数理解析研究所講究録，
632巻1987年218-224

主系列表現の行列要素に対する CONSTANT TERM について

津田塾大学　三鳥川寿一

(Hisaichi Midorikawa)

§1.

Gを非コンパクト,連結実半単純Lie群とし、その中心が有限とする。Gの放物型部分群Pは次の様な分解を持つ。AをPのsplit torusとすれば $P=Z(A)N$。ここでNはPのunipotent radical, $Z(A)$はAのGに於ける中心化群である。更に$Z(A)$は或るreductive部分群Mにより、$Z(A)=MA$, $M\cap A=\{1\}$と分解される。さて$\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$を各々M, A, NのLie代数としよう。Pの元pに対し$Ad(p)$の$\mathfrak{n}$への制限を$Ad(p)|\mathfrak{n}$と書くことにする。そこでP上の函数d_Pは次の如く定義される:

$$d_P(p)=\left|\det Ad(p)|\mathfrak{n}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

この稿での主題は、主系列表現のK-有限な行列要素fに対するN上の積分 $f^{(P)}(ma)\equiv\int_N (d_Pf)(man)\,dn$ を具体的に書き表わすことにある。Harich-Chandraの意味のSchwarz空间の元fに対しては上記の積分が存在すること

については知られているが（Schwarz spaceの定義については P.156, [5] 参照、積分の存在については Proposition 8.3. 7.5, [5] 参照）、主系列表現に属する K－有限な行列要素は Schwarz 空間に含まれない。そこで上記積分 $f^{(P)}$ の或る種の正当化を試み、$f^{(P)}$ についての具体的表示を求めることにする。

§2.

この節の始めに、まず G の主系列ユニタリ表現の説明しておく。$P=MAN$ を G の cuspidal な放物型部分群とする。この時、Mは二乗可積分な G の既約ユニタリ表現を持つが、この様な表現を discrete series に属する表現と呼ぶことにする。ω を M の discrete series に属する表現とし、λ を A のユニタリ指標とする。そこで P の表現 $\omega\otimes\lambda$ を次の如く構成する；

$$(\omega\otimes\lambda)(man)=(\lambda\cdot d_p)(a)\,\omega(m),$$
$$m\in M,\ a\in A,\ n\in N.$$

$\omega\otimes\lambda$ から誘導された G の表現を $\pi=\mathrm{Ind}_P^G\,\omega\otimes\lambda$ と書く。π はユニタリ表現であるが、これは主系列ユニタリ表現と呼ばれている。次に主系列表現の K－有限な行列要素 f に対する積分の正当化を試みる。$G=KA_0N_0$ を G の岩沢分解，θ を対 (G,K) に対する Cartan involution とする。以下、我々は G の極大放物型部分群 $P=MAN$ として $A\subset A_0$, $N\subset N_0$

なる条件を満すもののみを考える。そこで G は $G=KMAN$ と分解される。N の元 n に対して $\bar{n}=\theta(n)$ と置く。$\bar{n}$ に対しては次の様な $\mathfrak{a}$ の元 $H(\bar{n})$ が一意的に定まる; $\bar{n}\in KM\exp H(\bar{n})N$。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数 $\mathfrak{g}_c$ をその複素化とし、$\mathfrak{g}_c$ の展開環を $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ と書くことにする。$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の元は自然に G 上の C^∞-函数全体からなる環 $C^\infty(G)$ に左から作用する。$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の元 b の $C^\infty(G)$ 上の作用を、我々は $\underbrace{f(b;x)}_{bf,}$ $(x\in G,\ f\in C^\infty(G))$ 等と書くことにする。π を主系列ユニタリ表現（或る G の放物型部分群から誘導された）とし、$\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の中心とする。π の指標 Θ_π の具体的表示（例えば [2] 参照）が解っているので、或る $\mathfrak{z}$ の character χ_π に対し $z\Theta_\pi=\chi_\pi(z)\Theta_\pi$ となる事が証明出来る。従って $\pi(z)=\chi_\pi(z)1$, $z\in\mathfrak{z}$ を得る。ここで 1 は π の表現空間の恒等変換とする。χ_π は π の無限小指標、と呼ばれている。$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環, $\mathfrak{t}_c$ をその複素化、$W(\mathfrak{t}_c)$ を対 $(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ の Weyl 群とする。Harich-Chandra 同型写像 μ によって $\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{t}_c$ の双対空間上の W-不変な多項式全体のなす環 $I(\mathfrak{t}_c)$ と同一視される。そこで上の χ_π に対し或る $\mathfrak{t}_c$ 上の線型形式 λ が存在して $\mu(z)(\lambda)=\chi_\pi(z)$ がすべての $z\in\mathfrak{z}$ に対して成立する。そこで χ_π が正則指標であるとは、λ が $\mathfrak{t}_c$ 上正則であることを言う。

積分 $\dagger^{(P)}$ の正当化は次の定理によりなされる。

［定理1］ π を G の主系列ユニタリ表現でその無限小指標 χ_π が正則であると仮定する。この時 π の K-有限な行列要素 f に対し極限 $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_N (d_P f)(man)e^{-\varepsilon\rho(H(\bar{n}))}dn$ は存在する。但し ρ は $\mathfrak{a}$ 上の線型形式で $d_P(a)=e^{\rho(\log a)}$ $(a\in A)$ により定められたものとする。

f を上記定理と同一なものとし、我々は今 $f^{(P)}$ を

$$f^{(P)}(ma)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_N (d_P f)(man)e^{-\varepsilon\rho(H(\bar{n}))}dn$$

によって定義する。

§3.

この節では $f^{(P)}$ を具体的に表わす。$P=MAN$ を G の極大放物型部分群とすれば $\dim A=1$。従って $\rho(H_0)=1$ を満す $\mathfrak{a}$ の元 H_0 を取ることにより，A は $a_t=\exp tH_0$，$t\in\mathbb{R}$ によって parametrize できる。f を K-有限な G の主系列ユニタリ表現の行列要素とすれば Harish-Chandra の結果により次の事が解る；MA 上の函数 f_P が存在して

$$\lim_{t\to+\infty}\{(d_P f)(m\exp tH_0)-f_P(m\exp tH_0)\}=0$$

が任意の $m\in MA$ に対して成立する［P.235, Theorem 1, [3]］。我々の主目的はこの函数 f_P により、$f^{(P)}$ が書き表わされる

という事である。その為に以下の準備を行なう。

$\mathfrak{n}$ と $\theta(\mathfrak{n})$ によって生成された $\mathfrak{g}$ の部分環を $\mathfrak{g}^*$ としよう。この時 $\mathfrak{g}^*$ は split rank が 1 の半単純部分環である（Lemma 1、2、3、16，[4] 参照）。$\mathfrak{g}^*$ に対する G の解析的部分群を G^*、G^* の岩沢分解を $G^*=K^*A^*N^*$ とする。G^* の定め方から、$A=A^*$, $N=N^*$, $K^*=K\cap G^*$ として良い。$N_K(A)$, $Z_K(A)$ を各々 A の K に於ける normalizer, centralizer とする。対 (P, A) の Weyl 群 W は $W=N_K(A)/Z_K(A)$ により与えられ、$\dim A=1$ の仮定から W の 数は2である。そこで W の非自明な元を $\bar{w}$ と表わし $\bar{w}$ の代表を w と表わすことにする。

さて f 及び f_P を上述のものとし、f が K-有限であることに注意すれば f_P を MAK 上の函数に拡張することにより

$$\lim_{t\to+\infty}\{d_P(m\exp tH_0)f(m\exp tH_0 k)-f_P(m\exp tH_0 k)\}=0$$

$$, m\in MA,\ k\in K$$

とすることが出来る。そこで MA 上の函数 $C(\pi)f_P$ を次の如く定義する；

$$[C(\pi)f_P](ma)=\int_N e^{-\rho(H(\bar{\pi}))}f_P(maw\,k(\bar{\pi})^{-1}w^{-1})\,dn$$

$$m\in M,\ a\in A.$$

ここで $k(\bar{\pi})$ は K^* の元で $\bar{\pi}\in k(\bar{\pi})AN$ という条件によっ

で定まったものとする。Harich-chandraによるC一函数の理論によりこの積分の存在は解っている（Lemma 5.3, Lemma 10.1, [1] 参照）。そこで次の定理を得る。

［定理2］ π をGの主系列ユニタリ表現でその無限小指標が正則なものとする。又 f をK-有限な π の行列要素とする。この時

$$\int_N (d_P f)(man)\,dn = [C(\pi) f_P](ma)$$

がすべての $m \in M$, $a \in A$ について成立する。

注意1、上記定理の積分は、§2で $f^{(P)}$ と書いたものを意味する。

注意2、π の無限小指標が正則でなくても、$C(\pi) f_P$ が定義出来る表現 π に対しても定理2と同様な命題が成立する。

References

1 Harish-Chandra; Harmonic analysis on real reductive groups III, Ann. Math., 1976 pp. 117-201.

2 T. Hirai; The characters of some induced representations of semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto univ.,vol 8 1968 pp. 313-363.

3 V. S. Varadarajan; Harmonic analysis on real reductive groups, Springer Verlag Lecture Notes in Math. vol 576 1977

4 G. Warner; Harmonic analysis on semisimple Lie groups I, Springer Verlag 1972

5 Harmonic analysis on semisimple Lie groups II, Springer Verlag 1972