数理解析研究所講究録
631巻 1987年 66-69

実二次体に付随した Maass wave forms に関する一注意

京大・教養　加藤信一 (Shin-ichi Kato)

古典的な wave forms が，ある種の関数等式を満たす Dirichlet 級数に対応する保型形式として Maass [M] によって定義・研究されたものであることは周知であろう。例えば実二次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ (Dは判別式)の量指標つき zeta 関数

$$(1)\quad \zeta_K(s;n,\rho)=\sum_{\substack{\mu\in(\mathcal{O}\setminus\{0\})/E_+(\sqrt{D})\\ \mu\equiv\rho \pmod{\sqrt{D}}}}(\operatorname{sgn}N(\mu))^k\left|\frac{\mu}{\mu'}\right|^{nci}\frac{1}{|N(\mu)|^s}$$

$$\left(\begin{array}{l} k=0\text{ 又は }1,\quad n\in\mathbb{Z},\quad \rho\in\mathcal{O}=K\text{ の整数環},\\ E_+(\sqrt{D})\text{ は 総正単数}\equiv 1 \pmod{\sqrt{D}}\text{ 全体のなす群},\\ c=\pi/\log\varepsilon,\quad \varepsilon>1\text{ は }K\text{ の基本単数}. \end{array}\right)$$

に対応するものが，標題の"実二次体に付随した wave forms"で，

$$(2)\quad g(z_+; n, \rho) = l_0 \delta(n,\rho)\, y^{1/2} + \sum_{\substack{\mu \in (\mathcal{O}\setminus\{0\})/E_+(\sqrt{D}) \\ \mu \equiv \rho \ (\mathrm{mod}\ \sqrt{D})}} \left|\frac{\mu}{\mu'}\right|^{nci} y^{1/2} K_{nci}\left(\frac{2\pi |N(\mu)|}{D} y\right) e^{2\pi i \frac{N(\mu)}{D} x}$$

$(z_+ = x + iy,\ y > 0)$

で与えられる。ここで $E_+(\sqrt{D}) = \langle \varepsilon_0 \rangle$，$\varepsilon_0 > 1$ としたとき，$l_0 = \log \varepsilon_0$；$\delta(n,\rho) = 1$ ($n = 0$ かつ $\rho \equiv 0$ $(\sqrt{D})$ の時)，$= 0$ (その他)；また $K_{nci}(\ )$ は変形 Bessel 関数である。この $g(z_+; n, \rho)$ は"保型性"を持ち，上半平面上の Laplacian $\Delta = -y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ の，固有値 $\frac{1}{4} + n^2c^2$ の固有関数である。(その他，詳しくは [M].)

さて，それより以前，Hecke [H] はより"素朴"に zeta 関数 (1) ($n=0$ の場合) に対して"theta 級数"

$$(3)\quad \vartheta_\pm(z_\pm; n, \rho) = \sum_{\substack{\mu \in (\mathcal{O}\setminus\{0\})/E_+(\sqrt{D}) \\ \mu \equiv \rho\ (\sqrt{D}),\ \pm N(\mu) > 0}} |\mu|^{2nci}\, e^{2\pi i \frac{N(\mu)}{D} z_\pm}$$

（$z_\pm \in H_\pm$，上(下)半平面）を考え，その"変換公式"を計算した（$n=0$の場合）．勿論 (3) それ自身は"保型性"を持たないが，超函数（hyperfunction，実はすぐわかるように distribution）

$$\vartheta(x;n,\rho) = \vartheta_+(x+i0,n,\rho) + \vartheta_-(x-i0;n,\rho) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

を考えれば，これは"保型的"になる。例えば

$$\vartheta\left(-\frac{1}{x};n,\rho\right) = \frac{|x|^{1+2nci}}{\sqrt{D}} \sum_{\substack{\beta\in\mathcal{O} \\ \beta \bmod \sqrt{D}}} e^{2\pi i\frac{Tr(\rho'\beta)}{D}}\, \vartheta(x;n,\beta) \qquad (x\neq 0).$$

これより，実射影直線 $P^1(\mathbb{R})$（局所座標を v, w；$w=-\frac{1}{v}$）上の実解析的直線束の超函数切断を

$$\begin{cases} v \longmapsto \vartheta(v;n,\rho) \\ w \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{D}} \displaystyle\sum_{\beta \bmod \sqrt{D}} e^{2\pi i\, Tr(\rho'\beta)/D}\, \vartheta(w;n,\beta) \end{cases}$$

で定めよう；言い換えれば，超函数値誘導表現

$$\mathcal{B}\text{-}\mathrm{Ind}_P^G(nci) = \left\{ f\in\mathcal{B}(G) \,;\, f\left(g\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix}\right) = |a|^{-1-2nci} \times f(g) \right\}$$

$(G = SL_2(\mathbb{R}),\ P =$ 上三角行列全体 $\subset G)$ の"保型的な"元 $\Theta_{n,\rho}$ を定める。そしてこの Poisson 積分（上記誘導表現の空間から，Laplacian の固有空間への G-準同型）

$$\int_K \Theta_{n,\rho}(gk)\,dk \qquad \left(\begin{array}{l} K = SO(2) \\ dk = \text{正規化された Haar 測度} \end{array} \right)$$

$: g \pmod{K}$ の関数

を計算すると，$G/K \simeq H_+$ の同一視のもとに，(2) の $g(z_+; n, \rho)$ が定数倍を除いて得られるのである。
（計算については [K] を参照されたい。）

[M] H. Maass, Math. Ann. 121 (1949) 141-183

[H] E. Hecke, J. Reine Angew. Math. 157 (1927) 159-170 (Werke 25)

[K] S. Kato, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 34 (1987) (to appear)