数理解析研究所講究録
632巻 1987年 186-203

Multiplicity free property for generalized Gelfand-Graev representations of semisimple Lie groups

京大理　山下 博 (Hiroshi YAMASHITA)

§1. 序.　Gを中心有限、連結半単純リー群、$\mathfrak{g}$をそのリー環とする. Gの極大巾単部分群の非退化な指標から誘導されたGの表現は、Gelfand-Graev (G.G.) 表現と呼ばれる. Gが線型かつquasi-splitの場合には、G.G.表現は、C^∞ contextでmultiplicity-freeである([9]). すなわち、Gの任意の既約unitary表現をとったとき、それに対応するGのsmoothな表現の、G.G.表現への連続かつG-equivariantな埋め込み(Whittaker model)は一意的である. 本稿では、この性質の一般化について考察する.

いかなる既約表現がWhittaker modelを持つかという事については、おもに主系列表現を通して、研究が進められてきた(例えば、[4]). その一方、[2]において、highest weightを持つ既約表現は、Gが特別な場合を除いてはWhittaker modelを持たない事が示され、unitarizable hightest weight moduleがinfinitesimalに埋め込める様に、G.G.表現の一般

化がなされた。また、p-進体上のrankの低い群（GSp(2), SU(2,1)）に対しては、上と同様な一般化が研究されている（GSp(2)については、例えば [6], [7]）。

この様に、Gのすべての既約表現を相手にする場合には、G.G.表現の一般化が必要になる。[3] において、上記をすべて含む統一的な一般化 —— generalized Gelfand-Graev (g.G.G.) 表現 —— が、有限体または局所体上の半単純代数群に対して定義され、有限体上の群について研究されている。

我々は、Gの g.G.G.表現における（縮退）主系列表現の重複度について調べた（[10]）。一般には、g.G.G.表現に無限の重複度で現われる既約表現があった。そこで我々は、g.G.G.表現における各既約表現の重複度を、高々有限に、できれば高々1に reduce するべく、reduced g.G.G.表現なるものを考え（§4 参照）、[2]と同様の幾つかの場合に、それらが実際に multiplicity free になる事を示す（定理9）。定理9は、GSp(2) に対する [6] および [7] の結果と、一部対応している。また、主系列表現の reduced g.G.G.表現における重複度について、その上からの評価を与える（命題10）。

§2. Generalized Gelfand-Graev 表現（[3]）

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解、それに対応する Cartan 対合

をθで表す. $\mathfrak{p}$の極大可換部分空間$\mathfrak{a}$をとり、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}$, $G=KA_{\mathfrak{p}}N$ ($A_{\mathfrak{p}}=\exp\mathfrak{a}$) を、各々対応する$\mathfrak{g}$, Gの岩沢分解とする. Λを$\mathfrak{g}$の$\mathfrak{a}$に関するroot系、Λ^+を$\mathfrak{n}$に対応するΛの正のroot全体、ΠをΛ^+のsimple root全体とする.

Aを$\mathfrak{g}$の0でない巾零元とする. この時、Jacobson-Morozovの定理により、Aを含む$\mathfrak{sl}_2$-triplet $\{A, H, \bar{A}\}\subseteq\mathfrak{g}$:

$$[H, A]=2A, \quad [H, \bar{A}]=-2\bar{A}, \quad [A, \bar{A}]=H$$

が存在する. Aの代りに、その適当な$\mathrm{Ad}(G)$-共役を考えることにより、Hは$\mathfrak{a}$のdominant elementと仮定してよい. $\mathfrak{sl}_2$の有限次元表現論により、$\mathrm{ad}\,H$は$\mathfrak{g}$上半単純で、その固有値はみな整数である. $\mathfrak{g}$の$\mathrm{ad}\,H$による固有空間分解を、$\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}(i)_A$と書く. $i\geq 1$に対して、$\mathfrak{n}(i)_A=\sum_{k\geq i}\mathfrak{g}(k)_A$は、$\mathfrak{n}$の部分環であり、$\mathfrak{n}(1)_A$は、放物型部分環$\mathfrak{g}(0)_A\oplus\mathfrak{n}(1)_A$の巾零根基である. $(\xi_A, \mathcal{H}_A)$を、$\mathfrak{n}(1)_A$上の線型形式$X\mapsto B(X, \theta A)$ (Bは$\mathfrak{g}$のKilling形式) にKirillovの方法で対応する、$N_A=\exp\mathfrak{n}(1)_A$の既約unitary表現とする. この時、次で定まるGの表現$(\pi_A, C^\infty(G;\xi_A))$を考える:

$$C^\infty(G;\xi_A)=\{f: G\to\mathcal{H}_A;\ C^\infty\text{-函数},\ f(gn)=\xi_A(n)^{-1}f(g),\ g\in G,\ n\in N_A\},$$

$$(\pi_A(g)f)(x)=f(g^{-1}x), \quad f\in C^\infty(G;\xi_A), \quad g, x\in G.$$

$C^\infty(G;\xi_A)$に通常のSchwartz位相を導入すると、π_AはGのsmoothな表現となる. π_Aは、表現の同値類としては、

$\mathfrak{sl}_2$-tripletの取り方に依らずAに依ってのみ定まる．更には、Aを通る巾零Ad(G)-軌道に依ってのみ定まる．

<u>定義.</u> 表現$(\pi_A, C^\infty(G;\xi_A))$を、Aに対応する(もしくは、Aを通る巾零Ad(G)-軌道に対応する) <u>generalized Gelfand-Graev (g.G.G)表現</u>と呼ぶ．

<u>注意.</u> Aが$\mathfrak{g}$の正則巾零元の場合には、$N_A=N$であり、ξ_AはNの非退化なunitary指標である．この時、π_AはもともとG.G.表現と呼ばれていたものである．ここで、Nの一次元表現ηが非退化とは、$\eta|_{\exp \mathfrak{g}_\lambda} \neq 1$, ${}^\forall\lambda \in \Pi$ が成立つことをいう($\mathfrak{g}_\lambda$ は λ の root空間)．

<u>§3. 超函数空間 $\mathcal{T}_A$, $\mathcal{T}_A^s$.</u>

Gの既約表現からg.G.G.表現への、intertwining作用素を考察する際に現われる超函数の台について調べる．

<u>3.1.</u> $\mathfrak{g}_\mathbb{C}=\mathfrak{g}\otimes_\mathbb{R}\mathbb{C}$の展開環$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$を、G上の右不変微分作用素全体と同一視する．Gの開集合Ω上の超函数Tに対し、$D\in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$による微分DTを$\langle DT, \varphi\rangle=\langle T, D'\varphi\rangle$, $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$により定める．ここで、$D\mapsto D'$は、$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$のprincipal antiautomorphism.

$P_A = N_G(N_A)$ を、N_Aを巾単根基として持つGの放物型部分群、$P_A = L_A N_A$をそのLevi 分解とする．$\overline{P}_A = \theta P_A$とおく．$W = N_K(\mathfrak{a})/M$, $M = Z_K(\mathfrak{a})$を$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$の Weyl群とし、各$s \in W$ に対し、$N_K(\mathfrak{a})$におけるsの代表元s^*を１つ取っておく．$W(A) = N_{K\cap L_A}(\mathfrak{a})/M$を$W$の部分群とみなし、商空間$W/W(A)$の、$W$における１つの完全代表系$W_A$ をとる．この時、Gの$(MA_pN, \overline{P}_A)$に関するBruhat 分解は、$G = \coprod_{s\in W_A} G_s$, $G_s = N s^* \overline{P}_A$ で与えられる．$\Omega_s = G_s \cup (\bigcup_{s'} G_{s'})$ （s'は$\dim G_{s'} > \dim G_s$ なる $s' \in W_A$を動く）はGの開集合で、G_sはΩ_sの閉部分多様体になる(c.f., [9, Lemma 1.7])．いま、G (resp. Ω_s)上の超函数空間$\mathcal{J}_A$ (resp. $\mathcal{J}_A^s$)を次の如く定める．

$$\mathcal{J}_A = \left\{ T \in C_0^\infty(G)' ;\ \begin{array}{l} \text{(i)}\ XT = -\sqrt{-1}\,B(X, \theta A)T,\quad \forall X \in \mathfrak{n}(2)_A \\ \text{(ii)}\ T\text{はCasimir作用素}\Delta\text{の固有超函数} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{J}_A^s = \{ T \in C_0^\infty(\Omega_s)' ;\ \text{(i), (ii) および}\ \mathrm{spt}(T) \subseteq G_s \}.$$

ここで、$\mathrm{spt}(T)$はTの台を表す．

我々は、次の方法で$T \in \mathcal{J}_A^s$ の台について調べる：$x \in \mathrm{spt}(T)$とする．xの十分小さな開近傍Q ($\subseteq \Omega_s$)上で、Tは$Q \cap G_s$上の超函数の transversal な方向微分の１次結合として、一意的に表示される．条件(i)と上の表示を用いて、ΔTについても同様の表示を計算する．$\Delta T = \zeta T$ ($\zeta \in \mathbb{C}$) とする．$0 = \Delta T - \zeta T$ のQにおける表示の一意性から、各微分

を係数とする超函数を辺々比較して、$z \in \mathrm{spt}(T)$なるzの必要条件を求める．かくして、次の命題を得る．

<u>命題 1.</u> 任意の$T \in \mathcal{J}_A^s$の台は、次で定義されるG_sの閉部分多様体D_A^sに含まれる．

$$D_A^s = \left\{ z = ns^*\bar{p} \ ; \ \begin{array}{l} n \in N \cap s^* N_A s^{*-1}, \quad \bar{p} \in \bar{P}_A, \\ B(\mathrm{Ad}(n)X, \theta A) = 0, \quad {}^\forall X \in \mathfrak{n}(2)_A \cap \mathrm{Ad}(s^*)\theta\mathfrak{n}_A \end{array} \right\}.$$

<u>系</u>　Aは$\mathfrak{g}$の正則巾零元であるとする．このとき、

(i)　$W(A) = \{1\}$であり、$s \neq 1, \in W$ならば、$D_A^s = \phi$が成立つ．したがって、このとき$\mathcal{J}_A^s = (0)$．

(ii) 制限写像$\mathcal{J}_A \ni T \longmapsto T|_{\Omega_1} \in \mathcal{J}_A^1$は単射である．

系の主張自身は、Shalikaにより既に示されている([9, Prop. 2.10])．この事実は、Gがquasi-splitの場合に、G.G.表現がmultiplicity freeになることを証明する過程で、重要な位置を占めた．一般のGに対して、主系列表現のG.G.表現における重複度の評価も、この系から容易に得られる．

<u>3.2.</u> 我々が本稿で問題にするg.G.G.表現を特定する．次の3.3において、それらに命題1をapplyする．

これ以後（5.1と5.2は除く）、Gは線型、単純で、G/Kは

Hermite対称空間と仮定する. G/K上の複素構造に対応する $\mathfrak{p}$上の Ad(K)-不変複素構造を J とする. このとき、$\mathfrak{k}$の中心の元Z_0が存在し、$J = \mathrm{ad}\,Z_0|_{\mathfrak{p}}$が成立つ. $\mathfrak{t}$を$\mathfrak{g}$の compact Cartan部分環、Σを$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$の root系とする. $\sqrt{-1}\,\mathfrak{t}^*$に、次の条件を満す線型順序を入れ、$\Sigma^+$を、対応する正の root系とする: αが正の *non-compact root* $\Leftrightarrow$ $\alpha(Z_0) = \sqrt{-1}$. $\alpha \in \Sigma$に対し、αの root vector X_αを次の様にとる:

$$X_\alpha - X_{-\alpha}\,,\ \sqrt{-1}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \in \mathfrak{k} \oplus \sqrt{-1}\,\mathfrak{p}\,,\ [X_\alpha, X_{-\alpha}] = H'_\alpha .$$

H'_αは、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$の Killing形式により、co-root $\alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ に対応する$\sqrt{-1}\,\mathfrak{t}$の元.

$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\ell)$を、次の条件(i)~(iii)を満す正の *non-compact root*の列とする: (i) $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_\ell$, (ii) $\mathfrak{a} = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{R}(X_{\gamma_k} + X_{-\gamma_k})$は$\mathfrak{p}$の極大可換部分空間, (iii) $i \neq j \Rightarrow \gamma_i \pm \gamma_j \notin \Sigma$. いま、$\mu = \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{4}(\sum_{k=1}^{\ell} X_{\gamma_k} - X_{-\gamma_k}))$ とおくと、$\mu(X_{\gamma_k} + X_{-\gamma_k}) = H'_{\gamma_k}$. また、$\lambda_k = \gamma_k \circ \mu|_{\mathfrak{a}}$ とおくと、$(\lambda_k)_{k=1}^{\ell}$ は$\mathfrak{a}^*$の直交基底になる. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$の root系$\Lambda$に、$\Lambda^+ = \Sigma^+ \circ \mu|_{\mathfrak{a}} \setminus \{0\}$なる順序を入れると、$\Lambda^+$は次のいずれかになる(*restricted root theorem*, c.f., [5]).

(Case I) $\Lambda^+ = \{\frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_m)\,;\ k > m\} \cup \{\frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_m)\,;\ k \geq m\}$,

(Case II) $\Lambda^+ = \{\frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_m); k > m\} \cup \{\frac{1}{2}\lambda_k\,; k\} \cup \{\frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_m); k \geq m\}$.

(Case I) は、丁度G/Kが tube domainに解析同型になる場合

である.

$1 \leq k \leq \ell$ に対し、$E_k = \frac{\sqrt{-1}}{2}(H'_{\gamma_k} - (X_{\gamma_k} - X_{-\gamma_k}))$ とおく. すると、$E_k \in \mathfrak{g}_{\lambda_k}$. さらに、$H_k = X_{\gamma_k} + X_{-\gamma_k}$, $F_k = b \times \theta E_k$, $b = 2\{\langle \lambda_1, \lambda_1 \rangle B(E_1, \theta E_1)\}^{-1}$ とおくと、$\{E_k, H_k, F_k\}$ は $\mathfrak{sl}_2$-triplet になる. いま、$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_\ell)$, $\varepsilon_k = \pm 1$ $(1 \leq k \leq \ell)$ に対して、$A_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\ell} \varepsilon_k E_k$, $H = \sum_{k=1}^{\ell} H_k$, $\overline{A}_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\ell} \varepsilon_k F_k$ とおくと、$\{A_\varepsilon, H, \overline{A}_\varepsilon\}$ もまた $\mathfrak{sl}_2$-triplet になる. 我々は、A_ε に対応する g.G.G.表現 π_{A_ε} を問題にする.

注意. (i) A_ε, $\varepsilon \in \{1,-1\}^\ell$ は、すべて同一の巾零 $I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-軌道 $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に属する. ここで、$I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の随伴群を表す. (ii) $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}$ は、$\ell+1$ 個の巾零 $Ad(G)$-軌道の和である. その代表系を、$\{A_\varepsilon\}$ のなかから取ることができる. (iii) $\varepsilon = (\varepsilon_k)$, $\varepsilon' = (\varepsilon'_k)$ に対して、A_ε と $A_{\varepsilon'}$ が $Ad(G)$-共役であるための条件は、$\#\{k : \varepsilon_k = 1\} = \#\{k : \varepsilon'_k = 1\}$ が成立つことである. ただし、集合Mの濃度を $\#M$ で表す.

3.3. A_ε に対して、命題1を apply しよう. Weyl 群W は、$W = \mathfrak{S}_\ell \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$ ($\mathfrak{S}_\ell$; ℓ 次対称群) であり、そのΛへの作用は、$(\sigma\delta)\lambda_k = \delta_k \lambda_{\sigma(k)}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$, $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_\ell)$, $\delta_k = \pm 1$ で与えられる. さらに、$W(A_\varepsilon) = \mathfrak{S}_\ell$ ゆえ、$W_{A_\varepsilon} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$

$=\{\delta;\ \delta\in\{1,-1\}^{\ell}\}$ と取れる．また、$\mathfrak{g}=\bigoplus_{|i|\leq 2}\mathfrak{g}(i)$, $\mathfrak{g}(i)=\mathfrak{g}(i)_{A_\varepsilon}$（$\varepsilon$ に無関係）で、

$$\mathfrak{g}(2)=\sum_{k\geq m}\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_k+\lambda_m)},\qquad \mathfrak{g}(1)=\sum_{k}\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}\lambda_k},$$

$$\mathfrak{g}(0)=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{a}\oplus\sum_{k\neq m}\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_k-\lambda_m)},\qquad \mathfrak{m}=\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$$

が成立つ．$\mathfrak{n}(i)=\mathfrak{n}(i)_{A_\varepsilon}$ とおく．

<u>補題2</u>（[8, Th. 4.10]）．$k>m$ なる (k, m) に対し、$\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_k-\lambda_m)}$ 上の正定値２次形式 ζ_{km} が存在して、$\frac{1}{2}(\mathrm{ad}\,X)^2E_m=\zeta_{km}(X)E_k$, $\forall X\in\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_k-\lambda_m)}$ が成立つ．

これより、容易に次の補題を得る．

<u>補題３．</u> $\delta=(\delta_k)\in\{1,-1\}^{\ell}$ とする．$\delta_i=-1$ なる i に対し、

$$\mathrm{Ad}(\exp X)E_i\equiv E_i+\sum_{\substack{r>i\\ \delta_r=1}}\overline{\zeta_{ri}}(X)E_r\ \ \Big(\mathrm{mod.}\sum_{k>m}\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_k+\lambda_m)}\Big),\qquad \forall X\in\mathfrak{n}\cap\mathrm{Ad}(\delta^*)\mathfrak{n}(1)$$

が成立つ．ただし、$\overline{\zeta_{ri}}(X)=\zeta_{ri}(p_{ri}(X))$, $p_{ri}:\mathfrak{n}\to\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_r-\lambda_i)}$ は、$\mathfrak{n}$ の root 空間分解に沿った $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_r-\lambda_i)}$ への射影作用素．

補題３と、$\delta_i=-1$ ならば $E_i\in\mathfrak{g}(2)\cap\mathrm{Ad}(\delta^*)\mathfrak{g}(-2)$ であることに注意して、命題１を用いる．かくして、次の定理を得る．

<u>定理4.</u> $\varepsilon=(\varepsilon_k)$, $\delta=(\delta_k)\in\{1,-1\}^{\ell}$とする．$i_\delta=\max_{\delta_i=-1}(i)$ とおく．この時、$(\varepsilon_{i_\delta},\varepsilon_{i_\delta+1},\cdots,\varepsilon_\ell)$がすべて同符号ならば、$\mathcal{J}^{\delta}_{A_\varepsilon}=(0)$ が成立つ．特に、$\delta\neq\mathbb{1}$ ならば $\mathcal{J}^{\delta}_{A_{\pm\mathbb{1}}}=(0)$, $(\mathbb{1}=(1,\cdots,1))$.

<u>注意.</u> 一般のεに対しては、"$\delta\neq\mathbb{1}\Rightarrow\mathcal{J}^{\delta}_{A_\varepsilon}=(0)$"は成り立たない．$G=Sp(2,\mathbb{R})$, $\varepsilon=(1,-1)$, $\delta=(-1,1)$ で既に反例がある.

<u>系.</u> 制限写像 $\mathcal{J}_{A_{\pm\mathbb{1}}}\ni T\mapsto T|_{\Omega_{\mathbb{1}}}\in\mathcal{J}^{\mathbb{1}}_{A_{\pm\mathbb{1}}}$ (複号同順) は単射.

§4. Reduced generalized Gelfand-Graev 表現.

以後、$A=A_{\mathbb{1}}$ の場合のみを取扱う．3.2での記号を、添字εを略して用いる．Abel群 $\exp\mathfrak{g}(2)$のunitary 指標ηを、$\eta(\exp X)=\exp\sqrt{-1}\,\eta'(X)$, $\eta'(X)=B(X,\theta A)$, $(X\in\mathfrak{g}(2))$ で定める．ηのL_Aにおけるstabilizerを$K(A)$とおくと、$K(A)=K\cap L_A$, 即ち、$K(A)$はL_Aの極大compact部分群になる．N_Aの既約unitary 表現$(\xi,\mathcal{H})=(\xi_A,\mathcal{H}_A)$ を、$Z=K(A)\ltimes N_A$(半直積)の表現$\tilde{\xi}$に、次の如く拡張する.

(Case I). $N_A=\exp\mathfrak{g}(2)$, $\xi=\eta$. 従って、ξは$K(A)$上trivialにZの指標$\tilde{\xi}$に拡張される: $\tilde{\xi}(kn)=\xi(n)$, $k\in K(A)$, $n\in N_A$.

(Case II). $N_A=\exp(\mathfrak{g}(1)+\mathfrak{g}(2))$はtwo-step巾零リー群である．exponencial 写像でN_Aと$\mathfrak{n}(1)$を同一視したとき、N_Aでの積は、

$(U, V)\cdot(U', V') = (U+U',\ V+V'+\frac{1}{2}[U, U'])$, $U, U' \in \mathfrak{g}(1)$, $V, V' \in \mathfrak{g}(2)$ で与えられる．ξの、Zの表現への拡張を見易くする為に、次の様なξの実現（c.f., [8, 2.C]）が有用である．今、ベクトル空間の同型 $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \underset{\pi}{\rightleftharpoons} \mathfrak{p}$, $\pi(X) = \frac{1}{2}(X - \theta X)$ を用いて、$\mathfrak{p}$上の複素構造Jを$\mathfrak{s}$上に移したものをJ'とする．この時、$J'\mathfrak{g}(1) = \mathfrak{g}(1)$．この$J'$により、$\mathfrak{g}(1)$を複素ベクトル空間と見なす．次に、$Q(U, U_1) = \frac{1}{4}\{[J'U, U_1] + \sqrt{-1}\,[U, U_1]\}$, $U, U_1 \in \mathfrak{g}(1)$とおくと、$Q$は$\mathfrak{g}(1) \times \mathfrak{g}(1)$から$\mathfrak{g}(2)_{\mathbb{C}}$へのsesqui-linear mapになる．さらに、$\langle U, U_1 \rangle = -\eta'(Q(U, U_1))$は、$\mathfrak{g}(1)$上の$K(A)$-不変なHermite内積を定める．但し、$\eta'$は$\mathfrak{g}(2)_{\mathbb{C}}$上の$\mathbb{C}$-線型形式に拡張しておく．このとき、ξは次の様に実現できる：dUを$\mathfrak{g}(1)$上のEuclid測度として、

$$\mathcal{H} = \{\psi;\ \mathfrak{g}(1)\text{上の整函数},\ \ \|\psi\|^2 = \int_{\mathfrak{g}(1)} |\psi(U)|^2 e^{-2\langle U, U\rangle} dU < +\infty\},$$

$$(\xi(n)\psi)(U) = \exp\{2\langle U, U_0\rangle - \langle U_0, U_0\rangle + \sqrt{-1}\,\eta'(V_0)\}\,\psi(-U_0+U),$$

$$U \in \mathfrak{g}(1),\quad n = (U_0, V_0) \in N_A,\quad \psi \in \mathcal{H}.$$

$K(A)$は$\mathcal{H}$に、$(\tilde{\xi}(k)\psi)(U) = \psi(Ad(k)^{-1}U)$, $k \in K(A)$, $\psi \in \mathcal{H}$によりunitaryに作用する．$\tilde{\xi}(kn) = \tilde{\xi}(k)\xi(n)$, $k \in K(A)$, $n \in N_A$とおくことにより、ξはZのunitary表現$\tilde{\xi}$に拡張される．

（Case II, 終）．

さて、$K(A)$の既約unitary表現(c, E_c)を、N_A上trivialに、Zの表現$\tilde{c}$に拡張しておく：$\tilde{c}(kn) = c(k)$, $kn \in K(A)N_A$．

<u>定義</u>. 次の様に定義されるGのsmoothな表現$(\pi_{c,\xi}, C^\infty(G;c,\xi))$を、Aに対応する<u>reduced g. G. G. (r.g.G.G.)表現</u>と呼ぶ.

$$C^\infty(G;c,\xi) = \left\{ f : \begin{array}{l} \text{(i) } E_c\otimes\mathcal{H}\text{に値をもつ}G\text{上の}C^\infty\text{-函数} \\ \text{(ii) } f(gz) = (\tilde{c}\otimes\xi)(z^{-1})f(g),\ (g\in G, z\in Z) \end{array} \right\},$$

$$(\pi_{c,\xi}(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \quad f\in C^\infty(G;c,\xi), \quad x, g\in G.$$

ただし、$C^\infty(G;c,\xi)$には、通常のSchwartz位相を入れる.

<u>§5. Multiplicity one theorem.</u>

(Case I)の場合に、幾つかのr.g.G.G.表現がmultiplicity freeになる事を示す. そのためにまず、5.1 および 5.2 で一般論を展開する(c.f., [1], [4, §6]).

<u>5.1.</u> リー群G上の超函数T, $g\in G$ および Gのdiffeomorphism σに対し、超函数L_gT, R_gT およびT^σを、各々次で定義する: $\langle L_gT, \varphi\rangle = \langle T, L_{g^{-1}}\varphi\rangle$, $\langle R_gT, \varphi\rangle = \langle T, R_{g^{-1}}\varphi\rangle$, $\langle T^\sigma, \varphi\rangle = \langle T, \varphi^\sigma\rangle$, $(\varphi\in C_0^\infty(G))$. ここで、$(L_{g^{-1}}\varphi)(x) = \varphi(gx)$, $(R_{g^{-1}}\varphi)(x) = \varphi(xg^{-1})$, $\varphi^\sigma(x) = \varphi(x^\sigma)$, $(x\in G)$.

ZをGの閉部分群、d, d'をZの指標とする. 超函数$T\in C_0^\infty(G)'$が条件 $L_xR_{x'}T = d(x)d'(x')T$, $(\forall x, x'\in Z)$ を満すとき、Tは(Z, d, d')-準不変であるという.

compactな台をもつ、G上の超函数全体を$C^\infty(G)'$で表す. $C^\infty(G)'$は、convolutionを積として、代数になる. $x\in G$は、

xにおけるDirac測度δ_x, $D\in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$は$D\delta_1$と同一視して、$G,\ U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\subseteq C^\infty(G)'$と見なす.

(π, H)を、GのHilbert空間$(H, (\ ,\ )_H)$上への連続表現とする. C^∞-vector全体$H^\infty(\subseteq H)$上へのGの作用は、$C^\infty(G)'$に$C^\infty(G)'\times H^\infty \ni (T, v)\mapsto \pi_\infty(T)v\in H^\infty$, $(\pi_\infty(T)v, w)_H = \int(\pi(g)v, w)_H T(g)$, $(w\in H)$により拡張される. H^∞は、semi-norm族$\{\|\cdot\|_D;\ D\in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\}$, $\|v\|_D = \|\pi_\infty(D)v\|_H$により、Fréchet空間になる. 各$\pi_\infty(T)$は$H^\infty$上の連続作用素を定め、従って、$C^\infty(G)'$は$H^\infty$の双対空間$H^{*-\infty}$に、$\langle \pi^*_{-\infty}(T)w^*, v\rangle = \langle w^*, \pi_\infty(T^\delta)v\rangle$, $(w^*\in H^{*-\infty},\ v\in H^\infty,\ T\in C^\infty(G)')$により作用する. 但し、$x^\delta = x^{-1}$, $(x\in G)$. (π^*, H^*)を(π, H)の反傾表現としたとき、自然な埋め込み$H^\infty \hookrightarrow H^{-\infty}=(H^*)^{*-\infty}$, $H^{*\infty}\hookrightarrow H^{*-\infty}$は、ともに$C^\infty(G)'$-加群としての埋め込みとなる事に注意しておく.

空間$C^\infty(G;d)=\{f\in C^\infty(G);\ f(gz)=d(z)^{-1}f(g),\ g\in G,\ z\in Z\}$上に、左移動によって定まるGのsmoothな表現をπ_dと書く. 上と同様にして、π_dは$C^\infty(G)'$の表現に拡張される. また、$(H^{*-\infty})^{d'}=\{w^*\in H^{*-\infty};\ \pi^*_{-\infty}(z)w^* = d'(z)w^*,\ \forall z\in Z\}$とおくと、

$$\mathrm{Hom}_{C^\infty(G)'}(\pi_\infty, \pi_d)\simeq (H^{*-\infty})^{d^\delta}\quad (\text{ベクトル空間の同型})$$

が成立つ.

5.2. Gを、中心有限、連結半単純リー群とし、記号は§1

に倣う. H_K を、H の K-finite vector 全体のなす $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-加群、$\gamma \in \hat{K}$ に対し、H_K における γ-成分を H_γ で表す: $H_\gamma = \{v \in H_K ;\ U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})v$ は γ の multiple$\}$. 次の2条件を満す (π, H) を、G の admissible 表現と呼ぶ: (i) $\pi|_K$ は K の unitary 表現、(ii) $\dim H_\gamma < +\infty$, $\forall \gamma \in \hat{K}$. 2つの admissible 表現 (π_i, H_i) $(i=1,2)$ は、$(H_1)_K$ と $(H_2)_K$ が $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-加群として同値なとき、infinitesimal に同値という. $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の中心を $\mathfrak{z}$ で表す.

<u>命題5.</u> G の閉部分群 Z とその指標 d に対し、次の条件 (a) と (b) を満す G の involution β の存在を仮定する. (a) $Z^\beta = Z$, (b) 任意の (Z, d, d^β)-準不変な、$\mathfrak{z}$ の同時固有超函数 T は、$T^\beta = T^j$ を満す. この時、G の既約 admissible 表現 (π, H) に関して、次の (i) ~ (iii) が成立つ.

(i) $\dim (H^{-\infty})^{d^\beta} \times \dim (H^{*-\infty})^d \leq 1$. 等号が成立するならば、$\pi^*$ と π^β $(\pi^\beta(x) = \pi(x^\beta))$ は infinitesimal に同値.

(ii) π^* と π^β が同値ならば、$\dim (H^{*-\infty})^d \leq 1$.

(iii) $d^\beta = \bar{d}$ の時、任意の既約 unitary 表現 (π, H) に対して、$\dim (H^{*-\infty})^d \leq 1$.

<u>5.3.</u> 我々が r.g.G.G. 表現を考察する場合に戻る. $G_{\mathbb{C}}$ を、G を含み $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ をリー環とする、連結線型リー群とする. この

subsectionでは、(Case I)のみ取扱う。まず、

補題6. (i) $Y = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\sum_{k=1}^{\ell} H'_{\gamma_k}$ は $\mathfrak{k}$ の中心に属す。(ii) $w_0 = \exp Y$ は、Wの最長元の$N_K(\mathfrak{a})$ における代表元である。(iii) GのCartan対合は、w_0による内部自己同型で与えられる。

Cayley変換μの、$G_{\mathbb{C}}$の内部自己同型への拡張を$\tilde{\mu}$で表す。$G_{\mathbb{C}}$の内部同型βを、$x^\beta = \tilde{\mu}^{-1}(w_0\tilde{\mu}(x)w_0^{-1})$, $(x \in G_{\mathbb{C}})$ で定める。

補題7. βは、$G^\beta = G$, $Z^\beta = Z$ なる$G_{\mathbb{C}}$の*involution*である。更に、βの微分β_*は、$\beta_*|_{\mathfrak{g}(i)} = (-1)^{\frac{i}{2}} \mathrm{Id}|_{\mathfrak{g}(i)}$ $(i = 0, \pm 2)$ を満す。

c を$K(A)$の指標と仮定し、$d = (\tilde{c} \otimes \tilde{\xi})^j$ とおく。このとき、

命題8. 任意の(Z, d, d^β)-準不変な、Casimir作用素の固有超函数Tは、$T^\beta = T^j$ を満す。

証明の概略. Tの代りに、$R_{w_0}T$ を考える。$R_{w_0}T$ に対して、定理4の系を用いれば、命題の証明は、次の事実([1, Prop. 2.3])に帰着される: 任意の$(K(A), c, c)$-準不変なL_A上の超函数Sは、$S^\theta = S^j$ を満す。

補題7と命題8により、(β, d, Z)は、命題5の仮定(a), (b)を満す事が判明した。従って、次の定理が成立する。

<u>定理9.</u> Gを連結、線型単純リー群、G/Kは、tube domainに解析同型なHermite対称空間と仮定する。cをK(A)の指標とする。このとき、Gの既約admissible表現(π, H)に対し、次の(i)〜(iii)が成立つ。

(i) $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi^*_\infty, \pi_{c,\bar{\xi}}) \times \dim \mathrm{Hom}_G(\pi_\infty, \pi_{c,\xi}) \leq 1$.
等号が成立つならば、π^*とπ^βは、infinitesimalに同値。

(ii) π^*とπ^βが同値ならば、$\dim \mathrm{Hom}_G(\pi_\infty, \pi_{c,\xi}) \leq 1$.

(iii) cが$\mathbb{R}$に値をもつ指標の時、任意の既約unitary表現(π, H)に対して、$\dim \mathrm{Hom}_G(\pi_\infty, \pi_{c,\xi}) \leq 1$.

<u>§6. 主系列表現の$\pi_{c,\xi}$における重複度.</u>

(Case I)とは限らぬ一般の場合に、定理4の系を用いて、主系列表現の$\pi_{c,\xi}$における重複度の評価が得られる。$\sigma \in \hat{M}$, $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$に対して、$\bar{P} = MA_\mathfrak{p}\theta N$の表現$\sigma \otimes e^\nu \otimes (1_{\theta N})$から、smoothに誘導されたGの表現を$\pi_{\sigma,\nu}$で表す。このとき、

<u>命題10.</u> $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi_{\sigma,\nu}, \pi_{c,\xi}) \leq \dim \mathrm{Hom}_M((\tilde{c} \otimes \tilde{\xi})|_M, \sigma)$.

<u>注意</u>. 整数 $q \geq 0$ に対し、$\mathfrak{g}(1)$ 上の q 次同次正則多項式全体を、P_q で表す. P_q は $\tilde{\xi}(K(A))$-不変で、p.11で定義された $\tilde{\xi}$ の表現空間 $\mathcal{H}$ は、$\mathcal{H} = \sum_{q=0}^{\infty}{}^{\oplus} P_q$（直交直和）と表される. また、(Case II) においては、Mに含まれる、K(A)の central, one parameter 部分群 C^+ で、その $\mathfrak{g}(1)$ への作用が次の形で表されるものが存在する: $Ad(k_0)|_{\mathfrak{g}(1)} = a(k_0)\, Id|_{\mathfrak{g}(1)}$, $\forall k_0 \in C^+$, a は C^+ の non-trivial な unitary 指標. この2つの事実より、(c, σ) が与えられたとき、高々1つの $q = q(c, \sigma)$ があって、$Hom_M((\tilde{c} \otimes \tilde{\xi})|_M, \sigma) \simeq Hom_M(E_c \otimes P_q, \sigma)$ となることが示される. 従って、命題10の不等式の右辺は有限である.

References

[1] Y. Benoist, Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels, Mém. Soc. Math. France, 2e série, No. 15 (1984), 1-37.

[2] M. Hashizume, Whittaker models for representations with hightest weights, Lec. in Math., Kyoto Univ., No. 14 (1982), 51-73.

[3] N. Kawanaka, Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality, Advanced studies in Pure Math., 6 (1985), 175-206.

[4] B. Kostant, On Whittaker vectors and representation theory, Invent. Math., 48 (1978), 101-184.

[5] C. C. Moore, Compactifications of symmetric spaces II: The Cartan domains, Amer. J. Math., 86 (1964), 358-378.

[6] M. E. Novodvorskii - I. I. Piatetski Shapiro, Generalized Bessel models for a symplectic group of rank 2, Math. USSR Sb., Vol. 19 (1973), No. 2, 246-274.

[7] M. E. Novodvorskii, On uniqueness theorems for generalized Bessel models, Math. USSR Sb., Vol. 19 (1973), No. 2, 275-287.

[8] H. Rossi - M. Verge, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, J. Funct. Anal., 13 (1973), 324-389.

[9] J. A. Shalika, The multiplicity one theorem for GL_n, Annals of Math., 100 (1974), 171-193.

[10] H. Yamashita, On Whittaker vectors for generalized Gelfand-Graev representations of semisimple Lie groups, preprint (1984).