical function を媒介に、 $p<\infty$ の場合が Ramanujan - Petersson conjecture と、 $p=\infty$ の場合が Selberg conjecture と関連する事を示唆している。

## 2.2 2つの予想の定式化

上の内容を参考にして、Ramanujan - Petersson conj. と Selberg conj. の（同時）定式化を行う。

$G = PL(2, \mathbb{Q})$,

$G_{\mathbb{A}} = \prod_p' G_p$ を $G$ に対応する adèle 群,

$G_{\mathbb{Q}}$ : $G_{\mathbb{A}}$ の離散部分群 で $vol(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}) < \infty$ なるもの、

$$K_0 = \prod_{p<\infty} K_p ,$$

とおく。

今、偶数 $\nu$ に対し、

$$K_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} \Big/ \{\pm 1\}$$

の character $\chi_\nu$ を次で決める。

$$\chi_\nu(k) = e^{\nu i \theta} \quad , \quad k \in K_\infty .$$

また

$$L_\infty^{(\nu)} = L^{(\nu)}(G_\infty , K_\infty)$$

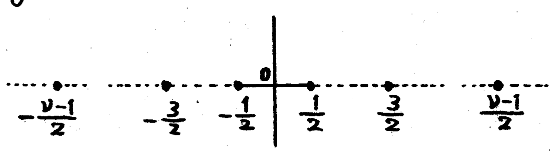
を、次の条件を満足する cpt. support をもつ $G_\infty$ 上の関数 $\phi$ 全ての成す algebra とする。

$$\phi(kgk') = \phi(g)\chi_\nu(k)\chi_\nu(k') \quad \text{for} \quad k, k' \in K_\infty ,\ g \in G_\infty .$$

前節における $\Omega_\infty$ の定義において、$L_\infty$ を $L_\infty^{(\nu)}$ にとりかえたものを $\Omega_\infty^{(\nu)}$、そのうち positive definite なもの全体のなす集合を $\Omega_\infty^{(\nu)+}$ とおくと、$\omega \in \Omega_\infty^{(\nu)}$ に対し、

$$\mathcal{C}\omega = -\lambda\omega , \quad \text{ただし } \mathcal{C} \text{ は } G_\infty \text{ の Casimir operator.}$$

となり、$\omega$ を $s \in \mathbb{C}$（ただし、$\lambda = \frac{1}{8} - \frac{s^2}{2}$）によって parametrize できる。さらに、$\Omega_\infty^{(\nu)+}$ の元に対応する parameter $s$ は次の diagram で記述される。(ただし、$s$ と $-s$ を同一視する)



即ち、$\mathrm{Re}\, s=0$, $-\frac{1}{2}\leqslant s\leqslant\frac{1}{2}$, $s=\pm\frac{\nu-1}{2}$ ($\nu$: 偶数) となる $s$ たちである。

さて、$\Gamma=PGL(2,\mathbb{Z})\subset G_\infty$ として、

$\mathfrak{S}_\nu=\mathfrak{S}_\nu(\Gamma)$ : weight $\nu$ ($\nu>0$) の cusp forms 全体の成す空間.

とおく。$f\in\mathfrak{S}_\nu$ に対して、

$$F(g)=f(g(i))j(g,i)^{\frac{\nu}{2}},\quad g\in G,$$

ただし、$j(g,z)=\dfrac{\det g}{(cz+d)^2}$, $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

とおけば、

$$\begin{cases}F(\gamma gk)=F(g)\chi_{-\nu}(k), & \forall\gamma\in\Gamma,\ \forall g\in G,\ \forall k\in K,\\ \mathcal{C}F=\dfrac{\nu(\nu-1)}{8}F & [\mathcal{C}\text{ は }G_\infty\text{ の Casimir operator}],\\ \int_{\Gamma\backslash G}|F|^2<\infty. & \end{cases}$$

を満たすのは、$\mathfrak{S}_\nu$ の定義から明らかである。ここで、$g\in G_{\mathbb{A}}$ を

$$g=\xi(k_0\times g_\infty),\quad \xi\in G_{\mathbb{Q}},\ k_0\in K_0,\ g_\infty\in G_\infty.$$

と分解して、この表現に対し、

$$\tilde{F}(g)=F(g_\infty)$$

さらに、

$$\tilde{\mathfrak{S}}_\nu=\{\tilde{F}\mid f\in\mathfrak{S}_\nu\}$$

とおこう。

$$\mathcal{R}=\mathcal{R}(G_{\mathbb{Q}},G_{\mathbb{Z}})$$

を$\mathbb{C}$上のHecke環とすると、環同型

$$\mathscr{H}(G_{\mathbb{Q}}, G_{\mathbb{Z}}) \simeq \prod_{p<\infty} L(G_p, K_p) \tag{2.2}$$

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ G_{\mathbb{Z}}\xi G_{\mathbb{Z}} & \longleftrightarrow & (K_0\xi K_0 \text{ の特性関数}) \end{array} \quad , \xi \in G_{\mathbb{Q}}$$

を得、$K_0\xi K_0$ の特性関数 $\phi_0$ に対し、

$$f|_{G_{\mathbb{Z}}\xi G_{\mathbb{Z}}} = \tilde{F} * \phi_0$$

が成り立つので、同型な環 (2.2) 上の module としての同型

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_\nu & \simeq & \tilde{\mathfrak{S}}_\nu \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & \tilde{F} \end{array} \tag{2.3}$$

を得る。従って、

$$\tau_p : K_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_p \text{ の特性関数}$$

のとき、

$$\begin{aligned} \tilde{F} * \tau_p &= \hat{\omega}_{s_p}(\tau_p)\tilde{F} \\ &= p^{\frac{1}{2}}(p^{s_p} + p^{-s_p})\tilde{F}. \end{aligned}$$

(2.2) の同型の下では、

$$p^{1-\frac{\nu}{2}} T_p \longleftrightarrow \tau_p \qquad (T_p : \text{Hecke operator})$$

と対応しており、

$f \in \mathfrak{S}_\nu$ が全ての $T_p$ の eigenfunction ;

$$T_p f = a_p f$$

であれば、

$$f(z) = c \sum_{n>0} a_n e^{2\pi i n z}$$

ここで、

$$a_p = p^{\frac{\nu}{2}-1}\hat{\omega}_{s_p}(\tau_p) = p^{\frac{\nu-1}{2}}(p^{s_p}+p^{-s_p}).$$

従って、

(i) $p<\infty$ の場合

$s_p$：純虚数 $\Longrightarrow |p^{s_p}+p^{-s_p}| \leqq 2$

$\Longrightarrow$ *Ramanujan-Petersson Conjecture.*

(ii) $p=\infty$ の場合

$s_p$：純虚数 $\Longleftrightarrow$ *Selberg Conjecture.*

Non-holomorphic な場合も、２つの予想の相互関係が、全く同様の形式で、Langlands（[4]）においてなされている。

References


[1] M. N. Huxley, Introduction to Kloostermania, in Elementary and Analytic Theory of Numbers, Banach Center Publications, vol.17, WARSAW (1985), 217-305.

[2] H. Iwanic, Non-holomorphic modular forms and their applications, in Modular Forms (Ed. Rankin), ELLIS HORWOOD LIMITED (1984), 157-196.

[3] T. Kubota, Elementary Theory of Eisenstein Series, Tokyo-New York, Kodansha and Halsted (1973).

[4] R. P. Langlands, Problems in the theory of automorphic forms, Lecture Notes in Math., 170 (1970), 18-86.

[5] P. Sarnak, Additive number theory and Maass forms, Lecture Notes in Math., 1052 (1984), 286-309.

[6] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over -adic fields, Publ. Math., 18, Inst. Hautes Etudes Sci., (1963).

[7] I. Satake, Spherical functions and Ramanujan Conjecture, Proc. of Symposia in pure Math., IX (1966), 258-264.