数理解析研究所講究録
631巻 1987年 23-34

閉測地線の密度定理

名大理 勝田 篤
(Atsushi Katsuda)

§1. 数論の密度定理

幾何のモデル，参考になると思われる数論の密度定理を列挙しよう。

1. 素数定理 (Hadamard, de la Vallée-Poussin)

$\pi_N(x) = \#\{ p : \text{素数},\ p \le e^x = u \}$ に対し.

$$\pi_N(x) \sim \frac{e^x}{x} = \frac{u}{\log u} \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

2. Dirichletの密度定理 (Dirichlet, Chebotarev)

乗法群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ に対し. $\pi_N(x, \alpha) = \#\{ p : \text{素数},\ p \le e^x,$
$[p] \in \alpha$ $([\cdot] : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 自然な射影$)\}$, $(\alpha \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times})$ とおく時.

$$\pi_N(x, \alpha) \sim \frac{1}{\#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}} \frac{e^x}{x} \quad \text{as } x \to \infty$$

3. 双子素数予想 (Hardy-Littlewood, Heath-Brown)

$\pi_N^2(x) = \#\{p;$ 素数, $p+2$, 素数, $p < e^x\}$ に対し、Hardy-Littlewood は次の予想を立てた。

$$\pi_N^2(x) \sim \mathfrak{S}\,\frac{e^x}{x^2} \quad \text{as } x \to \infty$$

但し $\mathfrak{S} = 2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$ である。

これは、今の所未解決と思われるが、Heath-Brown は、Dirichlet の L-関数の Siegel zero の存在を仮定すれば、予想が導かれることを示した。(より詳しくと、mod q の real, primitive な character χ に対し、$\beta_0 \in \mathbb{R}$, $(1-\beta_0) < (3\log q)^{-1}$, $L(\beta_0, \chi) = 0$ となる β_0 が存在すること。) 今まで、この analogy を考えることは幾何ではされてない(双子素数の類似が考えにくい)が、あとの Th. A, B 等の証明において、L 関数の pole ($\frac{d}{ds}\log L(s,\chi)$ の singularity という意味では zero も pole も同様) が、$\chi = 1$ の pole に近づくという事実が本質的であり、何らかの共通点があるかもしれないので、あげておく。

§2. 幾何における密度定理.

基本的には、素数 $\longleftrightarrow$ 素な閉測地線(他のものの何重かになっていない閉測地線)の対応で考える。

一般的なRiemann多様体に対しては、無限個の素な閉測地線の存在も知られていないので、Categoryを制限して考える。以下の図は、その関係、今の所での使える道具、性質等を示すものである。(定義等は後述)

M: Riemann面, $\dim M = 2$
断面曲率 $K_M \equiv -1$

$\cap$

M: hyperbolic 多様体
$K_M \equiv -1$

(Selberg trace formula
Selberg zeta function
Laplacian)

$\cap$

M: 負曲率多様体
$-b^2 \leq K_M \leq -a^2$

$\cap$

Ⓐ M: 非正曲率多様体
$\mathrm{rank}(M) = 1$

(Weak の形
幾何学的議論)

$\subset$

Ⓑ M: Anosov型の geodesic flow をもつ.

(Ruelle operator
その最大固有値が、
$x=1$ の近傍上 real.)

(B)

$\cap$

$\boxed{\begin{array}{l}(X, \varphi_t) : \text{Anosov flow} \\ (\text{今までは } X = \overset{\text{unit sphere bdl}}{UM})\end{array}}$

$\cap$

$\boxed{(X, \varphi_t) : \text{Axiom A flow}}$

(Ruelle L-function
Ruelle operator)

定義等.

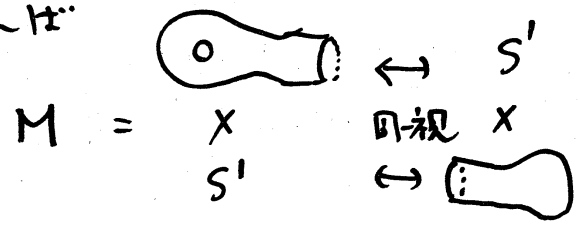
☆ M : 非正曲率多様体の rank とは?

・UM ∋ v に対し. $r(v)$: v の rank を v に沿う平行な Jacobi 場の次元とし. $\mathrm{rank}(M) = \min_v r(v)$ とおく。局所対称空間の場合は通常のものと一致する。更に finite volume の場合は.次の事が成りたつ。

・<u>定理</u> (Ballman, Burns-Spatzier) $\mathrm{vol}(M) < +\infty$, $0 \geq K_M \geq -a^2$, とすれば M の universal covering $\tilde{M}$ は rank 1 か. 対称空間か. あるいはこれらの直積のいずれかである。

rank 1 の多様体で負曲率でないものは. いろいろある。

例えば



( : は Riemann 面の例)

はその例である。

☆ Anosov flow, Axiom A flow とは?

(i) 非遊走集合 $\Omega \equiv \{x \in X \mid \forall U: x\ \mathrm{nbhd},\ \forall T \geq 0,\ \exists t > T$ such that $U \cap \varphi_t(U) \neq \phi\}$ は有限個の singularity (双曲型のみ). 閉軌道の和。

(ii) $\Lambda = X - \Omega \ni x$ に対し. 次の条件 ア), イ) ウ) をみたす。

ア) $T_x X = L_x \oplus E_x^s \oplus E_x^u$ と x に関して連続に直和分解される。

イ) $(d\varphi_t)_x(E_x^s) = E^s_{\varphi_t(x)}$, $(d\varphi_t)_x(E_x^u) = E^u_{\varphi_t(x)}$

ウ) X 上に Riemann 計量. 正の定数 c, λ があって. $t > 0$ なら

$$\|(d\varphi_t)_x(w)\| \leq c e^{-\lambda t}\|w\| \qquad w \in E_x$$

$$\|(d\varphi_{-t})_x(w)\| \leq c e^{-\lambda t}\|w\| \qquad w \in E_x^u$$

をみたす。

(i), (ii) をみたす $\underbrace{\text{flow}}_{(X, \varphi_t)}$ を Axiom A flow, さらに $\Lambda = M$ とできる flow を Anosov という。

さらに. mixing という概念も後に Th を述べる際に必要なのでのべておこう。

flow (X, φ_t) が mixing とは、任意の開集合 $U, V \subset X$ に対し、$T > 0$ が存在して、$t \geq T$ なる t に対し $\varphi_t(U) \cap V \neq \phi$ なることである。

幾何の密度定理.

1. 素閉軌道定理. (Selberg, Margulis, Parry-Pollicott)

$\pi(x) = \#\{\gamma$: 素な閉軌道; $l(\gamma)$ = γ の長さ $\leq x\}$ に対し、

$$\pi(x) \sim \frac{e^{hx}}{hx} \quad \text{as } x \to \infty$$

(但し h は (X, φ_t) の topological entropy)

これは次の場合に成立している。

ア) Margulis, M : cpt, 負曲率.

イ) Parry-Pollicott (X, φ_t) : cpt, Axiom A flow, mixing.

ウ) Selberg, Sarnak. M : finite volume, hyperbolic.

M が非正曲率 rank 1 の場合は、弱い形の結果 (Knieper)

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \log \pi(x) = h$ しか知られていない。

☆ topological entropy とは.

(X, φ_t) の topological entropy h とは.

$$h = \sup_{\delta > 0} \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{T} \log \left(\max \#A \ ; \ A \text{ は } (T, \delta)\text{-separating set} \right)$$

ここで．$X \supset Y$ が (T,δ) であるとは．($y, y' \in Y$．$y \neq y'$ $\Rightarrow$ $\exists t$ such that $0 \leq t \leq T$，$d(\varphi_t y, \varphi_t y') \geq \delta$)
ということである。更に．M が非正曲率の場合は Manning
により $h = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \log V(x)$ ，($V(x)$ は半径 x の ball
$\subset \tilde{M}$: M の universal covering の体積) が示されている。

2. Dirichlet の密度定理の幾何学版

今の所．知られている結果は2通りに分かれる。仮に．Bowen 型と Sunada 型と呼ぶ。

ア) Bowen 型

(X, φ_t) に対し．X の部分集合 A をとり．A を通る閉軌道がどのくらいあるかを調べた結果。—— これについては足立氏の稿参照．

イ) Sunada 型

X or M からきまる群 G (基本群，1次 homology 群等) の coset，α を考え．$[\alpha]$ に属する閉軌道 or 閉測地線がどれくらいあるかを調べた結果。($[\alpha]$ は conjugacy class)

$$\pi(x, \alpha) = \#\{\gamma : \text{素な閉軌道},\ l(\gamma) \leq x\ ,\ \gamma \in [\alpha]\}$$

とおく。

(1) 有限指数の時.

(Adachi-Sunada, Parry-Pollicott).

(X, φ_t) : Anosov flow. $G = X$の基本群. $G' \lhd G$,

$\# G/G' < \infty$, $G/G' \ni \alpha$. に対し

$$\pi(x.\alpha) \sim \frac{\#[\alpha]}{\#(G/G')} \frac{e^{hx}}{hx} \quad \text{as } x \to \infty$$

(2) 無限指数の時.

(Phillips-Sarnak, Katsuda-Sunada) (T.R.A)

M; compact Riemann 面, $K_M \equiv -1$, $G = H_1(M.\mathbb{Z})$

$G \ni \alpha$ に対し (g は genus)

$$\pi(x,\alpha) \sim (g-1)^g \frac{e^x}{x^{1+g}} \quad \text{as } x \to \infty$$

(C. Epstein)

M : hyperbolic, finite volume. $G = H_1(M.\mathbb{Z})$

$G \ni \alpha$ に対し

$\dim M = 2$ $$\pi(x.\alpha) \sim \binom{2P}{P} \frac{(2g+P-2)^{P+g}}{2^{g+2}} \frac{e^x}{x^{1+g+P}}$$

但し. g = genus, P = # cusps.

$\dim M \geq 4$

$$\pi(x,\alpha) \sim C\,\frac{e^{(n-1)x}}{x^{1+r/2}} \quad \text{as} \quad x\to\infty$$

(講演の時は分母を間違えて $x^{1+r/2+1/2}$ とかきました。訂正致します。) $(r=\dim H^1(M,\mathbb{R}))$

(dim $M=3$ の時は C. Epstein の preprint には "complicated" で、cusp の影響は $|x\log(1/x)|^{1/2}$ とだけかいてある。)

(Katsuda – Sunada) (Th B)

M : compact, Anosov型の geodesic flow をもつ。

$G=H_1(M,\mathbb{Z})\ni\alpha$ に対し、

$$\pi(x,\alpha) \sim C\,\frac{e^{hx}}{x^{1+r/2}} \quad \text{as} \quad x\to\infty$$

・Mが非正曲率、rank 1 の場合は、大へん弱い形の結果、

$$\frac{h}{2} \le \varliminf_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log\pi(x,\alpha) \le \varlimsup_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log\pi(x,\alpha) \le h$$

くらいしか知られていない。

色々の結果の証明等は、すでに、数理研講究録616「Moduli空間の幾何と4次元多様体」にoutlineをかいておいたので重複をさける。

最後に、rank ≥ 2 の非正曲率多様体(=実は、局所対称空間)の場合に、幾何で知られている密度定理を述べてお

く。 Selberg以来，rank $\geqq 2$ の局所対称空間に対し，zeta関数を定義するという問題は考えられてきているらしいが，むずかしくてよくわかっていないらしいから、1つの試金石となるかもしれないから。

(Ballman-Brin-Spatzier)

M : cpt, locally sym. sp of noncompact type, k-rank $\geqq 2$.

regular vector v に対し，v から発する geodesic を regular geodesic という。 k-flat が regular とはそれが regular geodesic を含むときいう。 Regular immersed k-torus F に対し，$rsys(F)$ で F 上の regular な最短の閉測地線の長さを表わす。

今、$VRS(x)$ を

$$VRS(x)=\sum_{rsys(F)<x} vol(F) \qquad F\text{は }k\text{-torus}$$

で定義する。すると

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log VRS(x) = h$$

(h は topological entropy.) が成立する。

References

1. T. Adachi and T. Sunada, Twisted Perron-Frobenius theorem and L-functions, J. Funct. Analy. 71(1987), 1-46.

2. W. Ballman, Nonpositively curved manifolds of higher rank, Ann. of Math. 122(1985), 597-609.

3. W. Ballman, M. Brin and R. Spatzier, Structure of manifolds of nonpositive curvature. II, Ann. of Math. 122(1985), 205-235.

4. K. Burns and R. Spatzier, Manifolds of nonpositive curvature and their buildings, in preparation.

5. C. Epstein, Asymptotics for closed geodesics in a homology class, the finite volume case, preprint.

6. D.R. Heath-Brown, Prime twins and Siegel zeros, Proc. London Math. Soc. (3) 47 (1983) no2, 193-224.

7. A. Katsuda, Homology of closed geodesics in a nonpositively curved manifold of rank one, preprint.

8. A. Katsuda and T. Sunada, Homology and closed geodesics in a compact Riemann surface, to appear in Amer. J. Math.

9. A. Katsuda and T. Sunada, in preparation.

10. G. Knieper, Das Wachstum der Äquivalenzklassen geschlossener Geodätischer in Kompakten Mannigfaltigkeiten, Arch. Math. 40(1983), 559-568.

11. G.A. Margulis, Discrete groups of motions of non-positive curvature, (Russian), Proc. Int. Congr. Math. (Vancouver) vol 2, 21-34.

12. W. Parry and M. Pollicott, An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows, Ann. of Math. 118(1983), 573-591.

13. W. Parry and M. Pollicott, The Chebotarev theorem for Galois coverings of Axiom A flows, preprint.

//

14. R. Phillips and P. Sarnak, Geodesics in homology classes, to appear in Duke Math. J.

15. P. Sarnak, Prime geodesic theorems, Ph.D. dissertation, Stanford University (1980).

16. A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous subgroups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. 20(1956), 47-87.

17. T. Sunada, L-functions in geometry and some applications, Proc. of Taniguchi Symp. (1985), 266-284, Springer Lect. Note in Math. 1201, 266-284.

18. T. Sunada, 幾何学における数論的方法について ーzeta および Lー関数の幾何学的類似とその応用ー, 数学 38 (1986), 289-301.