

Characteristic varieties of highest weight modules and primitive quotients

東北大理 谷崎 修之 (Toshiyuki Tanisaki)

30. 序

0.1 本稿では, 半単純 Lie 環の最高 weight 加群及び包絡環の primitive quotient の特性多様体について述べる。特に包絡環の primitive ideal はその特性多様体により特徴付けられるのではないかとする Borho-Brylinski の問題 ([BoB-2]) について考察する。

0.2 まず話の出発点となる Beilinson-Bernstein 同値について述べる。 $G \in \mathbb{C}$ 上の連結半単純 Lie 群, $\mathfrak{g}$ とその Lie 環, $U(\mathfrak{g})$ と $\mathfrak{g}$ の包絡環とする。また $X \in G$ の旗多様体とし $\mathcal{O}_X$ と X 上の線形微分作用素のなす環の層とある。 G の X への自然な作用により環準同型写像 $U(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ が導かれる。よって $U(\mathfrak{g})$ -加群 M に対して $\mathcal{O}_X$ -加群 (の層) $\mathcal{O}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$ が定まる。

Prop. 0.1 ([BeB]) 対応 $M \mapsto \mathcal{O}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$ は, 自明な中心指標を持つ有限生成 $U(\mathfrak{g})$ -加群のなす $\mathbb{C}$ 上の abel 圏と, 連接的 $\mathcal{O}_X$ -加群のなす $\mathbb{C}$ 上の abel 圏の同値を導く。■

0.3 有限生成 $U(\mathfrak{g})$ -加群 M に対してその随伴多様体 (associated variety) $V(M)$ が, $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ の部分代数

多様体として定義される。以下しばしば Killing 形式により $\mathfrak{g}^+$ と $\mathfrak{g}$ を同一視して $V(M)$ を $\mathfrak{g}$ の部分代数多様体と置く。また直接的 $\otimes_X$ -加群 M に対してその特性多様体 (characteristic variety) $Ch(M)$ が余接束 T^*X の部分代数多様体として定義される。 $V(M)$, $Ch(M)$ の定義は例えば [BoB2] を参照せよ。自明な中心指標をもつ有限生成 $U(\mathfrak{g})$ -加群 M に対して $Ch(\otimes_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M)$ を単に $Ch(M)$ と書く。 $Ch(M)$ と $V(M)$ の関係は次のとおり。 $T^*X \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{g}^+ \cong \mathfrak{g} \in G \times X$ の作用から導かれる自然な写像とする (moment map)。このとき,

Prop. 0.2 ([BoB2]) M が自明な中心指標をもつ有限生成 $U(\mathfrak{g})$ -加群なら, $V(M) = \sigma(Ch(M))$ である。」

0.4 以下の目的は, 自明な中心指標をもつ既約な最高 weight 加群 L , ある $\mathfrak{h}$ は自明な中心指標をもつ $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal I による $U(\mathfrak{g})$ の商 $U(\mathfrak{g})/I$ によってその随伴多様体及び特性多様体を考察する事である。 $V(U(\mathfrak{g})/I)$ がどうなるかは知られていない (Prop. 2.6, Joseph, 註 4, Borho-Brylinski)。 $V(L)$ を全ての L によって求める事と, $Ch(U(\mathfrak{g})/I)$ を全ての I によって求める事は同値である (Prop. 1.4, Borho-Brylinski)。よって問題は

Problem 0.3 自明な中心指標をもつ既約最高 weight 加群 L に対して $Ch(L)$ を決定せよ。」

『Problem 0.4 自明な中心指標をもつ $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal I に対して $\text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I)$ を決定せよ。』

I に与えた事から Problem 0.3 が解ければ Problem 0.4 も解ける事になる。

[0.5] G が A_m 型 のときには Problem 0.3, 0.4 の答は予想と一致しており $m \leq 5$ で確かめられている (§3.1)。しかし一般の場合の予想はまだない。

本稿では Problem 0.3, 0.4 に関して知られている幾つかの部分的結果を組み合わせて, G の rank が 3 以下のときに $\text{Ch}(L)$ 及び $\text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I)$ を決定する。Borho-Brylinski ([BoB2]) は $\text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I)$ が常に既約であることと予想したが, 我々の計算から B_3, C_3 型で反例が存在する事もわかる。また本稿ではこの Borho-Brylinski 予想の一つの修正案を提出する (Conjecture 4.1)。これが正しいければ次の予想が正しい事わかる。

『Conjecture 0.5 自明な中心指標を持つ $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal 全体の集合を $\mathcal{X}_0$ とする。

(i) $I_1, I_2 \in \mathcal{X}_0$ に対して $\text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I_1) = \text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I_2)$ ならば $I_1 = I_2$ である。

(ii) $\mathcal{X}_0$ と $\bigsqcup_{\mathfrak{o} \in \text{Nilp}_{\text{sp}}} \overline{\text{Irr}(\text{Conm}^+)}$ の間に自然な一対一対応がある。そこで Nilp_{sp} は $\mathfrak{g}$ の特殊巾零共役類の集合 (§2.3),

$\mathfrak{m}^+$ は G の $\mathfrak{u}$ と $\mathfrak{o}$ の Borel 部分群の unipotent radical の Lie 環,
 $\text{Irr}(\overline{\mathfrak{O}(\mathfrak{m}^+)})$ は $\overline{\mathfrak{O}(\mathfrak{m}^+)}$ の既約成分の集合である。■

§1. 特性多様体

[1.1] G の Borel 部分群 B 及び B に含まれる G の極大 Torus H をとり固定する。 $\mathfrak{o}, \mathfrak{g}$ をそれぞれ B, H の Lie 環とする。
 Δ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ の root 系, Δ^+ を $\mathfrak{o}$ に対応する正 root の全体として
 $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha \in \mathfrak{g}^+$ とおく。 W を Weyl 群とする。 $w \in W$ に
 対して $-\rho - w\rho$ は最高 weight に持つ Verma 加群 M_w , Σ の
 既約成分 L_w とする。 自明な中心指標をもつ有限生成 $\mathbb{C}(\mathfrak{g})$ -
 加群であって B -作用をもつものからなる abel 圏を $\mathcal{O}_0$ と
 書く。 M_w, L_w は $\mathcal{O}_0$ の対象で, $\mathcal{O}_0$ の Grothendieck 群 $K(\mathcal{O}_0)$
 は,

$$K(\mathcal{O}_0) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[M_w] = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[L_w]$$

と分解される。

[1.2] B の unipotent radical の Lie 環 $\mathfrak{u} \in \mathfrak{m}^+$ とする。
 また $X = G/B$ の B -軌道への分解 $X = \bigsqcup_{w \in W} X_w$ ($X_w = BwB/B$)
 とする。 $M \in \mathcal{O}_0$ ならば $V(M)$ は $\mathfrak{m}^+$ の部分代数多様体である。
 すると $\text{Ch}(M) \subset \delta^+(V(M)) \subset \delta^+(\mathfrak{m}^+) = \bigsqcup_{w \in W} T_{X_w}^+ X = \bigcup_{w \in W} \overline{T_{X_w}^+ X}$ 。こ
 こで $T_{X_w}^+ X$ は X_w の余法束とする。 特性多様体の包含性により
 $\text{Ch}(M)$ の任意の既約成分はある $w \in W$ に対する $\overline{T_{X_w}^+ X}$ と一致

ある。 $\text{Ch}(M)$ の各既約成分 γ の重複度 ε を決めることにすると、 M の特性 cycle (characteristic cycle) $\underline{\text{Ch}}(M) \in \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}_{\geq 0} [\overline{T_{X_w}^+ X}]$ が定義される。 $\underline{\text{Ch}}$ の加減法性により、 $\underline{\text{Ch}}$ は $\mathbb{Z}$ -線形写像

$$K(\mathcal{O}_\Delta) \xrightarrow{\underline{\text{Ch}}} \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z} [\overline{T_{X_w}^+ X}]$$

に与えられる。 $\underline{\text{Ch}}(L_w) = \sum_{y \in W} m(y, w) [\overline{T_{X_y}^+ X}]$ により $m(y, w) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と定め $\Sigma(w) = \{y \in W \mid m(y, w) > 0\}$ とおくと、 $\text{Ch}(L_w) = \bigcup_{y \in \Sigma(w)} \overline{T_{X_y}^+ X}$ である。

[1.3] Prop. 0.1 により、 $\mathcal{O}_\Delta$ は、直接和 $\mathcal{O}_X$ -加群であり、 $\mathbb{C}$ -作用をもち $\mathcal{O}_\Delta$ を含む abel 圏 $\mathcal{M}$ と同値である。 §1.2 により $\mathcal{M}$ の対象が holonomic になる事は明らかだが、 ± 3 に regular holonomic になる事がわかる ([BK])。 実際 $\partial X_w = \overline{X_w} - X_w$ とおくと、 $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}(\Delta)} L_w \cong \pi^* (\mathcal{B}_{X_w} |_{X - \partial X_w})$ である。 $\pi^* (\mathcal{B}_{X_w} |_{X - \partial X_w}) = H_{X_w}^{\text{codim } X_w} (\mathcal{O}_{X - \partial X_w})$ 、 $\pi^* (\mathcal{B}_{X_w} |_{X - \partial X_w})$ は $\mathcal{O}_{X - \partial X_w}$ の minimal extension である。

W は Bruhat order $\leq$ と書く ($y \leq w \iff X_y \subset \overline{X_w}$)。 また W の単純鏡影の全体 S とする。 $w \in W$ に対して $L(w) = \{s \in S \mid sw < w\}$ 、 $R(w) = \{s \in S \mid ws < w\} = L(w^{-1})$ とおく。

Lemma 1.1

- (i) $w \in \Sigma(w)$ であり $m(w, w) = 1$ 。
- (ii) $y \in \Sigma(w)$ ならば $y \leq w$ 。
- (iii) $y < w$ とする。 X_y は $\overline{X_w}$ 中の non-singular $\mathbb{A}^1$ である。

$m(y, w) = 0$ 。特に w が W の放物型部分群の最大元なる $\Sigma(w) = \{w\}$ 。

(iv) $y \in \Sigma(w)$ ならば $\mathcal{L}(y) \supset \mathcal{L}(w)$ 。■

(証明) (i), (ii), (iii) は $\bigotimes_X \bigoplus_{\mathbb{Q}} L_w \cong \pi(B_{X_w}|X - \partial X_w)$ により明か。

(iv) は次から従う。 B を含む放物型部分群で Levi part の Weyl 群が $W_1 = \langle \mathcal{L}(w) \rangle$ となるもの $\in P$ とすると, X の P -軌道への分解は $X = \bigsqcup_{y \in W_1 \backslash W} (P_y B / B)$ で与えられる, これは X の Whitney stratification になる。また X_y が $P_y B / B$ 中で open になるための条件は $\mathcal{L}(y) \supset \mathcal{L}(w)$ である。■

1.4 G の $X \times X$ への対角型作用の軌道分解は $X \times X =$

$\bigsqcup_{w \in W} D_w$ ($D_w = G \cdot (eB, wB)$) で与えられる。 $X \times X$ から第一成分への射影により $X \times X \cong X = G/B$ 上の fiber 束を考えると,

$X \times X \cong G^B \backslash X$, また $D_w = G^B \backslash X_w$ である。よって直接的

$\bigotimes_{X \times X}$ -加群であって G -作用をもつもののつくる abel 圏を

$\mathcal{N}$ と書くと, $\mathcal{N} \xrightarrow{i^*} \mathcal{M}$ である。ここで $X \xleftarrow{i} X \times X$ は

$i(gB) = (eB, gB)$ により与えられるものとする。 $\mathcal{M}_w, \mathcal{L}_w \in \mathcal{N}$

を $i^*(\mathcal{M}_w) = \bigotimes_X \bigoplus_{\mathbb{Q}} M_w$, $i^*(\mathcal{L}_w) = \bigotimes_X \bigoplus_{\mathbb{Q}} L_w$ により定める。

$\mathcal{L}_w \cong \pi(B_{D_w}|X \times X - \partial D_w)$ がわかる。 $\mathcal{M} \in \mathcal{N}$ ならば $\text{Ch}(\mathcal{M}) \subset$

$\bigcup_{w \in W} \overline{T_{D_w}^+(X \times X)}$ である。 $Z_w = \overline{T_{D_w}^+(X \times X)}$ とおくと §1.2 と同様に

$\mathcal{K}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\text{Ch}} \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[Z_w]$ が定まり

$$\begin{array}{ccc}
 K(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_w] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 K(\mathcal{O}_0) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[\overline{T_{X_w} X}]
 \end{array}$$

は可換である。ここで左のタテ方向の写像は $\mathcal{V} \xrightarrow{i^*} \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{O}_0$ により導かれる同型写像、右のタテ方向の写像は $[\mathbb{Z}_w] \mapsto [\overline{T_{X_w} X}]$ により定まる $\mathbb{Z}$ -線型写像である。特に $\underline{\text{Ch}}(\mathcal{L}_w) = \sum_{y \in W} m(y, w) [\mathbb{Z}_w]$ となる。さて $X \times X \xrightarrow{\delta} X \times X$ ($(g_1 B, g_2 B) \mapsto (g_2 B, g_1 B)$) は G -作用を保つ同型写像で $j(\mathcal{O}_w) = \mathcal{O}_{w^{-1}}$ 。

よって $j^*(\mathcal{L}_w) = \mathcal{L}_{w^{-1}}$ 。よって

$$\begin{array}{ccc}
 K(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_w] \ni [\mathbb{Z}_w] \\
 j^* \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\
 K(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_w] \ni [\mathbb{Z}_{w^{-1}}]
 \end{array}$$

が可換な事が次の如くなる。

Lemma 1.2 $m(y, w) = m(y^{-1}, w^{-1})$ 。特に $\Sigma(w) = (\Sigma(w^{-1}))^{-1}$ 。

よって $y \in \Sigma(w)$ ならば $R(y) \supset R(w)$ である。

[1.5] Weyl 群の左 cell 等概念について復習する ([J1], [KL1] 参照)。 $K(\mathcal{O}_0)$ 中で $[\mathcal{L}_w] = \sum_{y \in W} a(y, w) [M_y]$ とある。整数 $a(y, w)$ は (少なくとも原理的には) 計算可能である (Kashdan-Lusztig 予想 [KL1], [BeB], [BK] により証明された)。そこで $a(w) = \sum_{y \in W} a(y, w) y \in \mathbb{C}[W]$ とおくと、 $\mathbb{C}[W] = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{C} a(w)$ 。 $\{a(w) \mid w \in W\}$ のある部分集合で張られ

よって $\mathbb{C}[W]$ の部分空間を " Q -基底型部分空間" と呼ぶ。

$w \in W$ に対して $Q(w)$ を含む Q -基底型部分空間のうちで W の左作用 に関して不変な最小のもの $\bar{V}_w^L$ と書く。また W 上の

preorder $\preceq$ 及び同値関係 $\sim$ を, $[w] \preceq [y] \iff \bar{V}_w^L \supset \bar{V}_y^L$, $[w] \sim [y] \iff \bar{V}_w^L = \bar{V}_y^L$ により定める。 $\sim$ の同値類を左 cell といい、

$V_w^L := \bar{V}_w^L / \sum_{\bar{V}_y^L \subsetneq \bar{V}_w^L} \bar{V}_y^L$ を W の表現を左 cell 表現という。

w を含む左 cell を C_w^L と書く。 C_w^L に対応して V_w^L の基底が定まる。下線部の W の左作用 を W の右作用 (あるいは $W \times W$ の両側作用) に置き換えて, $\bar{V}_w^R, \preceq_R, \sim_R, V_w^R, C_w^R$ (あるいは $\bar{V}_w^{LR}, \preceq_{LR}, \sim_{LR}, V_w^{LR}, C_w^{LR}$) が全く同様に定義される。

1.4 と同様の議論から (あるいは Kazhdan-Lusztig 予想から) $Q(y, w) = Q(y^{-1}, w^{-1})$ が成り立つので $[w] \preceq [y] \iff [w^{-1}] \preceq [y^{-1}]$ 。また $[w] \sim [y] \iff [w^{-1}] \sim [y^{-1}]$ である。 W の既約表現の同型類の集合を $\hat{W}$ と書く。 W の既約表現は全て自己双対的なので $W \times W$ -加群として $\mathbb{C}[W] \cong \bigoplus_{\sigma \in \hat{W}} (\sigma \otimes \sigma)$ である。すなわち $[w] \sim_{LR} [w^{-1}]$ が成り立つ。

[1.6] 自明な中心指標をもつ $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal 全体の集合を $\mathcal{X}_0$ とする。すなわち $\mathcal{X}_0 = \{ \text{Ann } M \mid M \text{ は自明な中心指標を持つ既約 } U(\mathfrak{g})\text{-加群} \}$, ここで $\text{Ann } M = \{ u \in U(\mathfrak{g}) \mid u \cdot M = 0 \}$ である。 $I_w = \text{Ann } L_w$ とおくと Duflo [D] により $\mathcal{X}_0 = \{ I_w \mid w \in W \}$ が知られている。さらに,

「Prop. 1.3 ([J1], [V]) $I_w \subset I_y \Leftrightarrow w \preceq y$, 特に $I_w = I_y \Leftrightarrow w \sim y$ である。」

よって $\mathcal{X}_0 \simeq W/\sim$ である。

[1.7] T^*X は $X = G/B$ 上の fiber 束として $G^{\mathbb{R}^+ m^+}$ と自然に同型である。 I_w は $U(\mathfrak{g})$ の両側 ideal なので $\text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I_w)$ は T^*X の G -不変部分代数多様体である。

「Prop. 1.4 ([BoB2]) $\text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I_w) = G^{\mathbb{R}^+} V(L_{w^{-1}})$ ($\forall w \in W$)」
よって次がわかる。

「Corollary 1.5 ([J3], [BoB2]) $w \preceq_{\mathbb{R}} y \Rightarrow V(L_w) \supset V(L_y)$,
特に $w \sim y \Rightarrow V(L_w) = V(L_y)$ 」

§2. Weyl 群の表現との関係

[2.1] $\mathfrak{g}$ の巾零共役類の集合を Nilp と書く。 $0 \in \text{Nilp}$ に対して, 0 上の G -作用を持つ既約局所系と同型類の集合を $\mathcal{J}_0$ と書く。 $x \in 0 \in \mathfrak{u}$ と固定するとき, $\mathcal{J}_0$ は $A(x) = Z_{G(x)}/Z_{G(x)}^\circ$ の既約表現の同型類の集合 $\hat{A}(x)$ と自然に一対一に対応する。 $\psi \in \mathcal{J}_0 \xleftrightarrow{\sim} \hat{A}(x) \ (\xi \leftrightarrow \chi_\xi)$ とする。
 $\dim X = d$ とおくと $X_x = \{gB \in X \mid x \in g \cdot m^+\}$ は純次元 $d_0 := d - \frac{1}{2} \dim 0$ を持つ。 X_x の top homology 群 $H_{2d_0}(X_x) = (H_c^{2d_0}(X_x, \mathbb{C}))^*$ には W の作用が定義され, $A(x)$ の自然な作用と可換である (Springer 表現, [Spr] 参照)。 $W \times A(x)$ -

加群として $H_{2d_0}(X_x) = \bigoplus_{\xi \in \mathcal{J}_0} (T_{(0,\xi)} \otimes \chi_\xi)$ ($T_{(0,\xi)}$ は W -加群) と分解できるとし, $T_{(0,\xi)}$ は (0) または既約 W -加群になる。ここで $\mathcal{J}_0 = \{\xi \in \mathcal{J}_0 \mid T_{(0,\xi)} \neq (0)\}$ とおくとし,

$\sqcup_{0 \in \text{Nilp}} \mathcal{J}_0 \longrightarrow \widehat{W} \quad (\mathcal{J}_0 \ni \xi \mapsto T_{(0,\xi)} \in \widehat{W})$ は全単射である。

$\xi = (0)$ のとき, および χ_ξ が単位表現のときは明らかに

$T_{(0,\xi)} \neq (0)$ 。 $\psi \in \text{Sp}(0)$ と書く。

一般に純次元代数多様体 Y の既約成分の集合を $\text{Irr}(Y)$ と書く。 $D = \{(y, gB) \in O \times X \mid y \in g\mathfrak{m}^+\}$ は $X = G/B$ 上の fiber 束とあり $D \cong G^B \times (\text{Con}\mathfrak{m}^+)$, $O = G/Z_G(x)$ 上の fiber 束とあり $D \cong G^{\mathbb{Z}_G(x)} \times X_x$ である。 $\mathcal{J}_0 \subset \text{Irr}(X_x)$ から $\text{Irr}(\overline{\text{Con}\mathfrak{m}^+}) \simeq \text{Irr}(\text{Con}\mathfrak{m}^+) \simeq \text{Irr}(CD) \wedge$ の全射

$$(2.1) \quad \text{Irr}(X_x) \xrightarrow{\mathcal{R}} \text{Irr}(\overline{\text{Con}\mathfrak{m}^+})$$

が定義され, 各点 a 近傍は ψ と ψ の $A(x)$ -軌道になる。

$\mathcal{J}_0 \subset \text{Irr}(X_x) / \sim_{A(x)} \text{Irr}(\overline{\text{Con}\mathfrak{m}^+})$ 。 $\text{Sp}(0) = H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ 上の ψ , $\psi \in \text{Irr}(\overline{\text{Con}\mathfrak{m}^+})$ に対して $\mathcal{J}_\psi := \sum_{C \in \mathcal{R}^+(Y)} [C] \in H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ とおくと, $\{\mathcal{J}_\psi \mid \psi \in \text{Irr}(\overline{\text{Con}\mathfrak{m}^+})\}$ は $\text{Sp}(0)$ の基底になる。特に

$\dim \text{Sp}(0) = \#(\text{Irr}(\overline{\text{Con}\mathfrak{m}^+}))$ である。

[2.2] $w \in W$ に対して Joseph の Goldie rank 多項式

$([J_2]) \in P_w$ とする。 および $P_w = \sum_{y \in W} a(y, w)(y^{-1}p)^{m_w}$

$\in S^{m_w}(\mathfrak{g}^+)$ 。 ここで m_w は w が non-zero になる最小の非負整数, また $S^{m_w}(\mathfrak{g}^+)$ は $\mathfrak{g}^+$ の m_w 次対称テンソルのなる空間

である。

Prop. 2.2 ([J2])

$$(i) \mathbb{C}P_w = \mathbb{C}P_y \iff w \sim_L y$$

$$(ii) w \sim_L y \text{ ならば } m_w = m_y.$$

$$(iii) \sigma(w) := \sum_{y \in \mathbb{C}P_w} \mathbb{C}P_y \text{ は } W\text{-不変であり、軌約である。}$$

$$(iv) \sigma(w) = \bigoplus_{y \in \mathbb{C}P_w / \sim} \mathbb{C}P_y$$

$$(v) \dim \operatorname{Hom}_W(\sigma(w), S^m(\mathfrak{g}^+)) = \begin{cases} 0 & m < m_w \\ 1 & m = m_w \end{cases}$$

$$(vi) \sigma(w) \cong \sigma(y) \iff w \sim_L y \quad \blacksquare$$

よって $W/\sim_L \hookrightarrow \hat{W}$ が $w \mapsto \sigma(w)$ により定まる。この像を $\hat{W}_{sp}$ と書く。 $\hat{W}_{sp}$ は Lusztig により定義された“特殊表現”の全体と一致する ([BV1, 2])。

[2.3] ある $O \in \operatorname{Nilp}$ に対して $\overline{O \cap \mathfrak{m}^+}$ の軌約成分に存在するような $\mathfrak{m}^+$ の部分代数多様体と、(O に付随した) 軌道的多様体 (orbital variety) と言う。 $w \in W$ に対して $Y^r(w) = \overline{B \cdot \mathfrak{m}^+ \cap w^{-1}\mathfrak{m}^+}$, $Y^r(w) = \overline{B \cdot \mathfrak{m}^+ \cap w\mathfrak{m}^+}$ とおく。また $O_w^{or} \in \operatorname{Nilp}$ と $\overline{O_w^{or}} = \overline{G \cdot \mathfrak{m}^+ \cap w\mathfrak{m}^+}$ により定める。 $Y^r(w)$, $Y^r(w)$ は O_w^{or} に付随した軌道的多様体である。また任意の軌道的多様体はある $w \in W$ に対する $Y^r(w)$ と一致する ([Et])。

柏原, Gabber の純次元性定理 ([J3, 4] 参照) により $V(L_w)$ は純次元である。また $V(L_w) = \delta(\operatorname{Ch}(L_w)) = \bigcup_{y \in Z(w)} \delta(\overline{\bigwedge_{X_y} X}) = \bigcup_{y \in Z(w)} Y^r(w)$

にあり, $V(L_W)$ の既約成分は軌道的多様体である。

Joseph [J3] は軌道的多様体 (ある $\mathfrak{h}$ はあり一般に $\mathfrak{m}^+$ の $\mathfrak{h}$ -不変部分代数多様体) Y に対して $P_Y \in S^{d-\dim Y}(\mathfrak{g}^+)$ を定義して ($Y \in \overline{\text{Irr}(\text{con } \mathfrak{m}^+)}$) $\dim Y = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{O}$, $d \geq d - \dim Y = d_0$).

Prop. 2.3 ([J3]) $P_{W^{-1}} = \sum_{Y \in \overline{\text{Irr}(V(L_W))}} l_Y P_Y$ ($\exists l_Y > 0$)

± $\text{BoRo-MacPherson [BM]}$ にあり

$$\dim \text{Hom}_W(\text{Sp}(\mathfrak{O}), S^m(\mathfrak{g}^+)) = \begin{cases} 0 & m < d_0 \\ 1 & m = d_0 \end{cases}$$

が Prop 2.4 にある。

Prop. 2.4 ([H]) W -加群としての単純準同型

$\text{Sp}(\mathfrak{O}) \rightarrow S^{d_0}(\mathfrak{g}^+)$ が $\mathfrak{O}_Y \mapsto P_Y$ ($Y \in \overline{\text{Irr}(\text{con } \mathfrak{m}^+)}$) にあり

定まる。

$\text{Prop. 2.2, 2.3, 2.4}$ にあり $\widehat{W}_{\text{Sp}}$ は $\text{Nilp} \xrightarrow{\text{Sp}} \widehat{W}$ の像に入る事からわかる。 $\text{Nilp}_{\text{Sp}} = \{\mathfrak{O} \in \text{Nilp} \mid \text{Sp}(\mathfrak{O}) \in \widehat{W}_{\text{Sp}}\}$ に入る巾零共役類を特殊巾零共役類と云う。 $W/\sim_{\text{LR}} \xrightarrow{\sim} \text{Nilp}_{\text{Sp}} (w \mapsto \mathfrak{O}_w^{\text{LR}})$ が $\text{Sp}(\mathfrak{O}_w^{\text{LR}}) = \sigma(w)$ にあり定まる。 以下以上の議論から,

Prop. 2.5 $\text{Irr}(V(L_W)) \subset \overline{\text{Irr}(\mathfrak{O}_w^{\text{LR}} \cap \mathfrak{m}^+)}$ ($\forall w \in W$)

$d \geq \text{Prop 0.2, 1.4, 2.5}$ にあり

Prop 2.6 (BoRo-Brylinski, Joseph, Hotta 尚 [KT], [Gi] 参照)

$$V(U(\mathfrak{g})/I_w) = \overline{\mathfrak{O}_w^{\text{LR}}} \quad (\forall w \in W)$$

$V(U(\mathfrak{g})/I_w)$ の既約性は, はじめ BoRo にあり予想 ±

た。また [BoB1] で case by case の証明が与えられ、その後上のより統一的証明を得られた。尚 Joseph [J4] は Prop. 1.4 を用い、BII の方法により Prop. 2.6 を示した。

また Prop. 0.2, 2.5 により次の従う。

Lemma 2.7
$$V(L_w) = \bigcup_{y \in Z(w)} Y^r(y) = \bigcup_{\substack{y \in Z(w) \\ O_y^{pr} = O_w^{LP}}} Y^r(y)$$

2.4 $Z = \bigcup_{w \in W} Z_w$ ($Z_w = \overline{V_{D_w}^+(X \times X)}$) は純次元 $2d$ を持つ ($d = \dim X$)。[KL2] により $H_{4d}(Z)$ には $W \times W$ -加群の構造が与えられる。 $W \times W$ -加群として $H_{4d}(Z) \xrightarrow{f} \mathbb{C}[W]$ が $f([Z_e]) = e$ により定まる。 $f([Z_w]) = b(w)$ とおくと、 $\{b(w) \mid w \in W\}$ は $\mathbb{C}[W]$ の基底になる。

Lemma 2.8 ([KL2]) $s \in S, w \in W$ とする。

(i) $sw < w$ ならば $sb(w) = -b(w)$

(ii) $sw > w$ ならば $sb(w) = b(w) + b(sw) + \sum_{sy < y < sw} \delta_s(y, w) b(y)$,

ここで $\delta_s(y, w)$ はある非負整数である。

$\mathbb{C}[W]$ の部分空間であって $\{b(w) \mid w \in W\}$ のある部分集合により張られるものを b -基底型部分空間と呼ぶ。§1.5 の議論で a -基底型部分空間の代わりに b -基底型部分空間を用いる事により、 $\overline{V}_w^+, \overline{\Sigma}, \sim, V_w^+, \mathcal{C}_w^+, \dots, \mathcal{C}_w^{LP}$ に対応するものが定義される。これを $\overline{V}_w^0, \overline{\Sigma}, \sim, V_w^0, \mathcal{C}_w^0, \dots, \mathcal{C}_w^{pr}$ とする。

Lemma 2.9 ([KL2]) $x \in \mathcal{O} \in \text{Nilp}$ とするとき,

$\bigoplus_{\mathcal{O}_x^{\text{gr}} \subset \mathcal{O}} \mathbb{C} b(w)$ ($\subset \mathbb{C}[W]$) は $W \times W$ -不変で, $W \times W$ -加群として

$$\left(\bigoplus_{\mathcal{O}_x^{\text{gr}} \subset \mathcal{O}} \mathbb{C} b(w) \right) / \left(\bigoplus_{\mathcal{O}_x^{\text{gr}} \subset \mathcal{O}} \mathbb{C} b(w) \right) \cong (H_{2d_0}(\mathcal{O}_x) \oplus H_{2d_0}(\mathcal{O}_x))^{A(\mathcal{O}_x)} \\ \cong \bigoplus_{\beta \in \beta_0} (\tau_{(\mathcal{O}, \beta)} \oplus \tau_{(\mathcal{O}, \beta)}) \quad \blacksquare$$

Lemma 2.9 と同様の証明で次がわかる。

Lemma 2.10 γ が軌道的多様体ならば, $\bigoplus_{\gamma^p(w) \subset \gamma} \mathbb{C} b(w)$

(resp. $\bigoplus_{\gamma^r(w) \subset \gamma} \mathbb{C} b(w)$) は W の左作用 (resp. 右作用) で不変である。

特に $w \approx_{\mathbb{Z}} y$ (resp. $w \approx_{\mathbb{Z}} y$) ならば $\gamma^p(w) \supset \gamma^p(y)$

(resp. $\gamma^r(w) \supset \gamma^r(y)$) である。 $\blacksquare$

次の Lemma の成立の可能性は Joseph により筆者に指摘された。証明は appendix に参照。

Lemma 2.11

(i) $w \approx_{\mathbb{Z}} y \iff \gamma^p(w) = \gamma^p(y)$

(ii) $w \approx_{\mathbb{Z}} y \iff \gamma^r(w) = \gamma^r(y)$

(iii) $w \approx_{\mathbb{Z}} y \iff \mathcal{O}_w^{\text{gr}} = \mathcal{O}_y^{\text{gr}} \quad \blacksquare$

2.5 $X \times X \times X \xrightarrow{P_{ij}} X \times X$ は (i, j) 成分への射影と取る。

$K(\mathcal{N})$ 上の積を

$$[\eta_1] \cdot [\eta_2] = \sum_i (-1)^i [H^i(\bigoplus_{\mathcal{O}_{X \times X \times X}} (P_{12}^* \eta_1) \otimes (P_{23}^* \eta_2))] \\ (\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{N})$$

により与えられると, $K(\mathcal{N})$ は $\mathbb{Z}$ 上の algebra になり, $\mathbb{Z}$ -algebra

と $\mathbb{C}$ の同型 $K(Y) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[W]$ が $[m_w] \leftrightarrow w$ により定まる ([LV]). 特に $K(Y)$ は $W \times W$ -加群になる。

Prop. 2.12 ([KT], [T2])

$$K(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{Ch}} H_{4d}(Z) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{C}[Z_w]$$

は $W \times W$ -加群として $\mathbb{C}$ の同型対象である。

$$\text{Ch}(me) = [Ze] \text{ なる } a \text{ で, 24 は}$$

$$\begin{array}{ccc} K(Y) & \xrightarrow{\text{Ch}} & H_{4d}(Z) \\ \downarrow & & \downarrow \text{f} \\ \mathbb{Z}[W] & \hookrightarrow & \mathbb{C}[W] \end{array}$$

が可換である事と同値である。さらに 24 は次とも同値。

Lemma 2.13 $a(w) = \sum_{y \in W} m(y, w) b(y)$

§3. 具体例

3.1 A_n

次の予想 3.1 2.11 ([KT], [BoB2]).

Conjecture 3.1 G が A_n 型なる任意の $w \in W$ に対して $\text{Ch}(L_w) = \overline{T_{X,w}^+ X}$ 。すなわち $\Sigma(w) = \{w\}$ 。

Conjecture 3.2 G が A_n 型なる任意の $w \in W$ に対して $V(L_w) = Y(w)$ 。

Conjecture 3.1 から Conjecture 3.2 が従う事は明らか。
また Conjecture 3.1 は [K12] 中のある予想と同値である事が

Lemma 2.13 からわかる。上の予想は $m \leq 5$ で確かめられている。

[3.2] $V(L_m)$ for C_2, C_3

$$T_m = \begin{bmatrix} & 1 \\ 0 & \\ & \ddots \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_m(\mathbb{C}), \quad J_m = \left[\begin{array}{c|c} 0 & T_m \\ \hline -T_m & 0 \end{array} \right] \in M_{2m}(\mathbb{C})$$

$$\mathfrak{g} = \{x \in M_{2m}(\mathbb{C}) \mid {}^t x J_m + J_m x = 0\}$$

$$\mathfrak{b} = \{\mathfrak{g} \text{ に含まれる上三角行列}\} \quad \mathfrak{m}^+ = \{x \in \mathfrak{b} \mid \text{対角成分が全て0}\}$$

とあると、 $\mathfrak{g}$ は C_m 型の単純 Lie 環、 $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環、 $\mathfrak{m}^+$ は $\mathfrak{b}$ に対応する Borel 部分環の unipotent radical の Lie 環である。また Weyl 群 W は $2m$ 個の文字 $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ の置換 w で $w(i) = -w(i)$ ($\forall i$) を満たすものの全体と同一視される。 $w(i) = a_i$ ($i=1, \dots, m$) のとき $w = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ と書く。

$$s_1 = (-1, 2, 3, \dots, m), \quad s_2 = (2, 1, 3, 4, \dots, m), \quad \dots, \quad s_m = (1, 2, \dots, m-2, m, m-1)$$

とあると $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ が単純鏡影全体になる。

自然数 m の分割の集合を P_m と書く。すなわち $P_m =$

$$\{(1^{m_1} 2^{m_2} \dots m^{m_m}) \mid \sum_{i=1}^m i m_i = m\}.$$

また $P_{2m}^c = \{(1^{m_1} 2^{m_2} \dots) \in P_{2m} \mid$

i が奇数ならば m_i は偶数 $\}$ とおく。 $\alpha = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots) \in P_m$ に対して、

$M_m(\mathbb{C})$ 中の巾零行列であってその Jordan 標準形における i 次 Jordan block の数が m_i 個であるようなものの全体を C_α と書く。

よく知られているように、 $\alpha \in P_{2m}^c$ に対して $C_\alpha \cap \mathfrak{g}$ が空でない

ための条件は、 $\alpha \in P_{2m}^c$ とある事である。また $\alpha \in P_{2m}^c$ に対して

$C_\alpha = C_\alpha \cap \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ 中の一つの巾零共役類をなす。 $\alpha \geq \beta$

場合 $\text{Nilp} \simeq P_{2m}^C$ 。また $\sigma \in P_{2m}^C$ に対し $\overline{O_\sigma} = \overline{C_\sigma} \cap \mathfrak{g}$ が知られている。よって $\overline{O_\sigma \cap \mathfrak{m}^+} = \overline{O_\sigma} \cap \mathfrak{m}^+ = \overline{C_\sigma} \cap \mathfrak{m}^+$ 。 $\sigma \in P_m$ に対し、 $M_m(\mathbb{C})$ 上の多項式関数の族 $\{f_i^\sigma \mid i \in I_\sigma\}$ であって $\overline{C_\sigma} = \{x \in M_m(\mathbb{C}) \mid f_i^\sigma(x) = 0 \ (\forall i \in I_\sigma)\}$ なるものが、[T3]で具体的に与えられている。よって $\sigma \in P_{2m}^C$ のとき、 $\overline{O_\sigma \cap \mathfrak{m}^+} = \{x \in \mathfrak{m}^+ \mid f_i^\sigma(x) = 0 \ (\forall i \in I_\sigma)\}$ となる。この事を用いて C_2, C_3 のとき軌道的多様体を具体的に計算すると次のとおり。 Nilp と P_{2m}^C ($m=2,3$) と同一視し、 $(1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$ に対応する巾零共役類に付随する軌道的多様体を $(1^{m_1} 2^{m_2} \dots)_1, (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)_2, \dots$ により表わす。

ci) C_2

$$\text{Nilp} = \{(4), (2^2), (1^2 2), (1^4)\}$$

$$\mathfrak{m}^+ = \left\{ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & a & c & b \\ 0 & 0 & d & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

- $(4)_1 = \mathfrak{m}^+$ • $(2^2)_1 = \{a=0\}$, $(2^2)_2 = \{d=0\}$
- $(1^2 2)_1 = \{a=0, c^2 - bd = 0\}$ • $(1^4)_1 = \{0\}$

cii) C_3

$$\text{Nilp} = \{(6), (24), (1^4 2), (3^2), (2^3), (1^2 2^2), (1^4 2), (1^6)\}$$

$$\mathfrak{m}^+ = \left\{ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & a & b & f & e & d \\ 0 & 0 & c & h & g & e \\ 0 & 0 & 0 & k & k & f \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -c & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \mid a, \dots, k \in \mathbb{C} \right\}$$

- $(6)_1 = m^+$
- $(24)_1 = \{a=0\}$, $(24)_2 = \{c=0\}$, $(24)_3 = \{e=0\}$
- $(1^24)_1 = \left\{ a=0, \det \begin{bmatrix} b & f & e & d \\ c & h & g & e \\ 0 & k & h & f \\ 0 & 0 & -c & -b \end{bmatrix} = 0 \right\}$, $(1^24)_2 = \left\{ \begin{array}{l} c=0 \\ h^2 - gk = 0 \end{array} \right\}$
- $(3^2)_1 = \{c=0, a^2g + 2abk + b^2e = 0\}$, $(3^2)_2 = \{a=e=0\}$
 $(3^2)_3 = \{e=0, ag + 2bk - 2cf = 0\}$
- $(2^3)_1 = \{a=b=c=0\}$, $(2^3)_2 = \{a=e=0, bk - cf = 0\}$
 $(2^3)_3 = \{c=0, h^2 - gk = 0, ag + bk = 0, ah + be = 0\}$
- $(1^22^2)_1 = \{a=b=c=0, f^2g + h^2d + e^2k - gkd - 2chf = 0\}$
 $(1^22^2)_2 = \{c=k=h=g=0\}$
 $(1^22^2)_3 = \left\{ \begin{array}{l} a=e=0, bk - cf = 0, f^2g + h^2d - 2chf = 0 \\ b^2g + c^2d - 2bce = 0, bgf + chd - cef - beh = 0 \end{array} \right\}$
- $(1^42)_1 = \left\{ \begin{array}{l} a=b=c=0, fg - eh = fh - ke = fe - kd = 0 \\ f^2 - kd = e^2 - gd = h^2 - gk = 0 \end{array} \right\}$
- $(1^6)_1 = \{0\}$

軌道が多様体の包含関係は表1, 表2 のようにある。

$Y^l(w)$ (resp. $Y^r(w)$) は $m^+ \cap w^- m^+$ (resp. $m^+ \cap w^- m^+$) を含む最小の軌道が多様体であり簡単に計算できる(表8, 表10)。

次に w の $\bar{w}$ cell, 両側 cell は次のようにある。

ci) $\underline{C_2}$ $s = s_1, t = s_2$ とおく。 $C_1 = \{e\}$, $C_{21} = \{t, ts, tst\}$
 $C_{22} = \{s, st, sts\}$, $C_3 = \{stst\}$ の4つの cell であり、 $C_1,$

$C_2 = C_{21} \cup C_{22}$, C_3 の 3 つの両側 cell である。

ii) C_3 表 10 の番号 57 11 を用いる。

- $C_1 = \{1\}$
- $C_{21} = \{5, 9, 11, 33, 34\}$, $C_{22} = \{3, 13, 17, 18, 25\}$, $C_{23} = \{2, 19, 20, 29\}$
- $C_{31} = \{26, 43, 44\}$, $C_{32} = \{10, 35, 36\}$, $C_{33} = \{30, 47, 48\}$
- $C_{41} = \{27, 41, 42\}$, $C_{42} = \{31, 45, 46\}$, $C_{43} = \{15, 37, 38\}$
- $C_{51} = \{7, 21, 22, 28\}$, $C_{52} = \{4, 14, 16, 39, 40\}$, $C_{53} = \{6, 12, 23, 24, 32\}$
- $C_6 = \{8\}$

の 4 つの両側 cell であり, C_1 , $C_2 = C_{21} \cup C_{22} \cup C_{23}$, $C_3 = C_{31} \cup C_{32} \cup C_{33}$, $C_4 = C_{41} \cup C_{42} \cup C_{43}$, $C_5 = C_{51} \cup C_{52} \cup C_{53}$, C_6 の 6 つの両側 cell である。

$\overline{w}$ の導出 cell の集合 Γ の順序関係は表 5, 表 7 のとおり。

以 Γ の準順序 α をとて $V(L_w)$ を決定する。

ii) C_2 $w = e, s, t, stst$ のとき $\overline{X}_w$ は non-singular (実際 $= 4$ は W の parabolic 型部分群の最長元である。)。おこ $= \alpha$ のとき $V(L_w) = Y^r(w)$ (Prop 1.1, Lemma 2.7)。Cor 1.5 により

$$V(L_w) = \begin{cases} (4)_1 & w \in C_1 \\ (2^2)_1 & w \in C_{21} \\ (2^2)_2 & w \in C_{22} \\ (1^4)_1 & w \in C_3 \end{cases}$$

ii) C_3 $w = 1, 9, 17, 2, 10, 41, 4, 8$ は parabolic 型部分群の最長元 α として $V(L_w) = Y^r(w)$ 。おこ $V(L_w) = (6)_1$ for $w \in C_1$,

$V(L_W) = (24)_1$ for $W \in \mathcal{C}_{21}$, $V(L_W) = (24)_2$ for $W \in \mathcal{C}_{22}$, $V(L_W) =$
 $(24)_3$ for $W \in \mathcal{C}_{23}$, $V(L_W) = (3^2)_2$ for $W \in \mathcal{C}_{32}$, $V(L_W) = (2^3)_1$ for
 $W \in \mathcal{C}_{41}$, $V(L_W) = (1^2 2^2)_2$ for $W \in \mathcal{C}_{52}$, $V(L_W) = (1^6)_1$ for $W \in \mathcal{C}_6$
 である。また $V(L_W) \supset Y^r(W)$ である。 $V(L_W) \supset (3^2)_1$
 for $W \in \mathcal{C}_{31}$, $V(L_W) \supset (3^2)_3$ for $W \in \mathcal{C}_{33}$, $V(L_W) \supset (2^3)_2$ for
 $W \in \mathcal{C}_{42}$, $V(L_W) \supset (2^3)_3$ for $W \in \mathcal{C}_{43}$, $V(L_W) \supset (1^2 2^2)_1$ for $W \in$
 $\mathcal{C}_{51}$, $V(L_W) \supset (1^2 2^2)_3$ for $W \in \mathcal{C}_{53}$ である。 $W \in \mathcal{C}_{31}$ のとき
 $(3^2)_1$ は $V(L_W)$ の既約成分であり、 $\in$ の他の既約成分がある
 とすればそれは $(3^2)_2$ または $(3^2)_3$ である。 $\mathcal{C}_{22} \supseteq \mathcal{C}_{31}$ である
 $W \in \mathcal{C}_{31}$, $Y \in \mathcal{C}_{22}$ とすると $V(L_W) \subset V(L_Y) = (24)_2$ 。 表 2 より
 $V(L_W) = (3^2)_3$ for $W \in \mathcal{C}_{31}$ がわかる。 以下同様の論法で $\mathcal{C}_{11}$
 である。 $\mathcal{C}_{42}$ と $\mathcal{C}_{32}$ 上に $V(L_W) = (2^3)_2$ for $W \in \mathcal{C}_{42}$ 。 $\mathcal{C}_{51}$ と
 $\mathcal{C}_{41}$ 上に $V(L_W) = (1^2 2^2)_1$ for $W \in \mathcal{C}_{51}$ 。 $\mathcal{C}_{52}$ と $\mathcal{C}_{31}$, $\mathcal{C}_{52}$
 と $\mathcal{C}_{23}$ 上に $V(L_W) = (1^2 2^2)_2$ for $W \in \mathcal{C}_{52}$ 。 $\mathcal{C}_{53}$ と $\mathcal{C}_{42}$ 上
 には $V(L_W) = (1^2 2^2)_3$ for $W \in \mathcal{C}_{53}$ 。 $\mathcal{C}_{43}$ と $\mathcal{C}_{31}$, $\mathcal{C}_{43}$ と $\mathcal{C}_{51}$ 上
 には $V(L_W) = (2^3)_3 \cup (2^3)_1$ 。 $\mathcal{C}_{33}$ と $\mathcal{C}_{23}$ 上に $V(L_W) =$
 $(3^2)_3$ 。 また $V(L_W) = (3^2)_3 \cup (3^2)_2$ for $W \in \mathcal{C}_{33}$ 。 $W = 30 \in \mathcal{C}_{33}$ と
 する。 $V(L_W) = (3^2)_3 \cup (3^2)_2$ と仮定すると、ある $Y \in \Sigma(W)$ に対し
 $(\supset Y^r(Y) = (3^2)_2$ と仮定すればよい。 $Y \in W$ で $Y \leq W$ かつ
 $Y^r(Y) = (3^2)_2$ と仮定するのは $Y = 10$ だけである。 $\mathcal{C}_{23}$ の具体的な
 計算により X_Y は $\overline{X_W}$ 中で non-singular である事がわかる

($Y=10, W=30$)。 $\delta \supset \tau$ $Y=10 \notin \tau(W)$ 。従って $\tau \in V(L_W) = (3^2)$ for $W \in C_{33}$ 以上で全ての $W \in W$ に対し $\tau \in V(L_W)$ が決定された。

(表 10)

3.3 $V(L_W)$ for B_3

$K = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \{x \in M_4(\mathbb{C}) \mid xK + Kx = 0\}$ は B_3 型の

単純 Lie 環で $\mathfrak{b} = \{\mathfrak{g}$ に含まれる上三角行列 $\}$ は $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環, また

$$\mathfrak{m}^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b & g & e & d & 0 \\ 0 & 0 & c & f & 5 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -e \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -R & -R & -g \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, \dots, R \in \mathbb{C} \right\}$$

である。Weyl 群 W は C_3 型の Weyl 群と同じで, $\mathfrak{b}$ cell 両側 cell も C_3 型のと看做してよい。巾零共役類の集合 Nilp は, 7 の分割であって even part の数が偶数であるものの全許と同一視される。すなわち $\text{Nilp} = \{(7), (1^2 5), (1^3 3^2), (2^2 3), (1^4 3), (1^3 2^2), (1^7)\}$ 。軌道的多様体は次のとおり。

- $(7)_1 = \mathfrak{m}^+$
- $(1^2 5)_1 = \{a=0\}$, $(1^2 5)_2 = \{c=0\}$, $(1^2 5)_3 = \{R=0\}$
- $(1^3 3^2)_1 = \{a=R=0\}$, $(1^3 3^2)_2 = \{c=0, aR+bR=0\}$, $(1^3 3^2)_3 = \{R=0, R^2+2cf=0\}$
- $(2^2 3)_1 = \{a=R=0, (bf-ce)^2 + 2(5g-eR)(bR-cg)=0\}$

$$(2^3 3)_2 = \left\{ \begin{array}{l} c=0, 2R^2d+2fRg-2eRk-af^2=0 \\ aR+bk=0, 2Rfg+2Rkd-2eR^2+bf^2=0 \end{array} \right\}$$

$$(2^3 3)_3 = \{a=b=c=0\}$$

$$\bullet (1^4 3)_1 = \{a=k=0, bR-gc=bf-ec=gf-eR=0\}$$

$$(1^4 3)_2 = \{c=k=R=f=0\}$$

$$(1^4 3)_3 = \{a=b=c=0, eR-dk-gf=0\}$$

$$\bullet (1^3 2^2)_1 = \left\{ \begin{array}{l} a=k=0, bR-gc=bf-ec=gf-eR=0 \\ Rg+2bf=g^2+2be=R^2+2cf=0 \end{array} \right\}$$

$$(1^3 2^2)_2 = \{c=k=R=f=0, g^2+2ad+2be=0\} \quad \bullet (1^7)_1 = \{0\}$$

以下 C_3 型 のときと同様にして $V(L_M)$ の計算を行う (表 10)。

3.4 $V(L_M)$ for G_2

$\mathfrak{g}$ は G_2 型 の単純 Lie 環 とする。巾零共役類に対応する weighted Dynkin diagram は $\overset{a}{\circ} \rightleftharpoons \overset{b}{\circ}$ ($a, b=0$ or 1 or 2) のとき, この巾零共役類を (a, b) で表す。このとき $\text{Nilp} = \{(2, 2), (2, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 0)\}$ である。Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ をとり $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root 系を Δ とする。正 root 系 Δ^+ をとり, 単純 root を α, β とする (== α は long root, β は short root)。 $\delta \in \Delta^+$ に対応する root 空間を $\mathfrak{g}_\delta$, $\mathfrak{g}_\delta$ に対応する G の部分群を U_δ とする。また $\mathfrak{m}^+ = \bigoplus_{\delta \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\delta$ に対応する G の部分群を U とする。このとき軌道的多様体は次のとおり。

- $(22)_1 = m^+$
- $(20)_1 = \bigoplus_{\delta \in \Delta^+ - \beta} \mathfrak{g}_\delta$, $(20)_2 = \bigoplus_{\delta \in \Delta^+ - \beta} \mathfrak{g}_\delta$
- $(01)_1 = (\text{Ad}(U_\beta)(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{\alpha+\beta})) + \mathfrak{g}_{2\alpha+3\beta}$, $(01)_2 = \text{Ad}(U)\mathfrak{g}_\beta$
- $(10)_1 = (\text{Ad}(U_\beta)\mathfrak{g}_\alpha) + \mathfrak{g}_{2\alpha+3\beta}$
- $(00)_1 = \{0\}$

α に関する鏡影 ε , β に関する鏡影 ε とすると, 右 cell は $\mathcal{C}_1 = \{e\}$, $\mathcal{C}_2 = \{t, ts, tst, tsts, tstst\}$, $\mathcal{C}_{22} = \{s, st, sts, stst, ststs\}$, $\mathcal{C}_3 = \{ststst\}$ の 4 個, 両側 cell は $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_{22}$, $\mathcal{C}_3$ の 3 個である。

$\mathcal{C}_2$ のとき と全く同様に $(\varepsilon \in \mathcal{V}(L_N))$ が計算される (表 9)。

3.5 $\underline{\text{Ch}}(L_N)$

ここでは G_2 型のときの計算のみを述べて, C_2, B_3, C_3 のときは省略する。結果は表 8, 10 にまとめる。以下 $\mathcal{G}$ は G_2 型とある。

$\underline{\text{Ch}}(L_N) = \sum_{y \in W} m(y, w) [\overline{TX_N X}]$ とするとき $Q(w) = \sum_{y \in W} m(y, w) b(y)$ であつた。また $Q(w) = \sum_{y \leq w} (-1)^{\ell(w) + \ell(y)} y$ である。 $w = e, s, t, ststst$ は parabolic 型部分群の最長元なので, $\overline{X_N}$ は non-singular である。また $\overline{X_{sts}}$ も non-singular である事がわかる (筆者は自分で計算して知らすやて 11 節の事である。)。よって Lemma 1.1 により $Q(w) = b(w)$ for $w = e, s, t, sts, ststst$ となる。さらに

Lemma 1.1 と Lemma 1.2 に對し $a(st) = b(st)$, $a(ts) = b(ts)$

とある。 Lemma 1.2, 2.7 に對し

$$a(tst) = b(tst) + x_1 b(t) \quad x_1 > 0$$

$$a(stst) = b(stst) + x_2 b(st) \quad x_2 > 0$$

$$a(tsts) = b(tsts) + x_3 b(ts)$$

$$a(ststs) = b(ststs) + x_3 b(sts) + x_4 b(s) \quad \begin{cases} x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \\ x_3 > 0 \text{ or } x_4 > 0 \end{cases}$$

$$a(tstst) = b(tstst) + x_5 b(tst) + x_6 b(t) \quad x_5 \geq 0, x_6 > 0$$

が成り立つ。 Lemma 2.8 と Lemma 2.10 に對し, $u = \text{Sort } t$, $w \in W$

$uw > w$ とする

$$u b(w) \in b(w) + b(uw) + \sum_{\substack{uy < y < uw \\ Y^2(y) \subset Y^2(w)}} \sum_{i \geq 0} b(y)$$

とある。 $\gamma > 2$ と表 4 に對し $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$,

$x_6 = 1$ が成り立つ。

3.6 表

表 1.1 including relation of orbital varieties for C_2

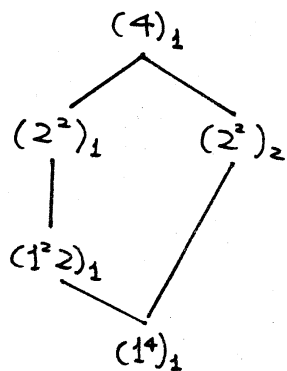


表 1.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for C_2

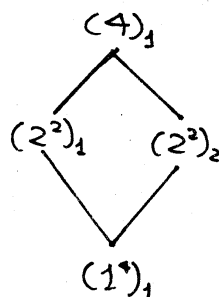


表 2.1 including relation of orbital varieties for C_3

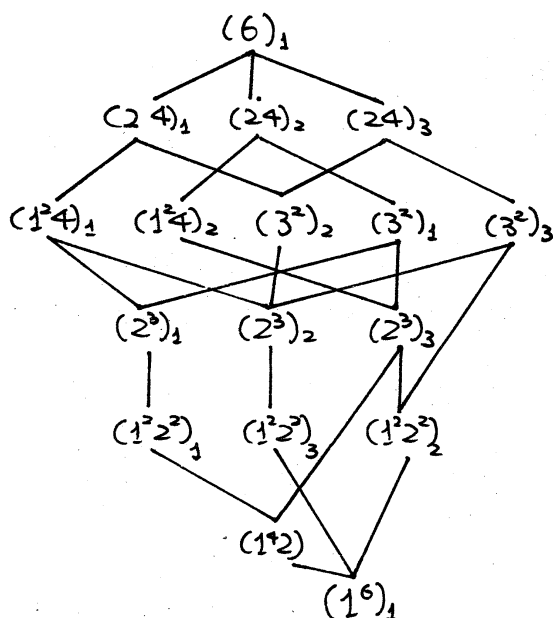


表 2.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for C_3

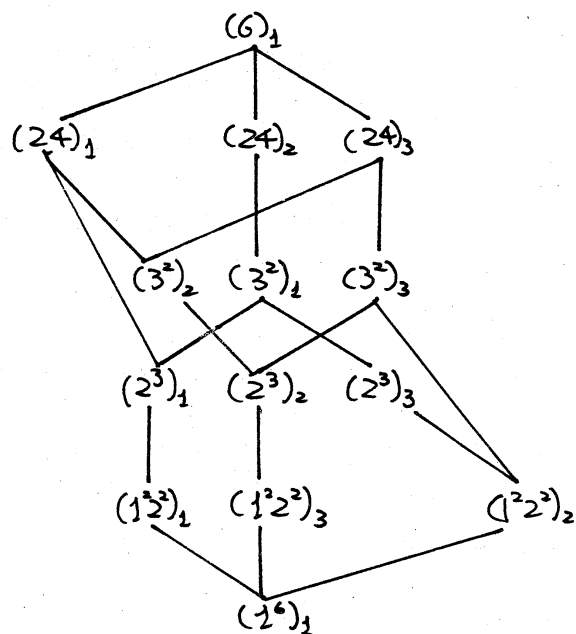


表 3.1 including relation of orbital varieties for B_3

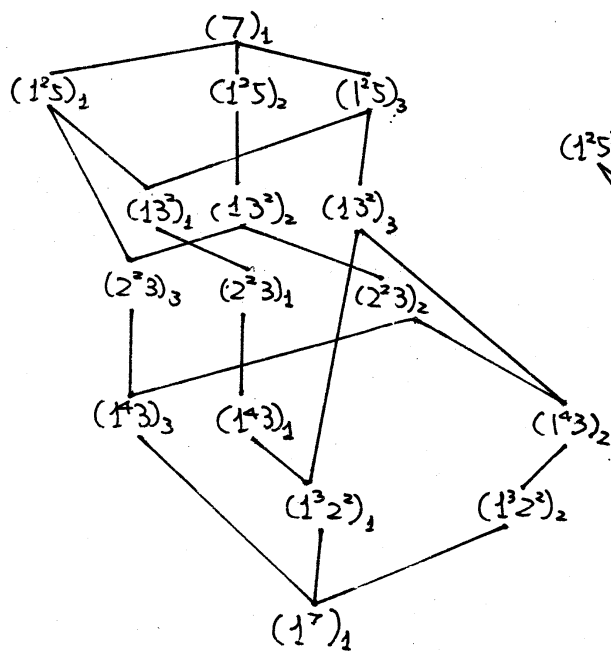


表 3.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for B_3

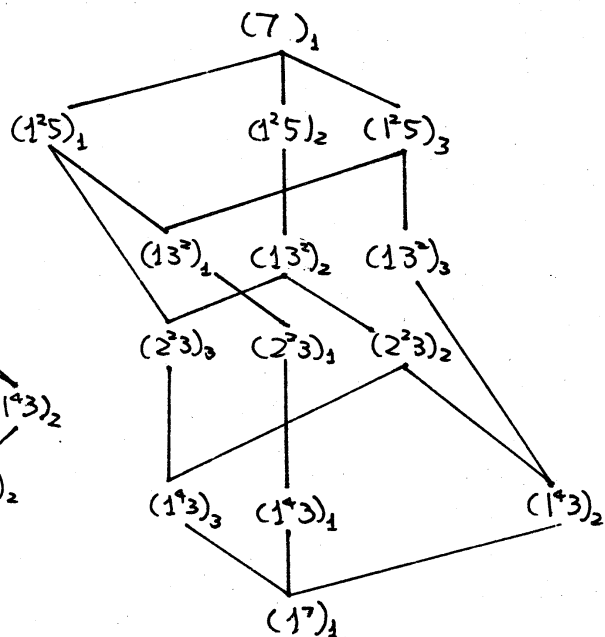


表 4.1 including relation of orbital varieties for G_2

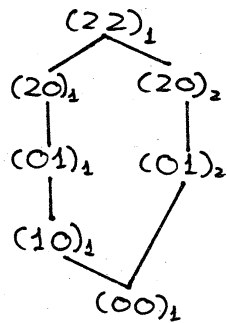


表 4.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for G_2

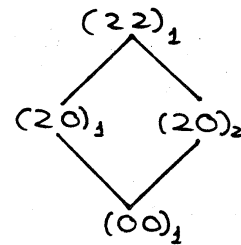


表 5 order relation of right cells for C_2

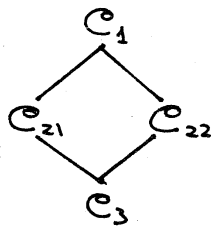


表 6 order relation of right cells for G_2

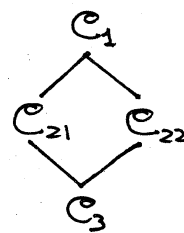


表 7 order relation of right cells for B_3, C_3

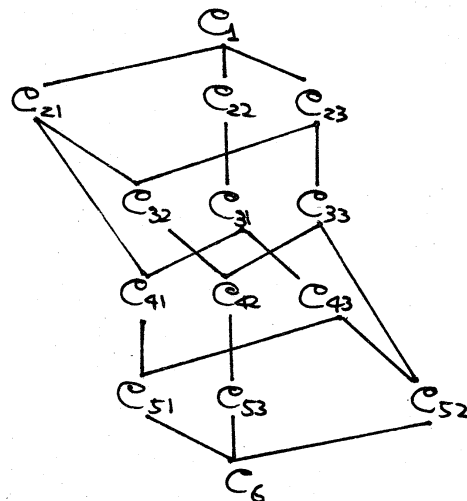


表 8. C_2

w	$Y^p(w)$	$Y^r(w)$	right cell	$V(L_w)$	$a(w)$
e	$(4)_1$	$(4)_1$	C_1	$(4)_1$	$b(e)$
s	$(2^2)_2$	$(2^2)_2$	C_{22}	$(2^2)_2$	$b(s)$
t	$(2^2)_1$	$(2^2)_1$	C_{21}	$(2^2)_1$	$b(t)$
st	$(2^2)_1$	$(2^2)_2$	C_{22}	$(2^2)_2$	$b(st)$
ts	$(2^2)_2$	$(2^2)_1$	C_{21}	$(2^2)_1$	$b(ts)$
sts	$(2^2)_2$	$(2^2)_2$	C_{22}	$(2^2)_2$	$b(sts)$
tst	$(1^2 2)_1$	$(1^2 2)_1$	C_{21}	$(2^2)_1$	$b(tst) + b(t)$
$stst$	$(1^4)_1$	$(1^4)_1$	C_3	$(1^4)_1$	$b(stst)$

表 9. G_2

w	$Y^p(w)$	$Y^r(w)$	right cell	$V(L_w)$	$a(w)$
e	$(22)_1$	$(22)_1$	C_1	$(22)_1$	$b(e)$
s	$(20)_2$	$(20)_2$	C_{22}	$(20)_2$	$b(s)$
t	$(20)_1$	$(20)_1$	C_{21}	$(20)_1$	$b(t)$
st	$(20)_1$	$(20)_2$	C_{22}	$(20)_2$	$b(st)$
ts	$(20)_2$	$(20)_1$	C_{21}	$(20)_1$	$b(ts)$
sts	$(20)_2$	$(20)_2$	C_{22}	$(20)_2$	$b(sts)$
tst	$(01)_1$	$(01)_1$	C_{21}	$(20)_1$	$b(tst) + 2b(t)$
$stst$	$(01)_1$	$(01)_2$	C_{22}	$(20)_2$	$b(stst) + b(st)$
$tsts$	$(01)_2$	$(01)_1$	C_{21}	$(20)_1$	$b(tsts) + b(ts)$
$ststs$	$(01)_2$	$(01)_2$	C_{22}	$(20)_2$	$b(ststs) + b(s)$
$tstst$	$(10)_1$	$(10)_1$	C_{21}	$(20)_1$	$b(tstst) + b(tst) + b(t)$
$ststst$	$(00)_1$	$(00)_1$	C_3	$(00)_1$	$b(ststst)$

表 10. C_2, B_3

No	N3	reduced expression	N ^{3-right} cell	C_3			B_3		
				$\gamma^{(m)}$	$\gamma^{(m)}$	$\gamma^{(m)}$	$\gamma^{(m)}$	$\gamma^{(m)}$	$\gamma^{(m)}$
1	(1 2 3)		1	$\mathcal{C}_1$	(6) ₁	(6) ₁	(7) ₁	(7) ₁	b(1)
2	(-1 2 3)	1	2	$\mathcal{C}_2$	(24) ₃	(24) ₃	(1 ⁵ 5) ₃	(1 ⁵ 5) ₃	b(2)
3	(1 -2 3)	212	3	$\mathcal{C}_3$	(1 ⁴) ₂	(24) ₂	(1 ⁵ 5) ₂	(1 ⁵ 5) ₂	b(3)
4	(-1 -2 3)	2121	4	$\mathcal{C}_4$	(1 ² 2) ₂	(1 ² 2) ₂	(1 ⁴ 3) ₂	(1 ⁴ 3) ₂	b(4)
5	(1 2 -3)	32123	5	$\mathcal{C}_5$	(1 ⁴) ₁	(24) ₁	(1 ⁵ 5) ₁	(1 ⁵ 5) ₁	b(5)
6	(-1 2 -3)	321213	6	$\mathcal{C}_6$	(1 ² 2) ₃	(1 ² 2) ₃	(1 ⁴ 3) ₃	(1 ⁴ 3) ₃	b(6)
7	(1 -2 -3)	32123212	7	$\mathcal{C}_7$	(1 ⁴ 2) ₁	(1 ² 2) ₁	(1 ⁴ 3) ₁	(1 ⁴ 3) ₁	b(7)
8	(-1 -2 -3)	132123212	8	$\mathcal{C}_8$	(1 ⁶) ₁	(1 ⁶) ₁	(1 ⁷) ₁	(1 ⁷) ₁	b(8)
9	(1 3 2)	3	9	$\mathcal{C}_9$	(24) ₁	(24) ₁	(1 ⁵ 5) ₁	(1 ⁵ 5) ₁	b(9)
10	(-1 3 2)	13	10	$\mathcal{C}_{10}$	(3 ²) ₂	(3 ²) ₂	(1 ³ 3) ₂	(1 ³ 3) ₂	b(10)
11	(1 -3 2)	3212	11	$\mathcal{C}_{11}$	(1 ⁴) ₂	(24) ₂	(1 ⁵ 5) ₂	(1 ⁵ 5) ₂	b(11)
12	(-1 -3 2)	32121	12	$\mathcal{C}_{12}$	(1 ² 2) ₃	(1 ² 2) ₃	(1 ⁴ 3) ₃	(1 ⁴ 3) ₃	b(12)
13	(1 3 -2)	2123	13	$\mathcal{C}_{13}$	(1 ⁴) ₁	(24) ₁	(1 ⁵ 5) ₁	(1 ⁵ 5) ₁	b(13)
14	(-1 3 -2)	21213	14	$\mathcal{C}_{14}$	(1 ² 2) ₂	(1 ² 2) ₂	(1 ⁴ 3) ₂	(1 ⁴ 3) ₂	b(14)
15	(1 -3 -2)	2123212	15	$\mathcal{C}_{15}$	(2 ³) ₃	(2 ³) ₃	(2 ³ 3) ₃	(2 ³ 3) ₃	b(15)
16	(-1 -3 -2)	21232121	16	$\mathcal{C}_{16}$	(1 ² 2) ₂	(1 ² 2) ₂	(1 ³ 3) ₂	(1 ³ 3) ₂	b(16) + b(4)
17	(2 1 3)	2	17	$\mathcal{C}_{17}$	(24) ₂	(24) ₂	(1 ⁵ 5) ₂	(1 ⁵ 5) ₂	b(17)
18	(-2 1 3)	21	18	$\mathcal{C}_{18}$	(24) ₃	(24) ₃	(1 ⁵ 5) ₃	(1 ⁵ 5) ₃	b(18)
19	(2 -1 3)	12	19	$\mathcal{C}_{19}$	(24) ₂	(24) ₂	(1 ⁵ 5) ₂	(1 ⁵ 5) ₂	b(19)
20	(-2 -1 3)	121	20	$\mathcal{C}_{20}$	(24) ₃	(24) ₃	(1 ³ 3) ₃	(1 ³ 3) ₃	b(20) + b(2)
21	(2 1 -3)	321323	21	$\mathcal{C}_{21}$	(1 ² 2) ₁	(1 ² 2) ₁	(1 ⁴ 3) ₁	(1 ⁴ 3) ₁	b(21)
22	(-2 1 -3)	3212321	22	$\mathcal{C}_{22}$	(1 ² 2) ₃	(1 ² 2) ₃	(1 ⁴ 3) ₃	(1 ⁴ 3) ₃	b(22)
23	(2 -1 -3)	3212132	23	$\mathcal{C}_{23}$	(1 ² 2) ₁	(1 ² 2) ₁	(1 ⁴ 3) ₁	(1 ⁴ 3) ₁	b(23)
24	(-2 -1 -3)	32123121	24	$\mathcal{C}_{24}$	(1 ² 2) ₃	(1 ² 2) ₃	(1 ³ 3) ₃	(1 ³ 3) ₃	b(24) + b(6)

6. continued

No	N	Reduced expression	N ^{right} cell	C ₃			B ₃		
				$\gamma^{(w)}$	$\gamma^{(w)}$	$\gamma^{(w)}$	$\gamma^{(w)}$	$\gamma^{(w)}$	$a(w)$
25	(2 3 1)	23	C ₂₂	(24) ₁	(24) ₂		(1 ⁵) ₁	(1 ⁵) ₂	b(25)
26	(-2 3 1)	213	C ₃₁	(3 ²) ₂	(3 ²) ₁		(13 ²) ₁	(13 ²) ₂	b(26)
27	(2 -3 1)	23212	C ₄₁	(2 ³) ₃	(2 ³) ₁		(2 ³) ₂	(2 ³) ₃	b(27)
28	(-2 -3 1)	232121	C ₅₁	(1 ² 2 ²) ₂	(1 ² 2 ²) ₁		(1 ³ 3) ₂	(1 ³ 3) ₃	b(28)
29	(2 3 -1)	123	C ₂₃	(24) ₁	(24) ₂		(1 ⁵) ₁	(1 ⁵) ₂	b(29)
30	(-2 3 -1)	1213	C ₃₃	(3 ²) ₂	(3 ²) ₁		(13 ²) ₁	(13 ²) ₂	b(30) + b(10)
31	(2 -3 -1)	123212	C ₄₂	(2 ³) ₃	(2 ³) ₁		(2 ³) ₂	(2 ³) ₃	b(31)
32	(-2 -3 -1)	1232121	C ₅₃	(1 ² 2 ²) ₂	(1 ² 2 ²) ₁		(1 ³ 2 ²) ₂	(1 ³ 2 ²) ₁	b(32) + b(12)
33	(3 1 2)	32	C ₃₁	(24) ₁	(24) ₂		(1 ⁵) ₁	(1 ⁵) ₂	b(33)
34	(-3 1 2)	321	C ₃₁	(24) ₃	(24) ₁		(1 ⁵) ₃	(1 ⁵) ₁	b(34)
35	(3 -1 2)	132	C ₃₂	(3 ²) ₁	(3 ²) ₂		(13 ²) ₁	(13 ²) ₂	b(35)
36	(-3 -1 2)	3121	C ₃₂	(3 ²) ₃	(3 ²) ₂		(13 ²) ₃	(13 ²) ₁	b(36) + b(10)
37	(3 1 -2)	21323	C ₄₃	(2 ³) ₁	(2 ³) ₃		(2 ³) ₃	(2 ³) ₂	b(37)
38	(-3 1 -2)	212321	C ₄₃	(2 ³) ₂	(2 ³) ₃		(2 ³) ₁	(2 ³) ₂	b(38)
39	(3 -1 -2)	212132	C ₅₂	(1 ² 2 ²) ₁	(1 ² 2 ²) ₂		(1 ³ 3) ₁	(1 ³ 3) ₂	b(39)
40	(-3 -1 -2)	2123121	C ₅₂	(1 ² 2 ²) ₃	(1 ² 2 ²) ₂		(1 ³ 2 ²) ₁	(1 ³ 2 ²) ₂	b(40) + b(14)
41	(3 2 1)	323	C ₄₁	(2 ³) ₁	(2 ³) ₁		(2 ³) ₃	(2 ³) ₃	b(41)
42	(-3 2 1)	2321	C ₄₁	(2 ³) ₂	(2 ³) ₁		(2 ³) ₁	(2 ³) ₃	b(42)
43	(3 -2 1)	2132	C ₃₁	(3 ²) ₁	(3 ²) ₁		(13 ²) ₁	(13 ²) ₂	b(43)
44	(-3 -2 1)	23121	C ₃₁	(3 ²) ₃	(3 ²) ₁		(13 ²) ₃	(13 ²) ₂	b(44) + b(26)
45	(3 2 -1)	1323	C ₄₂	(2 ³) ₁	(2 ³) ₂		(2 ³) ₃	(2 ³) ₁	b(45)
46	(-3 2 -1)	12321	C ₄₂	(2 ³) ₂	(2 ³) ₂		(2 ³) ₁	(2 ³) ₁	b(46)
47	(3 -2 -1)	12132	C ₃₃	(3 ²) ₁	(3 ²) ₃		(13 ²) ₁	(13 ²) ₃	b(47) + b(35)
48	(-3 -2 -1)	123121	C ₃₃	(3 ²) ₃	(3 ²) ₃		(13 ²) ₃	(13 ²) ₃	b(48) + b(35) + b(10) + b(26)

34. 予想

[4.1] Borho-Brylinski [BoB2] は, primitive quotient の特性多様体 $\text{Ch}(\mathcal{O}(\mathcal{Q})/I_w)$ が常に既約であると予想した。Prop 1.4 により, $\dim$ は $V(L_w)$ が常に既約である事と同値である ([J3; 8.15] 参照)。特殊表現 $\text{Sp}(\mathcal{O}_w^{\text{LR}}) = \mathcal{O}(w)$ は 2 種類の基底 $\{\delta_Y \mid Y \in \text{Irr}(\overline{\mathcal{O}_w^{\text{LR}} \cap \mathfrak{m}^+})\}$, $\{\rho_Y \mid Y \in \mathcal{C}_w^{\text{LR}}/\sim\}$ を持つ (但し ρ_Y は定数倍を除いて決まる。) が, 上の Borho-Brylinski 予想は, $\dim$ の基底が (定数倍を除いて) 一致する事とも同値である (Prop. 2.3, 2.4)。しかし §3 からわかるように $\dim$ には反例がある。そこでこの修正案として次の予想を提出する。

Conjecture 4.1 $O \in \text{Nilp}_{\text{sp}}$, $\mathcal{C} \in O$ に対応する $\sim_{\text{LR}}$ の同値類とする ($\mathcal{W}/\sim_{\text{LR}} \longleftrightarrow \text{Nilp}_{\text{sp}}$, §2.3)。このとき $\mathcal{C}/\sim_{\text{LR}}$ と $\text{Irr}(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+})$ の間の一対一対応 ($w \mapsto Y_w$) 及び, $\text{Irr}(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+})$ 上の順序関係 $>$ が存在して,

$$V(L_w) = Y_w \cup \tilde{Y}_w \quad (\forall w \in \mathcal{C}).$$

ここで $\tilde{Y}_w$ は $Y < \tilde{Y}_w$ とある $Y \in \text{Irr}(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+})$ の幾つかの合併集合である。』

この予想は A_n 型では証明されている ([BoB2; §6.10])。

Conjecture 4.1 は特殊表現 $\text{Sp}(O)$ の 2 種類の基底の変換行列が上三角形になる事と同値である。また Conjecture 4.1

から Conjecture 0.5 が従う事も明かす。

[4.2] $\hat{W} \xrightarrow{\Phi} \text{Nil}_{\text{sp}}, \hat{W} \xrightarrow{\Psi} \text{Nil}_p$ 是次の様に定義する。

$\tau \in \hat{W}$ に対して $\tau \otimes \tau \in V_N^{\text{LP}}$ ならば $\Phi(\tau) = O_N^{\text{LP}}$, $\tau \otimes \tau \in V_N^{\text{or}}$ ならば

$\Psi(\tau) = O_N^{\text{or}}$. 是で $\overline{O_N^{\text{or}}} \subset \overline{O_N^{\text{LP}}}$ に注意して置く。実際,

$$\overline{O_N^{\text{LP}}} = \overline{G \cdot V(L_W)} \supset \overline{G \cdot Y^r(W)} = \overline{O_N^{\text{or}}}.$$

Prop. 4.2 $O \in \text{Nil}_{\text{sp}}$ とする。次の条件が成立すれば,

Conjecture 4.1 は正しい。

$$(4.3) \quad \{\tau \in \hat{W} \mid \Phi(\tau) \subset \overline{O}\} = \{\tau \in \hat{W} \mid \Psi(\tau) \subset \overline{O}\}.$$

(証明) $W \times W$ -加群として $\sum_{O_N^{\text{LP}} \subset \overline{O}} \mathbb{C} a(w) \cong \bigoplus_{\Phi(w) \subset \overline{O}} (\tau \otimes \tau),$

$\sum_{O_N^{\text{or}} \subset \overline{O}} \mathbb{C} b(w) \cong \bigoplus_{\Psi(w) \subset \overline{O}} (\tau \otimes \tau)$ である。是より $\sum_{O_N^{\text{LP}} \subset \overline{O}} \mathbb{C} a(w) = \sum_{O_N^{\text{or}} \subset \overline{O}} \mathbb{C} b(w).$

$a(w) \in b(w) + \sum_{Y \subset W} \mathbb{Z}_{\geq 0} b(Y)$ ならば $O_N^{\text{LP}} \subset \overline{O} \iff O_N^{\text{or}} \subset \overline{O}$ がわかる。

一般に $\overline{O_N^{\text{or}}} \subset \overline{O_N^{\text{LP}}}$ である。

$$(4.4) \quad O_N^{\text{or}} = O \text{ ならば } O_N^{\text{LP}} = O, \text{ 特に } Y^r(W) \in \text{Irr}(V(L_W)).$$

是より $\text{Irr}(\overline{O \cap M^+})$ の部分集合の増大列

$$\emptyset = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset \text{Irr}(\overline{O \cap M^+})$$

是次のように帰納的に定義する。 J_{r-1} まで定義されたとき,

$$J_r = \{Y^r(W) \mid O_N^{\text{or}} = O, V(L_W) \subset Y^r(W) \cup (\bigcup_{Y \in J_{r-1}} Y)\}.$$

是で次を示す。

$$(4.5) \quad J_{r-1} \subsetneq J \text{ ならば } J_{r-1} \subsetneq J_r$$

$J = \{w \in W \mid O_N^{\text{or}} = O, Y^r(w) \notin J_{r-1}\}$ は仮定により空集合

これは正しい。 Bruhat order に関する δ の極小元 $w \in U$ とする。
 $w = a$ とする。 $Y^r(w) \in J_r$ とする事を示せばよい。 Lemma 2.7 と
 (4.4) より

$$V(L_w) = Y^r(w) \cup \left(\bigcup_{\substack{y \in \delta(w) - \delta(w) \\ O_y^r = 0}} Y^r(y) \right)$$

とある。 11 ま

$$V(L_w) \subset Y^r(w) \cup \left(\bigcup_{Y \in J_{r-1}} Y \right)$$

と仮定すると、ある $y < w$ が存在して $O_y^r = 0$ かつ $Y^r(y) \notin J_{r-1}$
 となる $y \in \delta$ 。 これは w の極小性に反する。 したがって

$$V(L_w) \subset Y^r(w) \cup \left(\bigcup_{Y \in J_{r-1}} Y \right).$$

よって (4.5) が示すことができる。

$\text{Irr}(\overline{\text{ONM}}^r)$ 上の順序関係 $>$ は $Y \in J_r - J_{r-1}$, $Y' \in J_s - J_{s-1}$, $r > s$
 ならば $Y > Y'$ とするようにより定める。 また各 $Y \in \text{Irr}(\overline{\text{ONM}}^r)$ に対し
 $w_Y \in \mathbb{C}$ を決えるようにする。 $Y \in J_r - J_{r-1}$ のとき

$$Y^r(w_Y) = Y, \quad V(L_{w_Y}) \subset Y \cup \left(\bigcup_{Y' \in J_{r-1}} Y' \right).$$

$\{w_Y \mid Y \in \text{Irr}(\overline{\text{ONM}}^r)\}$ は $\mathbb{C}/\sim$ の完全代表系である。 実際

$$Y \neq Y' \text{ ならば } V(L_{w_Y}) \neq V(L_{w_{Y'}}), \text{ したがって } w_Y \not\sim w_{Y'} \text{ (Cor. 1.5).}$$

また $\#|\mathbb{C}/\sim| = \dim_{\mathbb{C}} \text{Sp}(0) = \#|\text{Irr}(\overline{\text{ONM}}^r)|$ (3.2)。 したがって

w_Y を含む $\sim$ の同値類に Y が対応している事に於て Conjecture

4.1 が成立する事がわかる。 ■

$0 \in \text{Nilp}_{\text{sp}}$ のとき $\{\tau \in \widehat{W} \mid \Phi(\tau) \subset \overline{0}\} \subset \{\tau \in \widehat{W} \mid \Psi(\tau) \subset \overline{0}\}$ は
 一般に成立する ([KT]) が、逆の包含関係は一般には成立し

Table 11.

写像 π は全 α の場合について具体的にわかっており
 $([BV1,2], [Sh1,2], [ALS])$, 巾乗共役類 α の包の包含関係
 も知られている (古典型はよく知られている。例外型は $[Sh3]$,
 $[M]$) α で (4.3) が成立するかどうかは check できる。例えば
 E_6 では全 α の特殊巾乗共役類 α について (4.3) が成立する α で
 Conjecture 4.1 は正しい。 F_4 型では 11 個の特殊巾乗共役類 α
 のうち 9 個について (4.3) が成立しているが, 残りの 2 個では
 成立していない。

Appendix

[A.1] moment map $T^*X \xrightarrow{\delta} \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ の像は $\mathfrak{g}$ の巾乗元全
 体 $\mathcal{N}$ と一致し, $T^*X \xrightarrow{\delta} \mathcal{N}$ は $\mathcal{N}$ の特異点解消を与える
 (Springer)。導来圏での対象 $R\delta_!(\mathbb{C}_{T^*X})$ は Weyl 群の作用
 を持つ (Lusztig [L], [BM] を参照)。 $\mathfrak{g}$ 上 $\mathcal{N}$ の局所的
 部分次数多様体 D に対して $H_c^*(\delta^{-1}(D), \mathbb{C}) = H_c^*(D, R\delta_!(\mathbb{C}_{T^*X})[D])$
 あるいは $\mathfrak{g}$ の双対空間 $H_*(\delta^{-1}(D))$ は W -加群になる。特に
 $x \in \mathcal{N}$ のとき $\delta^{-1}(x) \cong X_x$ に対して $H_{2d_0}(X_x)$ は W -加群になる。
 また $T^*(X \times X) = T^*X \times T^*X \xrightarrow{\delta \times \delta} \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ において $Z = (\partial \times \delta)^{-1}(\mathcal{N}^q)$
 (ここで $\mathcal{N}^q = \{(x, -x) \mid x \in \mathcal{N}\}$) に対して $H_{\text{odd}}(Z)$ は $W \times W$ -
 加群になる。 二重に与えた W (resp. $W \times W$) の $H_{2d_0}(X_x)$

(resp. $H_{\text{ad}}(Z)$) の作用は [KL2] の α と一致する ([H]).

[A.2] Lemma 2.9, 2.10 の証明を簡単に述べる。 $\mathcal{N}^a$ と $\mathcal{N}$ と同一視して $Z \xrightarrow{f} \mathcal{N}$ が得られる。 $0 \in \text{Nilp}$ に対して $f^{-1}(0) = \bigcup_{0 \neq y \in \mathbb{C}} Z_y$ は Z 中で閉集合で、 $\bigcap_{y \in \mathbb{C}} \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ -加群として α の完全列を得る。

$$0 \rightarrow H_{\text{ad}}(f^{-1}(0)) \rightarrow H_{\text{ad}}(Z) \rightarrow H_{\text{ad}}(f^{-1}(\mathcal{N}-0)) \rightarrow 0$$

$f^{-1}(0) \cong \bigoplus_{0 \neq y \in \mathbb{C}} \mathbb{C} b(y) (\cong \bigoplus_{0 \neq y \in \mathbb{C}} \mathbb{C}[Z_y] = H_{\text{ad}}(f^{-1}(0)))$ は $\mathbb{C}[\mathcal{W}]$ ($\cong H_{\text{ad}}(Z)$) の $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ -部分加群である。 次は $\partial \mathbb{C} = \mathbb{C} - 0$ とおくとき $\mathcal{I}$ と同一視して

$$0 \rightarrow H_{\text{ad}}(f^{-1}(\partial \mathbb{C})) \rightarrow H_{\text{ad}}(f^{-1}(\mathbb{C})) \rightarrow H_{\text{ad}}(f^{-1}(0)) \rightarrow 0$$

がやはり $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ -加群として α の完全列。 従って $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ -加群として

$$\left(\bigoplus_{0 \neq y \in \mathbb{C}} \mathbb{C} b(y) \right) / \left(\bigoplus_{0 \neq y \in \mathbb{C}} \mathbb{C} b(y) \right) \cong H_{\text{ad}}(f^{-1}(0))$$

がわかる。 $x \in \mathbb{C}$ のとき $f^{-1}(x) \cong \mathbb{C} \cong G/Z_G(x)$ $\mathcal{I}$ の Siber 束とあると $f^{-1}(x) \cong G^{Z_G(x)}(X_x \times X_x)$ 。 かわる $H_{\text{ad}}(f^{-1}(x)) \cong (H_{\text{ad}_0}(X_x) \oplus H_{\text{ad}_0}(X_x))^{A(x)}$ かわる。 従って Lemma 2.9 が示すわけ。

$$\begin{array}{ccccc} \text{次に } T^*X \times T^*X & \xrightarrow{f \times 1} & \mathcal{N} \times T^*X & \xrightarrow{1 \times f} & \mathcal{N} \times \mathcal{N} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ Z & \xrightarrow{f} & (f \times 1)(Z) & \rightarrow & \mathcal{N}^a \cong \mathcal{N} \end{array}$$

いよいよ $Z = f^{-1}((f \times 1)(Z))$ である。 従って $\text{IRS}_1(\mathbb{C}_Z)$ に $\mathcal{W}$ の作用が定まり、 $H_{\text{ad}}(Z) = (H_c^{\text{ad}}((f \times 1)(Z); \text{IRS}_1(\mathbb{C}_Z)))^*$ は $\mathcal{W}$ -加群

にある。これは §A.1 で定義された $W \times W$ の $\text{Hed}(Z) \cap$ の作用
 における $W \times 1$ の作用と一致する。 $(\delta \times 1)(Z) \in T^*X \cong G^R M^+$
 と同一視するとき $S(Z_w) = G^R Y^0(w)$ となるので、 I と同様にして
 Lemma 2.10 が示される。

[A.3] Lemma 2.11 を示す。まず (i) を示す。 $Y \in \mathcal{O} \in$
 Nilp に付随した軌道的多様体とする。 $\partial Y \in Y$ に真に含まれる
 軌道的多様体全体の合併集合として、 $\tilde{Y} = Y - \partial Y = Y \cap \mathcal{O}$ (と書く) §A.2 により
 $\bigoplus_{Y^0(w) \subset Y} \mathbb{C} b(w)$, $\bigoplus_{Y^0(w) \subset \partial Y} \mathbb{C} b(w)$ は $W \times 1$ 不変な形で、 $M =$
 $\left(\bigoplus_{Y^0(w) \subset Y} \mathbb{C} b(w) \right) / \left(\bigoplus_{Y^0(w) \subset \partial Y} \mathbb{C} b(w) \right)$ は W -加群になる。 $Y^0(w) = Y$

とある $w \in W$ に対して、 $b(w)$ の M での像 $\bar{b}(w)$ と書くとき、
 $M = \bigoplus_{Y^0(w)=Y} \mathbb{C} \bar{b}(w)$ である。 M の W -不変部分加群である
 $\{ \bar{b}(w) \mid Y^0(w) = Y \}$ の部分集合で張るものは (0) と M に
 属する事と言えばよい。 $Z_Y = f^{-1}(G^R Y)$ とある $(\delta \times 1)(Z) \in$
 $T^*X \cong G^R M^+$)。 なるとき §A.2 と同様の議論により $M \cong$
 $\text{Hed}(Z_Y)$ である。 $Z_Y \cong \{ (x, g_1 B, g_2 B) \in O \times X \times X \mid x \in g_2 Y \cap g_1 M^+ \}$
 となるので、 $x \in Y$ により $Z_Y \in O = G/Z_G(x)$ 上の fiber 束を考えると、
 $Z_Y \cong G^{Z_G(x)} (X_x \times \hat{X}_x)$ 。 ところで $\hat{X}_x = \bigcup_{\substack{C \in \text{In}(X_x) \\ R(C)=Y}} C$ (2.1) 参照)。
 従って W -加群として

$$M \cong (\text{Hed}_0(X_x) \oplus \text{Hed}_0(\hat{X}_x))^{A(x)}.$$

==> W の $\text{Hed}_0(X_x) \cap$ の作用は §A.1 で与えられたもの、

$H_{2d_0}(\widehat{X}_x)$ の作用は identity である。 $\text{Irr}(\widehat{X}_x) = R^{-1}(Y)$ には $A(x)$ が推移的に作用 (2.11.3 ので, $C_0 \in \text{Irr}(\widehat{X}_x)$ を取ると) 固定して $A(x, C_0) = \{z \in A(x) \mid z \cdot C_0 = C_0\}$ とおくと,

$$(A.1) \quad M \cong H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C_0)}$$

とある。 $\text{Irr}(X_x)$ の $A(x, C_0)$ -軌道分解を $\text{Irr}(X_x) = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_E$ とすると, $\{\sum_{C \in I_j} [C] \mid j=1, \dots, E\}$ は $H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C_0)}$ の基底になり,

(1) も (ii) 型 (A.1) でこれは M の基底 $\{\bar{b}(w) \mid Y^0(w) = Y\}$ に対応 (2.11.3)。

$I \subset H_{2d_0}(X_x) = \bigoplus_{z \in \mathcal{I}_0} (T_{(0,z)} \oplus \bar{z})$, $H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$

$= T_{(0,1)} \oplus \bar{1} = T_{(0,1)}$ での射影 $H_{2d_0}(X_x) \xrightarrow{P} H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ が

定まる。 11.3 N が $H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C_0)}$ の non-zero は W -部分加群

であって, $\{\sum_{C \in I_j} [C] \mid j=1, \dots, E\}$ の部分集合と取る。 $H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$

は既約で また $P(\sum_{C \in I_j} [C]) = \frac{1}{\#|A(x)|} \sum_{C \in I_j} \sum_{z \in A(x)} [z \cdot C] \neq 0$ 。 すると

$P(N) = H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ 。 すると $N \supset H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ 。 $\text{Irr}(X_x)$ の $A(x)$ -軌道

分解を $\text{Irr}(X_x) = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_s$ (各 J_r は異なる I_j の合併集合)

とあるとき $H_{2d_0}(X_x)^{A(x)} = \bigoplus_{r=1}^s \mathbb{C}(\sum_{C \in J_r} [C])$ 。 すると N のとり方

から $N = H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C_0)}$ 。 (i) を示す。 (ii) は (i) と (ii) の両方である。 (iii) を示す。 $O_M^{gr} = O_Y^{gr}$ とある。

$\{z \in W \mid O_z^{gr} = 0\} \xrightarrow{(1.17.1)} \text{Irr}(\overline{ONM^+}) \times \text{Irr}(\overline{ONM^+}) \quad (z \mapsto Y^0(z), Y^1(z))$

は全射 (2.11.3) ので, ある $z \in W$ に対して $Y^0(z) = Y^0(w)$, $Y^1(z) = Y^1(w)$

とある (ii) により $w \sim z \sim y$ かつ $w \sim_{gr} y$ 。 Lemma 2.11 が

示されたい。

Corollary A.2 $w \in W, O = O_w^{or}, Y = Y^o(w), x \in O$
 $C \in R^-(Y) \ (Inv(X_x) \xrightarrow{\theta} Inv(\overline{O \cap M^+}) \text{ (2.1) 参照})$ とする。

$A(x, C) = \{z \in A(x) \mid z \cdot C = C\}$ と仮定して,

$$V_w^0 \cong H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C)}.$$

Conjecture A.3

$$(i) \ w \cong y \iff Y^o(w) \supset Y^o(y)$$

$$(ii) \ w \cong y \iff Y^r(w) \supset Y^r(y)$$

$$(iii) \ w \cong_{er} y \iff \overline{O_w^{er}} \supset \overline{O_y^{er}}$$

追記 本文を書いた後で次の事がわかったので, ここに記す。Borho-Brylinski 予想は次の (A) と同値であった (3.4.1)。

(A) 特殊表現 $S_x(O_w^{LP}) = \sigma(w)$ の 2 種類の基底 $\{\gamma_Y \mid Y \in Inv(\overline{O \cap M^+})\}$ $\{P_Y \mid Y \in O_w^{LP}/\sim\}$ は定数倍を除いて一致する。

一方 Kazhdan-Lusztig は, 1979 年頃, 次の仮説 (B) の反例を B_3, C_3 で発見した (未発表)。

(B) 特殊表現の基底 $\{\gamma_Y \mid Y \in Inv(\overline{O \cap M^+})\}$ は, ある W -graph ([KL1] 参照) からくる Hecke 環の表現の基底を $\gamma \mapsto 1$ と特殊化したものと一致する。

そこで次の (C) が示されれば, (B) の反例の存在から (A) の反例の存在が導かれる。

「(C) 特殊表現の基底 $\{p_{y_1} \mid y_1 \in \mathbb{C}_w^{LP}/\sim\}$ は, ある W -graph から W の Hecke 環 $\mathcal{H}$ の表現の基底 $\varepsilon \mapsto 1$ と特殊化した ε と定数倍を除く一致する。」

(C) は次の様にして示される。 $\rho \in \mathcal{H}$ は特殊表現, $V \in \mathcal{H}$ は ρ の両側 cell 表現とし, V の右 cell 表現への分解 $V = \bigoplus_i V_i$ とする。 V は $W \times W$ -加群で各 V_i は $1 \times W$ -部分加群である。 $1 \times W$ は V への作用により V は W -加群と見て $\text{Hom}_W(\rho, V)$ を考える。 $W \times 1$ は V への作用により, ρ は W -加群になり, $\rho \simeq \text{Hom}_W(\rho, V) = \bigoplus_i \text{Hom}_W(\rho, V_i)$ と表す。 また $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_W(\rho, V_i) = 1$ である。 $[G_y]$ によりある W -graph があって, ρ に対応する Hecke 環 $\mathcal{H}$ の表現 ρ を $\varepsilon \mapsto 1$ と特殊化したものは ρ と同型。 ε は W -graph から定まる ρ の基底 $\varepsilon \mapsto 1$ と特殊化したものはある $\text{Hom}_W(\rho, V_i) \in \mathbb{C}$ と表す。 ε は, $[y_1]_{LR} \geq [y_2]_{LR}, y_1 \not\sim y_2 \Rightarrow \deg p_{y_1} < \deg p_{y_2}$ となるので V から ρ への W -加群としての全射導同型 $\mathcal{G}$ があって, $\dim \mathcal{G}(V_i) = 1$ 。 $\mathcal{G}(V_i)$ はある p_{y_1} により張られる。 $x \in \rho, x \neq 0$ をとり ε とするとき $\text{Hom}_W(\rho, V) \xrightarrow{F_x} \rho \quad (f \mapsto \mathcal{G}(f(x)))$ は W -加群としての同型写像。 定義から明らかに, $F_x(\text{Hom}_W(\rho, V_i)) = \mathcal{G}(V_i)$ である (C) が示された。

REFERENCE

- [ALS] Alvis, D., Lusztig, G., Spaltenstein, N. : On Springer's correspondence for simple groups of type E_n ($n=6,7,8$). Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 92, 65-78 (1982)

- [BV1] Barbasch, D., Vogan, D. : Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups. Math. Ann. 259, 153-199 (1982)
- [BV2] ———, ——— : Primitive ideals and orbital integrals in complex exceptional groups. J. Algebra 80, 350-382 (1983)
- [BeB] Beilinson, A., Bernstein, J. : Localisation de $\mathfrak{g}$ -modules. Comptes Rendus 292, 15-18 (1981)
- [BoB1] Borho, W., Brylinski, J.-L. : Differential operators on homogeneous spaces. I. Invent. Math. 69, 437-476 (1982)
- [BoB2] ———, ——— : ———. III. Invent. Math. 80, 1-68 (1985)
- [BM] ———, MacPherson, R. : Representations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les varietes de nilpotents. Comptes Rendus 292, 707-710 (1981)
- [BK] Brylinski, J.-L., Kashiwara, M. : Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems. Invent. Math. 64, 387-410 (1981)
- [D] Duflo, M. : Sur la classification des ideaux primitifs dans l'algebre enveloppante d'une algebre de Lie semi-simple. Ann. Math. 105, 107-120 (1977)
- [Gi] Ginsburg, V. : $\mathfrak{g}$ -modules, Springer's representations and bivariant Chern classes. Preprint, Moscow (1984)
- [Gy] Gyoja, A. : On the existence of a W -graph for an irreducible representation of a Coxeter group. J. Algebra 86 422-438 (1984)
- [H] Hotta, R. : On Joseph's construction of Weyl group representations. Tohoku Math. J. 36, 49-74 (1984)
- [J1] Joseph, A. : W -module structure in the primitive spectrum of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra. In: Noncommutative harmonic analysis, Lecture Notes in Math.. 728 116-135. Berlin Heidelberg New York: Springer 1979
- [J2] ——— : Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra I, II. J. Algebra 65, 269-316 (1980)
- [J3] ——— : On the variety of a highest weight module. J. Algebra 88, 238-278 (1984)
- [J4] ——— : On the associated variety of a primitive ideal. J. Algebra 93, 509-523 (1985)

- [KT] Kashiwara, M., Tanisaki, T. : The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold -related to the Weyl group algebra. *Invent. Math.* 77, 185-198 (1984)
- [KL1] Kazhdan, D., Lusztig, G. : Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.* 53, 165-184 (1979)
- [KL2] ———, ——— : A topological approach to Springer's representations. *Adv. Math.* 38, 222-228 (1980)
- [L] Lusztig, G. : Green polynomials and singularities of unipotent classes. *Adv. Math.* 38, 169-178 (1981)
- [LV] ———, Vogan, D. : Singularities of closures of K -orbits on flag manifolds. *Invent. Math.* 71, 365-379 (1983)
- [M] Mizuno, K. : The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups E_7 and E_8 . *Tokyo J. Math.* 3, 391-461 (1980)
- [Sh1] Shoji, T. : On the Springer representations of the Weyl groups of classical algebraic groups. *Comm. Alg.* 7, 1713-1745 (1979), Correction *Comm. Alg.* 7, 2027-2033 (1979)
- [Sh2] ——— : On the Springer representations of Chevalley groups of type F_4 . *Comm. Alg.* 8, 409-440 (1980)
- [Sh3] ——— : On the Green polynomials of a Chevalley group of type F_4 . *Comm. Alg.* 10, 505-543 (1982)
- [Spa] Spaltenstein, N. : On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups. *Topology* 19, 203-204 (1977)
- [Spr] Springer, T. A. : Quelques applications de la cohomologie d'intersection. *Seminaire Bourbaki*, expose 589. *Asterisque* 92-93, 249-273 (1982)
- [St] Steinberg, R. : On the desingularization of the unipotent variety. *Invent. Math.* 36, 209-224 (1976)
- [T1] Tanisaki, T. : Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups. *Tohoku Math. J.* 34, 575-585 (1982)
- [T2] ——— : Holonomic systems on a flag variety associated to Harish-Chandra modules and representations of a Weyl group. *Adv. Studies in Pure Math.* 6, 139-154 (1985)
- [V] Vogan, D. : Ordering of the primitive spectrum of a semisimple Lie algebra. *Math. Ann.* 248, 195-203 (1980)