

或る連分数の  $g$  進展開における digits について

国際経大 田村 純一 (Jun-ichi Tamura)

§0 序

正則連分数 (simple continued fraction) 展開と  $g$  進小数展開を同時に explicit に表わすような無理数については、殆ど知られていない。(Bundschuh [2]) 連分数

$$[0; 1, g, g, g^2, g^3, g^5, g^8, \dots] \quad (2 \leq g \in \mathbb{Z})$$

の  $g$  進展開が

$$(A) \quad (g-1) \sum_{n=1}^{\infty} g^{-[a_n]} \quad , \quad a = (1+\sqrt{5})/2$$

と与えられることは、既に知られており (Adams-Davison [1]), ことば、その別証明を与える過程で  $g$  進小数の digits たちの間に存した興味深い事実について述べる。

§1 準備

数列  $\{u_n\}_{n=-1}^{\infty}$  は、

$$u_{-1} = 0, \quad u_0 = 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で決めるための Fibonacci 数列とし、 $A_n$  は、"再帰的":

$$(1) \begin{cases} A_{2n+2} = A_{2n}, 3, A_{2n+1} \\ A_{2n+3} = A_{2n+1}, 2, A_{2n+2} \end{cases} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

で定義された有限数列とする。但し  $A_1 = A_2 = A_3 = \emptyset$

( $\emptyset$  は空集合)  $A_4 = 3, A_5 = 2, 3$  とする。たとえ

$$\text{ば, } A_6 = A_4 \cdot 3 \cdot A_5 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$$

$$A_7 = A_5 \cdot 2 \cdot A_6 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$$

となる。このとき、数列  $A_n$  の長さは  $u_{n-2} - 1$  となるので、  
数列  $A_n$  の和は

$$\beta_n = b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \dots, b_{u_{n-2}}^{(n)}$$

を  $n$  の偶奇に依り、 $b_i^{(n)} = 0$  または  $1$  とする。決める  
ことかできる。即ち、 $n=4, 5, 6, \dots$  に対して

$$b_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{m-1} a_k^{(n)} + \begin{cases} 0 & (n: \text{偶数}) \\ 1 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$(a_k^{(n)} = \text{数列 } A_n \text{ の } k \text{ 項目})$$

とする。また  $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$  (長さは  $\pm 1$   
の数列) とする。このとき次記をみたす:

$$(2) b_{u_{n-2}}^{(n)} = u_n - 2 \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

$$(3) b_1^{(n)} + u_{n-1} - b_{u_{n-2}}^{(n-1)} = \begin{cases} 2 & (n: \text{偶数}) \\ 3 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$(4) \beta_{n+1} = \beta_{n-1}, \beta_n + u_{n-1}$$

(2) と (3), (3) と (4) から (4) の plus の記号は、

たとえば,  $\beta = 2, 5, 7, 10$  に対し  $\beta + 8 = 10, 13, 15, 18$   
 等となることを示し, (4) の右辺の comma は §1 の (1) と  
 同様の意味をもつ)

§2 連分數によつて定義された函数  $\Theta(x)$ .

この § 以下, 証明は一切省略する. まず, 正則連分  
 數  $[0; x^{u_1}, x^{u_2}, x^{u_3}, \dots, x^{u_{n-2}}]$  (表の有理関  
 數を  $\theta_n(x)$  とし,

$$(5) \quad \theta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(x) = [0; x^{u_1}, x^{u_2}, x^{u_3}, \dots]$$

とおく. ( $x \in \mathbb{C}$ ,  $|x| < 1$  の時, 上の極限は有限確定延  
 をもつ) 連分數 (5) の  $n$  次近似分數を通常記号で,

$p_n(x)/q_n(x)$  とすると,  $p_n, q_n$  の回帰關係式より, 帰

納法で

$$(6) \quad p_n(x) = \sum_{\substack{l=0 \\ l \notin \beta_n}}^{u_n-1} x^l, \quad q_n(x) = \sum_{l=0}^{u_n-1} x^l$$

を示せる. こゝで

$$\theta_n(x^{-1}) = p_n(x^{-1})/q_n(x^{-1}) = \Theta_n(x)$$

とおくと,

$$1 - \Theta_n(x) = \left( \sum_{l=0}^{u_n-1} x^{-l} - \sum_{\substack{l=0 \\ l \notin \beta_n}}^{u_n-1} x^{-l} \right) / \sum_{l=0}^{u_n-1} x^{-l}.$$

(2) より, 有限級数  $\beta_n$  の各項から成る集合は,  $\{0, 1, \dots, u_n-1\}$   
 に含まれることに注意して,

$$1 - \Theta_n(x) = P_n(x) / Q_n(x),$$

$$P_n(x) = \sum_{l \in B_n} x^{u_n-1-l}, \quad Q_n(x) = \sum_{l=0}^{u_n-1} x^l$$

と書ける。そこで、数列  $B_n$  の項を逆に並べかえた数列  $\overleftarrow{B_n}$  の各項の符号をかえた数列  $-\overleftarrow{B_n}$  を考え、

$$D'_n = -\overleftarrow{B_n} + u_n - 1$$

とす。即ち、 $D'_n$  の  $m$  項を  $d_m^{(n)}$  とするとき、

$$d_j^{(n)} = -b_{u_n-2-j+1} + u_n - 1, \quad (j = 1, 2, \dots, u_n-2)$$

となる。このとき、(2)より  $D'_n$  の初項は、 $n$  の偶奇に關係なく常に 1 に等しい。今、 $D'_n$  の作り方をとり、

$$C_n := \Delta D'_n := \left\{ -b_{u_n-2-j}^{(n)} + b_{u_n-2-j+1}^{(n)} \right\}_{j=1}^{u_n-2-1}$$

とすると、 $D'_n$  の作り方から、 $C_n = A_n 2^n$ 、

$$(4) \quad 1 - \Theta_n(x) = \sum_{l \in D'_n} x^l / \sum_{l=0}^{u_n-1} x^l$$

かゝりた。 ~~したがって~~、 $\Delta D'_n = C_n$  は次をみたす：

$$(8) \quad \begin{cases} C_{2n+4} = C_{2n+3} \cdot 3 \cdot C_{2n+2} \\ C_{2n+5} = C_{2n+4} \cdot 2 \cdot C_{2n+3} \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

例し、 $C_1 = C_2 = C_3 = \emptyset, C_4 = 3, C_5 = 3, 2$ 。

たとえば、 $C_6 = 3, 2, 3, 3$

$C_7 = 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2$

$C_8 = 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3$

等となる. 数列  $C_{n+1}$  は数列  $C_n$  を "延長" したものであるか.

よ.  $C_n = \{C_m\}_{m=1}^{u_{n-1}}$  と書ける. 従って,

$$C = \lim C_n = \{C_m\}_{m=1}^{\infty}$$

が定義される. (4) で  $n \rightarrow \infty$  とし,

$$\textcircled{H}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \textcircled{H}_n(x)$$

$$(9) \quad = [0; 1, x^{-u_1}, x^{-u_2}, x^{-u_3}, \dots]$$

$$= 1 - (1-x) \sum_{l \in D'} x^l, \quad |x| < 1$$

を得る.  $\Delta D'$  は,  $C$  の和分, i.e.,

$$\Delta D' = C \quad \& \quad D' \text{ の初項} = 1$$

で与えられる無限数列である.

Polya - Carleson の定理を述べた. 関数  $\textcircled{H}(x)$  の自然境界は, 単位円  $|x|=1$  であり, 従って,  $\textcircled{H}(x)$  は超越関数

であることがわかる.  $\Delta D'$  の中に 1 が 現れる (あかす) ことに

注意して ( $\Delta D' = C$  は, 2 と 3 と 4 が 5 以下の数列)  $(9)$  の

次を得る:

$$\textcircled{H}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n \quad \text{としたとき,}$$

(10)

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_n = \begin{cases} \rho-1 & (n \in D') \\ +1 & (n \in D'+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad n \geq 1.$$

§ 3  $\textcircled{H}(g^{-1})$  の  $g$  進展論.

(10) により,  $x = 1/g$  ( $2 \leq g \in \mathbb{Z}$ ) を代入すれば,

$$\textcircled{H} (g^{-1}) = [0; 1, g, g, g^2, g^3, g^5, g^8, \dots]$$

$$(11) \quad = \sum_{n=1}^{\infty} k_n g^{-n},$$

但し,

$$k_n = \begin{cases} g-1 & (n \notin D := D+1) \\ 0 & (n \in D) \end{cases}$$

であることが知られる。 $\textcircled{H}_n(g^{-1})$  の  $g$ -進展開は、周期が  $U_n$  の無限循環小数と等しい。 $\textcircled{H}(g^{-1})$  は、無限正則連分數に等しいから、勿論、無理数であり、 $\textcircled{H}(g^{-1})$  の  $g$ -進展開に於ける digits  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  は、 $g$  と 0 のみからなる非同期的で無限列であることが知られる。従って数列  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  に関して、どのような性質を持つているか興味のあるところである。これについて以下に述べられて得られるいくつかの結果について述べる。

§4 数列  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  について。

任意の正整数  $n$  は、隣接しない Fibonacci 数の和として、一意的に書けることはよく知られている。即ち、 $0 < n \in \mathbb{Z}$  に対し正整数  $m$  及び  $u_{j_1}, \dots, u_{j_m}$  が一意的に決まり、

$$(B) \quad n = \sum_{l=1}^m u_{j_l} \quad \left\{ \begin{array}{l} m > 1 \text{ の時は} \\ \end{array} \right.$$

をみたす。但し、 $j_l > 0$ 、 $j_{l+1} - j_l > 1$  ( $l=1, 2, \dots, m-1$ ) とする。このとき、 $j_1 = j_1(m)$  は  $n$  の階数と考えられる。

よって、次が成り立つ：

$$(12) \quad D = \left\{ 2 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \right\}$$

$$= \left\{ n; j_1(n) \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

(注. 数列  $D$  は単調列存の  $\omega$ -集合と同一視した)

(注.  $\sum_{k=1}^0 c_k = 0$  と考へる)

$$(13) \quad c_n = \begin{cases} 3 & (j_1(n) = \text{odd}) \\ 2 & (j_1(n) = \text{even}) \end{cases}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

こゝと (11) を併せて 数列  $\tau = \{c_n\}_{n=1}^{\omega}$  と 数列  $\kappa = \{k_n\}_{n=1}^{\omega}$  は、文字の置換を除いて、本質的に同じ列であること加へる。

(つまり  $6 \rightarrow 3, 0 \rightarrow 2$ )

できまる 2 文字の置換によつて、数列  $\kappa$  は数列  $\tau$  に移る) 従つて、 $\textcircled{1}(g^{-1})$  の  $g$  進小教表示は 数列  $\tau$  を書き下せば、機械的に得られる:

下せば、機械的に得られる:

$$(14) \quad \begin{array}{cccccccccccc} \tau & : & 3 & . & 2 & . & 3 & . & 3 & . & 2 & . & 3 & . & 3 & . & 2 & . & 3 & . & 3 & . & 2 & . & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots & & & & & & & & & & & & & \dots \end{array}$$

$$\textcircled{1}(g^{-1}) = 0.k0.kk0.k0.kk0.kk0 \dots$$

こゝで 数列  $\tau$  は、"再帰接続関係" (8) より得られる。

と  $3$  で 数列  $\tau$  は、次の驚くべき性質 (証明は (12) (13) から既に明らかである) を持つている:

(13) から既に明らかである) を持つている:

$$(15) \quad \text{数列 } \tau = \{c_m\}_{m=1}^{\omega} \text{ の } (2 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k) \text{-番目}$$

の項は 2 に等しく、それ以外の項は 3 に等しい。

この (15) より 数列  $\tau$  を機械的に (8) を使つて、

求めらる:

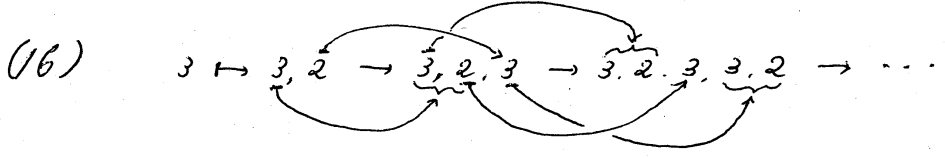
(15)  $\begin{matrix} \text{C: } & 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots \\ \text{D: } & 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, \dots \\ \text{D: } & 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, \dots \end{matrix}$

説明: 数列 C と数列 D の和印は, それぞれ 3, 2 とする. 3 行目の最初の数加えながら 1 行目の 2 に 0 印を付ける. 1 行目の 0 印の下には 2 と書く. 2 行目の和分をとると 2, 5, 7 (3 行目) が得られる. 1 行目の 2, 5, 7 に 0 印を付ける. (2 には既に 0 印がついていて 3 の 2, 5 と 7 には 4 に 0 印を付ける) 0 印の下 (2 行目) に 2 と書いて既に 0 印がついていて ~~左~~ 数より左にある 0 印の数  $T$  行目の下には 3 と書き入れる. 2 行目の和分をとると 3 行目の 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20 が得られる. 1 行目の ~~4, 10, 13~~ 10, 13, 15, 18, 20 に新しく 0 印を付ける. 以下同様にこれをくりかえす.

また, (8) より, 数列 C は, substitution

$$T: \begin{cases} 3 \mapsto 32 \\ 2 \mapsto 3 \end{cases}$$

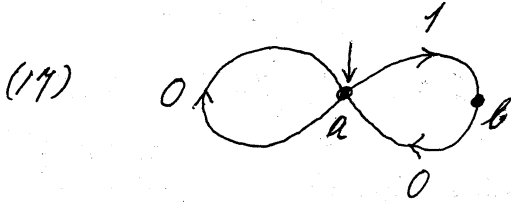
により,  $T$  が生成される:



即ち,  $T$  は constant length でない substitution によって書かれた "automaton" (pseudo-automaton) の生成



(実際は) 予る列と考えられる。(13)に類する列は...  $\mathcal{C}$  は pseudo-automaton:



(13) 2進法の代りに Fibonacci representation (84, (B)) を使う。即ち  $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$  の代りに  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  を base にとる。

よって生成される列

	0	1	2	3	4	5	6	
	a	b	a	a	b	a	b	...
	(3	2	3	3	2	3	2	...

と考えられる。

他方、次の正規連分母 (regular continued fraction)

$$\Phi(x) = \frac{x}{1 + \frac{x}{1 + \frac{x^2}{1 + \frac{x^3}{1 + \frac{x^5}{1 + \frac{x^8}{1 + x^{13}}}}}}}, \quad |x| < 1$$

(右辺の  $x$  の肩の数は Fibonacci 数)

で与えられた関数についても同様の結果を得る。たとえば;

$g = g-1$  として、(14) に対応する結果:

(18)

$$\Phi(g^{-1}) = 0.0k0k0k0k0 \dots$$

↓

$$\mathcal{C} = 2.1.2.2.1.2.1 \dots = \lim_{m \rightarrow \infty} t_{m=1}$$

( $\mathcal{C}$  は 2, 1 の列と (8) と同様 1=12 と考えられる) 加、(15) に対応する結果:

(14)  $E: \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}, 5, \textcircled{6}, 7, \textcircled{8}, \textcircled{9}, 10, \textcircled{11}$   
 $F: 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, \dots$   
 $G: 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, \dots = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$

等加示される. とこで, 連分数の直接の表現によって,

$$\Phi(x) = x \oplus (x) \quad \text{(14), (18) より} \quad \text{(数列 } \mathcal{K} \text{ は数列 } \mathcal{L} \text{ と異なる)}$$

であることが確かめられたから, 数列  $\mathcal{C} = \{c_m\}_{m=1}^{\infty}$  は,

数列  $\mathcal{E} = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$  と文字の違いを別にすれば, 同一の pattern を持つてい, であることがわかる. 従って, 数列  $\mathcal{C}$  は

$$(20) \quad c_n = \begin{cases} 3 & \text{iff } n \in \mathcal{F} = \{f_m\}_{m=1}^{\infty} \\ 2 & \text{iff } n \in \mathcal{D} = \{d_m\}_{m=1}^{\infty} \end{cases}$$

によって与えられることをわかる. ここで, (15), (18), (20)

より,  $d_n = f_n + n$

$$\mathcal{D} \cup \mathcal{F} = \mathbb{N}, \quad \mathcal{D} \cap \mathcal{F} = \emptyset$$

であることがわかる. これより  $\mathcal{D}$  及び  $\mathcal{F}$  は  $d = (1+\sqrt{5})/2$  としたとき,

$$(21) \quad \begin{cases} d_n = [d^2 n] \\ f_n = [d n] \end{cases}, \quad n=1, 2, \dots$$

~~を得られる~~ ことと示されることとわかる. ~~また~~  $\mathcal{D}$  も  $\mathcal{F}$  である. (これは  $\mathcal{D}$  の (A) である)

また, 連分数の級数表示 (Euler's transformation) を用いれば,  $T_n$  は不定方程式の解の個数

$$T_n = \#\{(k, l, m) \in \mathbb{N}^3; u_{2m} \cdot (k-1) + u_{2m+2} \cdot l = n\}$$

と与えられる数としたとき,

$$\begin{aligned}
 (20) \quad \textcircled{4}(x) &= \frac{1}{1+x} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{4_{2m+2}}}{(1-x^{4_{2m}})(1-x^{4_{2m+2}})} \\
 &= \frac{1}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} (T_n - 2T_{n+1} + T_{n+2}) x^n, \quad |x| < 1
 \end{aligned}$$

を得る。対37)  $\{T_n - 2T_{n+1} + T_{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$  は対37)  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  の差を2回とったものであることに注意して、(9)(21)及び(22)を使えば、

$$\begin{aligned}
 (23) \quad T_n &= \frac{1}{2}n - \left[ \frac{3-\sqrt{5}}{2}(n-1) \right] + \frac{1}{4}(-1)^{n-1} - \frac{3}{4} \\
 &\sim \frac{\sqrt{5}-2}{2}n
 \end{aligned}$$

を得る。一般に、不定方程式

$$xx' + yy' = n$$

の正整数解の個数については、興味あるが、これに数論的の制限をつけて、解の個数を考えたものとしては、Tonkovの論文[4]などがある。

以上の諸結果のうち(16)については、M. Mendès France また、(14)については、C. Mauduit に教示を得たことを記し、併せて感謝の意を表す。

最後に、 $\textcircled{4}(x)$ の他の超越性については、既に見たように、 $\textcircled{4}(x)$ は、級数

$$f_d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{[dn]}, \quad d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

と結びつけられるから  $\alpha$  を一般の二次無理数としたとき,  
 $f_n(g^{-1})$  ( $g \leq g \in \mathbb{Z}$ ) は超越数であることは知られている。  
 従って, 命題  $\textcircled{4}(g^{-1})$  は超越数である。最近 D. W.  
 Masser は相異なる 1 より小さい代数的数  $\alpha$  を  $f_n(x)$   
 に代入した値  $\alpha_n$  の代数的独立性を示した。 ([3])

これに対して, finite pseudo-automaton による  $\alpha$  と  $\beta$  と  $\gamma$   
 の値  $\alpha_n$  を digits とする無限小数の超越性については

$\textcircled{4}(g^{-1})$  の他には, 一般に何も知られていない。文献:

1. Adams, W. W. and Davison, J. G.: A remarkable class of continued fractions, Proc. AMS vol. 65 No. 2 (1944), p. 194 -
2. Bundschu, P.: Über eine Klasse reeller transzendenter Zahlen mit explicit angegebener  $g$ -adischer und Kettenbruch-Entwicklung, Journal für die reine und angewandte Math. (Crelle) 318 (1980), p. 110 -
3. Masser, D. W.: An algebraic independence theorem (1-1)
4. Мотков, М.: Новые применения метода «стаканчиков» Виноградова, Труды математического института АН СССР (1984) том 163, p. 234 -