数理解析研究所講究録
632巻 1987年 70-90

$\mathfrak{p}$進体上の$GSp(2)$の既約 *supercuspidal* 表現について

東大理学部　益本　洋（Hiroshi Masumoto）

§0. Introduction

Fを剰余標数が奇素数の非アルキメデス的局所体とし，Gを4変数の *similitude* 付きの *symplectic* 群とする。即ち
$G=GSp(2,F)=\{g\in GL(4,F)\mid gJ\,{}^tg=n(g)J,\ n(g)\in F^\times\}$
但し　$J=\begin{pmatrix}0_2 & 1_2\\ -1_2 & 0_2\end{pmatrix}$とする。

伊原[5]の予想あるいはもっと一般に *Langlands* 予想の局所版の試みとして、日名との共同研究[4]で、Gとその *compact twist*（2変数の4元数 *unitary* 群）のある表現達の間に指標を保つ良い対応が存在する事を示した。しかし、そこでは非 *supercuspidal* 表現しか扱う事ができなかった。ここでは（将来、上述の対応が *supercuspidal* 表現達の範囲に迄拡張されるか否かを調べる前段階として）Gの既約な *supercuspidal* 表現について調べて見た。

Harish-Chandra 予想に依れば、Gの既約表現は、その極

大torusの指標でparametrizeされると考えられる。そこで§1では、GとそのLie環の半単純な元のG－共役類の分類を行ない、然る後にGの極大F－torusの分類を行なった。(5つの型があり、その内2つがanisotropic torus.) 次の段階として(今の所、anisotropic torusの指標が与えられた時、それに既約supercuspidal表現を自然な意味で対応させる方法は知られていないが) Kutzko [6]がGL(2,F)で、Carayol [1]がGL(n,F)で行なって効果的であった様に、compact-by-center部分群からのcompact誘導の方法を利用して既約supercuspidal表現を構成した。§2では、各々、あるparahoric部分群のG中での正規化群となる様なcompact-by-center開部分群H(s) (s=1, 2, 3, 4)を定義し(従ってH(s)は自然なfiltrationを持つ), H(s)の"strongly cuspidal表現"という概念を導入した(定義 2−2)。これはKutzko [6]の不分岐表現の一般化と見る事ができる。この概念の導入によって、非常に簡潔で美しいcompact誘導に関する理論を展開する事ができる(定理 2−4)。この方面の研究は土方[3]によって、もっと一般のreductive群に対して成されている。この定理2−4により、ここで構成するGの既約supercuspidal表現の分類は、H(s)のstrongly cuspidal表現の分類に帰着され、これは更にH(s)のstrongly cuspidal 表現を介して定義される Lie 環 $\mathfrak{g}$ の "strongly cuspidal な元" のある合同条件下での $H(S)$-共役類の分類定理（定理 2−5, 定理 2−7 ）に帰着する。§3 では "非退化" strongly cuspidal な元 A を使って、実際に $H(S)$ の strongly cuspidal 表現を構成し、（compact 誘導により）G の既約な supercuspidal 表現を構成する。

当然 G の既約 supercuspidal 表現が全てこの様な方法で得られるか否かという問題が残っているが、それは今の所未解決である。（$GL(n,F)$ の場合でも一般のサイズ n では知られていない。）

§1. $GS_p(2,F)$ の極大 F−torus

この節では、先ず $G=GS_p(2,F)$ とその Lie 環 $\mathfrak{g}$ の半単純な元の G−共役類の分類をする。

$$(\ \mathfrak{g}=\{\, A\in M(4,F)\mid J\,{}^tA+AJ=s(A)J\ ,\ s(A)\in F\,\}\ )$$

補題 1−1. E を F の 2 次拡大とし、ι_E を E の $M(2,F)$ への埋め込み（を自然に $M(2,E)\hookrightarrow M(4,F)$ に拡張した物）とする。この時 $\forall g\in M(2,E)$ に対して

$$J\,{}^t(h^{-1}\iota_E(g)\,h)\,J^{-1}=h^{-1}\,\iota_E\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}^{-1}{}^tg\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)h$$

となる $h\in GL(4,F)$ が存在する。　この時、特に

$$\begin{cases} h^{-1}\iota_E(g)h \in G \iff \det(g) \in F^\times \\ h^{-1}\iota_E(g)h \in \mathfrak{g} \iff \mathrm{tr}(g) \in F \end{cases}$$ が成立する。

命題 1−2. $g \in G$ を、特性多項式が $f_g(X)$, similitude $n(g)$ の半単純元とすると、g は次の内の唯一つの代表元に G−共役となる。（長くなるので、自明なもの及び後で不要な物は省略する。） (1)〜(7) 略.

(8) $f_g(X) = f_A(X)^2$, $n(g) = n$, $g = \begin{pmatrix} A & O_2 \\ O_2 & n\,{}^tA^{-1} \end{pmatrix}$. 但し $f_A(X)$ は regular elliptic な元 $A \in GL(2,F)$ の特性多項式（F−既約）で $\det(A) = -n$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ とする。

(9) $f_{g_t}(X) = f_A(X)^2$, $n(g_t) = \det(A)$, $g_t = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & -t\beta \\ \gamma & 0 & \delta & 0 \\ 0 & -t^{-1}\gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
但し $f_A(X)$ は、regular elliptic な元 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2,F)$ の特性多項式で、E を $f_A(X)$ の分解体とする時、t は $F^\times / N_{E/F}(E^\times)$ を動く。

(10) $f_g(X) = f_A(0)^{-1} X^2 f_A(X) f_A(nX^{-1})$, $n(g) = n$, $g = \begin{pmatrix} A & O_2 \\ O_2 & n\,{}^tA^{-1} \end{pmatrix}$
A, $f_A(X)$ は上と同じで, $f_A(X) \neq f_A(0)^{-1} X^2 f_A(nX^{-1})$ とする。

(11) $f_{g_t}(X) = f_{A_1}(X) f_{A_2}(X)$, $n(g_t) = \det(A_1) = \det(A_2)$,
$g_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & t\beta_2 \\ \gamma_1 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & t^{-1}\gamma_2 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$ 但し $f_{A_1}(X)$, $f_{A_2}(X)$ は各々 regular elliptic な元 $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$ $\in GL(2,F)$ の特性多項式で、相異なるとする。E_1, E_2 を f_{A_1}, f_{A_2} の分解体とする時、t は $F^\times / N_{E_1/F}(E_1^\times) N_{E_2/F}(E_2^\times)$

を動く。

(12) $f_{g_\tau}(X) = X^2 f(X + nX^{-1})$, $n(g_\tau) = n$, $g_\tau = h^{-1}\iota_E\begin{pmatrix}\alpha & \tau\beta \\ \tau^{-1}\gamma & \delta\end{pmatrix}h$.
但し、E は F の2次拡大, $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ は $GL(2,E)$ の regular elliptic な元, $f(X)$ は $\iota_E(\alpha+\delta)$ の特性多項式, $\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = n$, f_{g_τ} は既約でその分解体を M とする時、τ は $E^\times/F^\times N_{M/E}(M^\times)$ を動く。(ι_E と h は補題 1-1 と同様とする。)

命題 1-3. $A \in \mathfrak{g}$ を、特性多項式が $f_A(X)$, $J\,{}^tA + AJ = s(A)J$ なる半単純な元とすると、A は次の内の唯一つの代表元に G-共役となる。(命題 1-2. の (2) と (8) に相当する物はない。) (1)〜(7) 略.

(9) $f_{A_t}(X) = f(X)^2$, $s(A_t) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, $A_t = \begin{pmatrix}\alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & -t\beta \\ \gamma & 0 & \delta & 0 \\ 0 & -t^{-1}\gamma & 0 & \alpha\end{pmatrix}$

但し $f(X)$ は、$GL(2,F)$ の regular elliptic な元 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ の特性多項式で、E を $f(X)$ の分解体とする時 t は $F^\times/N_{E/F}(E^\times)$ を動く。

(10) $f_A(X) = f(X)f(s-X)$, $s(A) = s$, $A = \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} & O_2 \\ O_2 & s1_2 - {}^t\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\end{pmatrix}$

但し $f(X)$ と $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ は上と同じで, $f(X) \neq f(s-X)$ とする。

(11) $f_{A_t}(X) = f_1(X)f_2(X)$, $s(A_t) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix} = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}$,

$A_t = \begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & t\beta_2 \\ \gamma_1 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & t^{-1}\gamma_2 & 0 & \delta_2\end{pmatrix}$ 但し $f_1(X)$, $f_2(X)$ は, $GL(2,F)$ の regular elliptic な元 $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}$

の特性多項式で相異なるとする。E_1, E_2 を $f_1(X)$, $f_2(X)$ の分解体とする時、t は $F^\times/N_{E_1/F}(E_1^\times)\,N_{E_2/F}(E_2^\times)$ を動く。

(12) $f_{A_\tau}(X)= f(X(s-X))$, $s(A_\tau)=s$, $A_\tau = h^{-1}\,\iota_E\begin{pmatrix}\alpha & \tau\beta \\ \tau^{-1}\gamma & \delta\end{pmatrix} h$.

但し、EはFの2次拡大、$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ は $GL(2,E)$ の *regular elliptic* な元, $f(X)$ は $\iota_E(\alpha\delta-\beta\gamma)$ の特性多項式, $\mathrm{tr}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=s$, f_{A_τ} は既約で、その分解体をMとする時、τ は $E^\times/F^\times N_{M/E}(M^\times)$ を動く。(ι_E と h は補題1-1と同様とする。)

(注) (11)に於いて $[F^\times : N_{E_1/F}(E_1^\times)\,N_{E_2/F}(E_2^\times)] = \begin{cases} 1 & E_1 \not\cong E_2 \text{ の時} \\ 2 & E_1 \cong E_2 \text{ の時} \end{cases}$

(12)に於いて $[E^\times : F^\times N_{M/E}(M^\times)] = \begin{cases} 2 & M/F \text{ が } (2,2)\text{-拡大の時} \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$

が成立する。G内での中心化群は次の群に同型となる。(8)型の元の場合 $\{g \in GL(2,E) \mid \det g \in F^\times\}$, (9)型の元の場合、

$$\begin{cases} E^\times \times GL(2,F)/\{(a,a^{-1}) \mid a \in F^\times\} & t \in N_{E/F}(E^\times) \text{ の時} \\ E^\times \times D^\times/\{(a,a^{-1}) \mid a \in F^\times\} & t \notin N_{E/F}(E^\times) \text{ の時} \end{cases}$$

(但しDはF上の四元数体)となる。G内での中心化群が *mod center* で *compact* になるのは (11), (12)型 と (9)型 ($t \notin N_{E/F}(E^\times)$) の元の場合のみである。

命題1-2と1-3の証明は、橋本-伊吹山[2]と同様の方法で行なえる。次にGの *maximal torus* の共役類の分類について述べる。

定理 1-4. $\mathbb{T}$をGの極大 F-torus とすると，$\mathbb{T}$は次の5つの型の内の1つに共役となる。

(1) $\mathbb{T}_1(F)=\left\{\begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & na^{-1} & \\ & & & nb^{-1}\end{pmatrix} \middle| a,b,n\in F^\times\right\}$ (F-split torus)

(2) 各2次拡大 E/F に対して

$$\mathbb{T}_{2,E}(F)=\left\{\begin{pmatrix} a & & & \\ & \alpha & & \beta \\ & & na^{-1} & \\ & \gamma & & \delta\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in \iota_E(E^\times)\\ \det\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=n,\quad a,n\in F^\times\end{array}\right\}$$

(3) 各2次拡大 E/F に対して

$$\mathbb{T}_{3,E}(F)=\left\{\begin{pmatrix} A & \\ & n\,{}^tA^{-1}\end{pmatrix} \middle| A\in \iota_E(E^\times),\ n\in F^\times\right\}$$

(4) Fの2次拡大の組 (E_1,E_2) に対して，g_t を命題 1-2 (11) の様にとるとき，

$$\mathbb{T}_{4,(E_1,E_2),t}(F)=Z_G(g_t)$$
$$\cong\{(\alpha_1,\alpha_2)\in E_1^\times\times E_2^\times \mid N_{E_1/F}(\alpha_1)=N_{E_2/F}(\alpha_2)\}$$

(5) E/F, M/E を各々2次拡大とする。g_τ を命題 1-2 (12) の様にとる時，

$$\mathbb{T}_{5,(M,E),\tau}(F)=Z_G(g_\tau)\cong\{\alpha\in M^\times \mid N_{M/E}(\alpha)\in F^\times\}$$

以上の torus は (4) で，$E_1\cong E_2\,(\cong E)$ で $N_{E/F}(E)\not\ni -1$ の時 $\mathbb{T}_{4,(E_1,E_2),1}$ と $\mathbb{T}_{4,(E_1,E_2),t}$ (t は $F^\times/N_{E/F}(E^\times)$ の元として見る時 $t\neq 1$) が共役になる以外は互いに非共役である。

(注) 上のトーラスの内、中心で割って compact になるのは (4), (5) 型のみである。

§2. Gのある compact-by-center なる部分群の strongly cuspidal 表現.

$\mathfrak{o}=\mathfrak{o}_F$（$F$の整数環），$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_F$（$F$の素イデアル），$\pi=\pi_F$（$F$の素元，fixする）とする時，記号を次の様に定める。

$\mathfrak{O}(1)=M(4,\mathfrak{o})$

$\mathfrak{O}(2)=\left\{\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\,\middle|\,A,B,D\in M(2,\mathfrak{o}),\ C\in M(2,\mathfrak{p})\right\}$

$\mathfrak{O}(3)=\left\{\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\mathfrak{O}(2)\,\middle|\,A,\ {}^tD\in\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M(2,\mathfrak{o})\,\middle|\,c\in\mathfrak{p}\right\}\right\}$

$$\mathfrak{O}(4)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&\pi&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\mathfrak{O}(2)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&\pi&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$\Pi(1)=\pi 1_4$, $\Pi(2)=\begin{pmatrix}0_2&1_2\\\pi 1_2&0_2\end{pmatrix}$, $\Pi(3)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\\pi&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$,

$\Pi(4)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&\pi&0&0\\\pi&0&0&0\end{pmatrix}$ $(=\Pi(3)^2)$, $Z(1)=\langle\Pi(1)\rangle$,

$Z(2)=\langle\Pi(2)\rangle$, $Z(3)=\langle\Pi(3)^2\rangle$, $Z(4)=\langle\Pi(4)\rangle$：無限巡回群

$\mathfrak{P}^\nu(s)=\Pi(s)^\nu\mathfrak{O}(s)\quad(s=1,2,3,4)\quad\nu\in\mathbb{Z}$

$K_\nu(s)=(1_4+\mathfrak{P}^\nu(s))\cap G\quad\nu\in\mathbb{Z},\ \geq 0$

$\mathfrak{g}_\nu(s)=\mathfrak{P}^\nu(s)\cap\mathfrak{g}\quad\nu\in\mathbb{Z}$

$K(s)=K_0(s)$, $\quad H(s)=K(s)\rtimes Z(s)$

(注) $K(s)$は いわゆる parahoric 部分群になっていて、$H(s)$は、G内での$K(s)$の正規化部分群$N_G(K(s))$と一致している。

以下、混乱の恐れのない時は$K(S)$等のSを省略して単にKなどと書く。次に以下で必要となる定義を2つ述べる。

定義2−1. Gの admissible 表現Rが supercuspidal とは、任意のGの極大 parabolic 部分群Pの unipotent radical $U=U(P)$に対して$\mathrm{Hom}_U(R, 1_U)=\{0\}$が成立する事である。(ここで Hom は intertwining operator の成す空間で、1_UはUの単位表現。)

定義2−2. $\tau\in\widehat{H}$ (Hの既約 admissible 表現全体を表わす)が "level ν ($\nu\in\mathbb{N}$) の strongly cuspidal 表現" であるとは、① $\tau|_{K_\nu}=1$ ② $\mathrm{Hom}_{K_{\nu-1}\cap U}(\tau, 1_U)=\{0\}$が成立する事である。(ここで Hom, U, 1_U は定義2−1と同様とする。)

$H(S)$の level ν の strongly cuspidal 表現全体を$\widehat{H(S)}^{\#}_{\nu}$と書く事にすると、$S=2,3$, $\nu=odd$ 又は $S=4$, $\nu=even$ の時 $\widehat{H(S)}^{\#}_{\nu}=\phi$ となる事が分かる。次に、$\mathfrak{g}_\nu(S)$の "strongly cuspidal な元" という概念を導入する。

定義2−3. $A\in\mathfrak{g}_\nu(S)$が (type (S,ν) の) strongly cuspidal な元であるとは、$\mathfrak{g}$の任意の極大 parabolic subalgebra

と $A+\mathfrak{g}_{\nu+1}(s)$ が共通部分を持たない事を言う。

type (ν, s) の strongly cuspidal な元全体を $\mathfrak{g}_\nu^{\#}(s)$ と書く事にする。strongly cuspidal 表現に対しては、次が成り立つ。

定理2－4. $\tau\in\widehat{H(s)}_\nu^{\#}$, $\tau'\in\widehat{H(s')}_{\nu'}^{\#}$ とする時、

① $c\text{-}\mathrm{Ind}^G\tau$ は G の既約 supercuspidal 表現となる。

② $c\text{-}\mathrm{Ind}^G\tau$ と $c\text{-}\mathrm{Ind}^G\tau'$ が同値になる条件は $s=s'$, $\nu=\nu'$ かつ τ と τ' が同値である事である。

（$c\text{-}\mathrm{Ind}$ は, "compact induction" を表わす。）

証明は "Mackey の定理" による。さて ψ を F の additive character で $\psi(\mathfrak{o})=1$, $\psi(\mathfrak{p}^{-1})\neq 1$ なる物とする。$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 上に $\Phi(X,Y)=\psi(\mathrm{tr}(XY))$ $(X,Y\in\mathfrak{g})$ なる bilinear form を定めると, $\mathfrak{g}$ と $\hat{\mathfrak{g}}$ は Φ（非退化となる）により同一視できる: $\mathfrak{g}\ni X\longmapsto\Phi_X\in\hat{\mathfrak{g}}$（但し $\Phi_X(Y)=\Phi(X,Y)$ $X,Y\in\mathfrak{g}$）. この時 $\Phi_X|_{\mathfrak{g}_\nu(s)}=1\iff X\in\mathfrak{g}_{-\nu-\alpha(s)}(s)$（但し $\alpha(1)=0$, $\alpha(2)=1$, $\alpha(3)=3$, $\alpha(4)=1$）が成り立つ。$H(s)$ は $\{K_\nu(s)\}_{\nu\geq 0}$ を normalize するので, $H(s)$ の $K_\nu(s)$ 上自明な既約表現（これ全体を $\widehat{H(s)}_\nu$ と書く）を $K_{\{\nu/2\}}(s)$（但し $\{\nu/2\}$ は $\nu/2$ 以上の最小整数を表わす.）に制限する事により、次の写像が得られる。

$$\widehat{H(S)_\nu} \xrightarrow{res.} I(H(S))\backslash\left(\widehat{K_{\{\nu/2\}}(S)/K_\nu(S)}\right) \qquad (\nu \geqq 2)$$
$$\cong I(H(S))\backslash\left(\widehat{\mathfrak{g}_{\{\nu/2\}}(S)/\mathfrak{g}_\nu(S)}\right)$$
$$\cong I(H(S))\backslash\left(\mathfrak{g}_{-\nu-d(S)}(S)/\mathfrak{g}_{-\{\nu/2\}-d(S)}(S)\right)$$

なお、$I(H(S))$は $H(S)$の元の内部自己同型による作用全体を表わし、最初の同一視は $K_{\{\nu/2\}} \ni k \longmapsto k-1 \in \mathfrak{g}_{\{\nu/2\}}$ によって得られ，次の同一視は上述の $\mathfrak{g}$ と $\hat{\mathfrak{g}}$ の同一視による。この時 $res.(\widehat{H(S)}_\nu^{\#}) = I(H(S))\backslash(\mathfrak{g}^{\#}_{-\nu-d(S)}(S)/\mathfrak{g}_{-\{\nu/2\}-d(S)}(S))$ となる。よって *level* ν の $H(S)$ の *strongly cuspidal* 表現を調べるには、まず上式の右辺について考えればよい。上式の右辺は、

$$\begin{cases} I(H(1))\backslash \pi^{-\nu}(\mathfrak{g}_0^{\#}(1)/\mathfrak{g}_{[\nu/2]}(1)) & S=1 \text{ の時.} \\ I(H(2))\backslash \pi^{-\nu/2-1}(\mathfrak{g}_1^{\#}(2)/\mathfrak{g}_{\nu/2+1}(2)) & S=2,\ (\nu:\text{even}) \\ I(H(3))\backslash \pi^{-\nu/4-1}(\mathfrak{g}_1^{\#}(3)/\mathfrak{g}_{\nu/2+1}(3)) & S=3,\ \nu/2:\text{even} \\ I(H(3))\backslash \pi^{-(\nu+2)/4-1}(\mathfrak{g}_3^{\#}(3)/\mathfrak{g}_{\nu/2+3}(3)) & S=3,\ \nu/2:\text{odd} \\ I(H(4))\backslash \pi^{-(\nu+1)/2}(\mathfrak{g}_0^{\#}(4)/\mathfrak{g}_{(\nu-1)/2}(4)) & S=4,\ (\nu:\text{odd}) \end{cases}$$

となる。(但し $[\cdot]$ は Gauss 記号.) 以下、この様に"正規化"した、$\mathfrak{g}_i^{\#}(S)$ の mod $\mathfrak{g}_{i+[\nu/2]}(S)$ での $H(S)$－共役類について、2段階に分けて分類定理を述べる。($\mathfrak{g}_i^{\#}(S)$ は $\mathfrak{g}_0^{\#}(1)$, $\mathfrak{g}_1^{\#}(2)$, $\mathfrak{g}_1^{\#}(3)$, $\mathfrak{g}_3^{\#}(3)$, $\mathfrak{g}_0^{\#}(4)$ のいずれか。)

<u>定理2－5</u>. E/F を不分岐2次拡大とし，ι_Eを Eの $M(2,F)$ への埋め込みで、$\iota_E(\mathfrak{O}_E^\times) \subset GL(2,\mathfrak{O}_F)$ なる物と

する。$A\in\mathfrak{g}_i^{\#}(S)$ は mod $\mathfrak{g}_{i+1}(S)$ で、次の形の元のいずれかと唯一つに $H(S)$−共役となる。(以下で h は補題1−1 の条件を満たし，$h\in GL(4,\mathcal{O})$ にとっておく。)

(1) $A\in\mathfrak{g}_0^{\#}(1)$ の時、

① $h^{-1}\iota_E\begin{pmatrix}0&1\\-\alpha&s\end{pmatrix}h$ $\quad s\in\mathcal{O}_F$, $\alpha\in\mathcal{O}_E^{\times}$, $X^2-sX+\alpha\in\mathcal{O}_E[X]$ は mod $\mathfrak{p}_E$ で既約。

② $\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-d_1&0&s&0\\0&-d_2&0&s\end{pmatrix}$ $\quad s\in\mathcal{O}$; $d_1,d_2\in\mathcal{O}^{\times}$
X^2-sX+d_1 と X^2-sX+d_2 は mod $\mathfrak{p}$ で、既約で相異なる。

(2) $A\in\mathfrak{g}_1^{\#}(2)$ の時、

① $\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-t\\\pi a&0&0&0\\0&-\pi t^{-1}b&0&0\end{pmatrix}$ $\quad a,b\in\mathcal{O}^{\times}$, t は $\mathcal{O}^{\times}/(\mathcal{O}^{\times})^2$ を動き、$t=1$ の時は $a\not\equiv b\ (\mathrm{mod}\,\mathfrak{p})$, $t\neq 1$ の時は $ab\in(\mathcal{O}^{\times})^2$ とする。

② $h^{-1}\iota_E\begin{pmatrix}0&\tau\\\pi\tau^{-1}\alpha&0\end{pmatrix}h$ $\quad \alpha\in\mathcal{O}_E\setminus\mathcal{O}_F$, τ は $\mathcal{O}_E^{\times}/(\mathcal{O}_E^{\times})^2$ を動き、$\tau\neq1$ の時は $\alpha\in(\mathcal{O}_E^{\times})^2$ とする。

(3) $A\in\mathfrak{g}_1^{\#}(3)$ [resp. $A\in\mathfrak{g}_3^{\#}(3)$] の時、

$\begin{pmatrix}0&a&0&0\\0&0&0&b\\\pi c&0&0&0\\0&0&-a&0\end{pmatrix}$ [resp. $\begin{pmatrix}0&0&b&0\\\pi a&0&0&0\\0&0&0&-\pi a\\0&\pi c&0&0\end{pmatrix}$] $\quad a,b,c\in\mathcal{O}^{\times}$

(4) $A\in\mathfrak{g}_0^{\#}(4)$ の時、

$\begin{pmatrix}0&0&\pi^{-1}&0\\0&0&0&1\\-\pi d_1&0&s&0\\0&d_2&0&s\end{pmatrix}$ $\quad s\in\mathcal{O}$; $d_1,d_2\in\mathcal{O}^{\times}$
X^2-sX+d_1, X^2-sX+d_2 は mod $\mathfrak{p}$ で既約。

証明は、極大 parabolic subgroup の G-共役類の代表系 $P(1), P(2)$ を固定して，$\forall g \in H(s)$, $\forall w \in P(j)\backslash G/H(s)$ $(j=1,2)$ に対して $g^{-1}Ag + \mathfrak{g}_{i+1}(s)$ と $w^{-1}P(j)w$ が共通部分を持たない条件を具体的に書き下す事によって行なう。

この定理より、特性多項式を比較する事などによって、次の事が分かる。

系 2-6. $A \in \mathfrak{g}_\nu^\#(s)$, $B \in \mathfrak{g}_{\nu'}^\#(s')$, $g \in G$ とする時、$g^{-1}Ag = B \implies s = s'$, $\nu = \nu'$, $g \in H(s)$ が成り立つ。

定理 2-7. $A, B \in \mathfrak{g}_i^\#(s)$ とする。(但し、$\mathfrak{g}_i^\#(s)$ は $\mathfrak{g}_0^\#(1)$, $\mathfrak{g}_1^\#(2)$, $\mathfrak{g}_1^\#(3)$, $\mathfrak{g}_3^\#(3)$, $\mathfrak{g}_0^\#(4)$ のいずれか。) $f_A(X)$, $f_B(X)$ を各々 A, B の特性多項式とする時、A, B が mod $\mathfrak{g}_{i+[\nu/2]}(s)$ で $H(s)$-共役となる条件は、A, B が mod $\mathfrak{g}_{i+1}(s)$ で定理 2-5 の同じ形の元に $H(s)$-共役で，次の合同条件を満たす事である。

(1) $\mathfrak{g}_i^\#(s) = \mathfrak{g}_0^\#(1)$ の時，$f_A(X) \equiv f_B(X) \pmod{\mathfrak{p}^{[\nu/2]}}$

(2) $\mathfrak{g}_i^\#(s) = \mathfrak{g}_1^\#(2)$ の時，

① A, B が定理 2-5 の (2), ① 型の時は，
$f_A(X) = (X^2 - sX + a)(X^2 - sX + b)$, $f_B(X) = (X^2 - tX + c)(X^2 - tX + d)$
$s, t \in \mathfrak{p}$; $a, b, c, d \in \pi\mathcal{O}^\times$ と書ける。この時、

$s \equiv t \pmod{\mathfrak{p}^{\{(\nu+2)/4\}}}$, $(a, b) \equiv (c, d)$ 又は (d, c) $\pmod{\mathfrak{p}^{\{\nu/4\}+1}}$

② A, B が定理2−5の(2)②型の時は,

$f_A(X) = \pi^2 g_A(X(s-X)/\pi)$, $f_B(X) = \pi^2 g_B(X(t-X)/\pi)$

(但し, $s = S(A)$, $t = S(B) \in \mathfrak{p}$, $g_A(X), g_B(X) \in \mathcal{O}[X]$ は $\bmod\ \mathfrak{p}$ で2次既約)と書ける。この時,

$s \equiv t \pmod{\mathfrak{p}^{\{(\nu+2)/4\}}}$, $g_A(X) \equiv g_B(X) \pmod{\mathfrak{p}^{\{\nu/4\}}}$

(3) $\mathfrak{g}_i^{\#}(s) = \mathfrak{g}_1^{\#}(3)$ [resp. $\mathfrak{g}_3^{\#}(3)$] の時,

$f_A(X) = X^4 - 2sX^3 + aX^2 + s(s^2 - a)X + b$

$f_B(X) = X^4 - 2tX^3 + cX^2 + t(t^2 - c)X + d$

(但し $s = S(A)$, $t = S(B)$ で $s, t \in \mathfrak{p}$; $a, c \in \mathfrak{p}$; $b, d \in \pi\mathcal{O}^\times$ [resp. $s, t \in \mathfrak{p}$; $a, c \in \mathfrak{p}^2$; $b, d \in \pi^3\mathcal{O}^\times$])と書ける。この時,

$s \equiv t \pmod{\mathfrak{p}^{\{(\nu+2)/8\}}}$, $a \equiv c \pmod{\mathfrak{p}^{\{(\nu+4)/8\}}}$, $b \equiv d$ $\pmod{\mathfrak{p}^{\{\nu/8\}+1}}$ [resp. $s \equiv t \pmod{\mathfrak{p}^{\{(\nu+6)/8\}}}$, $a \equiv c$ $\pmod{\mathfrak{p}^{\{(\nu+4)/8\}+1}}$, $b \equiv d \pmod{\mathfrak{p}^{\{\nu/8\}+3}}$]

(4) $\mathfrak{g}_i^{\#}(s) = \mathfrak{g}_0^{\#}(4)$ の時,

$f_A(X) = (X^2 - sX + a)(X^2 - sX + b)$, $f_B(X) = (X^2 - tX + c)(X^2 - tX + d)$

(但し $s = S(A)$, $t = S(B)$ で $s, t \in \mathcal{O}$, $a, b, c, d \in \mathcal{O}^\times$)と書ける。この時,

$s \equiv t \pmod{\mathfrak{p}^{[\nu/2]}}$, $(a, b) \equiv (c, d)$ 又は (d, c)

(mod $\mathfrak{p}^{[\nu/2]}$).

Aを strongly cuspidal な元とすると，G内での中心化群 $Z_G(A)$ は中心で割って compact になる。定理 2−5 の(2)の型で $t\neq 1$, $a\equiv b \bmod \mathfrak{p}$ の時と，(4)型で $d_1\equiv d_2$ mod $\mathfrak{p}$ の時を 'degenerate' と呼び，それ以外の時を 'non-degenerate' と言う事にすると，非退化 strongly cuspidal な元 A に対しては，$Z_G(A)$ は anisotropic torus になっている。

§3. Gの既約 supercuspidal 表現の構成

この節では、非退化 strongly cuspidal な元 A が与えられた時に、$\mathrm{res}_{\nu}^{-1}(A)$ に属する strongly cuspidal 表現を全て構成する。まず $A\in\mathfrak{g}_2^{\#}(s)$ $(=\mathfrak{g}_0^{\#}(1),\ \mathfrak{g}_1^{\#}(2),\ \mathfrak{g}_1^{\#}(3),\ \mathfrak{g}_3^{\#}(3)$ or $\mathfrak{g}_0^{\#}(4))$ $\nu\geqq 2$ とする。（$\nu=1$ の時の構成は方法が違うのでここでは取り扱わない。）この時 $K_{\{\nu/2\}}(s)/K_\nu(s)$ 上の表現 $\varphi_{A,\nu}$ を．次の様に定義できる。（$\psi\in\widehat{F_+}$ は§2の様に取る。）

$$\begin{cases}(1)\ \ \varphi_{A,\nu}(h)=\psi(\pi^{-\nu}\operatorname{tr}(A(h-1))) & s=1 \text{ の時 } (A\in\mathfrak{g}_0^{\#}(1))\\ (2)\ \ \varphi_{A,\nu}(h)=\psi(\pi^{-\nu/2-1}\operatorname{tr}(A(h-1))) & s=2 \text{ の時 } (A\in\mathfrak{g}_1^{\#}(2))\\ (3)\ \begin{cases}\varphi_{A,\nu}(h)=\psi(\pi^{-\nu/4-1}\operatorname{tr}(A(h-1))) & s=3,\ \nu/2:\text{even の時}\\ & (A\in\mathfrak{g}_1^{\#}(3))\end{cases}\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_{A,\nu}(h) = \psi\left(\pi^{-(\nu+2)/4-1}\,\mathrm{tr}(A(h-1))\right) \quad s=3,\ \nu/2 : \text{odd} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{の時}\ (A \in \mathfrak{g}_3^{\#}(3)) \end{array}\right.$$

(4) $\varphi_{A,\nu}(h) = \psi\left(\pi^{-(\nu+1)/2}\,\mathrm{tr}(A(h-1))\right)$ $s=4$ の時 ($A \in \mathfrak{g}_0^{\#}(4)$)

各々の場合に, $H(s) = K(s)Z_G(A)$ となっていて, $H \rhd K_{\{\nu/2\}}$ なので、$\varphi_{A,\nu}$ の H の作用による固定部分群が考えられる：

$$I(\varphi_{A,\nu}) = \{ h \in H \mid \varphi_{A,\nu}(h^{-1}kh) = \varphi_{A,\nu}(k) \quad \forall k \in K_{\{\nu/2\}} \}$$

この時、次の事が成り立つ。

<u>命題 3-1.</u> A, $I(\varphi_{A,\nu})$ は上の様なものとすると,
$I(\varphi_{A,\nu}) = K_{[\nu/2]}Z_G(A)$ が成立する。

これは、A の strong cuspidality から出る。さて $\widehat{Z_G(A)}$ の部分集合 $X_{A,\nu}$ を

$$X_{A,\nu} = \{ \chi \in \widehat{Z_G(A)} \mid \chi = \varphi_{A,\nu} \ \text{ on } \ Z_G(A) \cap K_{\{\nu/2\}} \}$$

と定めると, $\chi \in X_{A,\nu}$ に対し, $\varphi_{A,\nu}$ の $Z_G(A)K_{\{\nu/2\}}$ への拡張 $\varphi_{A,\nu,\chi}$ を、次の様に定義できる：

$$\varphi_{A,\nu,\chi}(th) = \chi(t)\varphi_{A,\nu}(h) \quad (t \in Z_G(A),\ h \in K_{\{\nu/2\}})$$

これは well-defined で,一次表現になっている。従って、命題 3-1 と, 有限群の表現論の "Clifford の定理" より, $\mathrm{Ind}^{H}\varphi_{A,\nu,\chi}$ の既約成分は $\mathrm{Ind}^{Z_G(A)K_{[\nu/2]}}\varphi_{A,\nu,\chi}$ の既約

$$\begin{array}{cc} H & \text{キヤク} \\ | & \uparrow \text{Ind.} \\ Z_G(A)K_{[\nu/2]} & \text{キヤク成分} \\ | & \uparrow \\ Z_G(A)K_{\{\nu/2\}} & \varphi_{A,\nu,\chi} \\ | & \uparrow \\ K_{\{\nu/2\}} & \varphi_{A,\nu} \end{array}$$

成分をHに誘導する事によって全て得られる。この事と§2の議論により次の定理が得られる。

定理3-2. ν, ν':even の時上の様にして作った $\varphi_{A,\nu,\chi} \in \widehat{Z_G(A)K_{\nu/2}(S)}$ と $\varphi_{B,\nu',\chi'} \in \widehat{Z_G(B)K_{\nu'/2}(S')}$ に対して次の事が成り立つ。

(1) $\mathrm{Ind}^{H(S)}\varphi_{A,\nu,\chi}$ は(既約)strongly cuspidal 表現になる.

(2) $c\text{-}\mathrm{Ind}^{G}\varphi_{A,\nu,\chi}$ は既約 supercuspidal 表現となる。

(3) $c\text{-}\mathrm{Ind}^{G}\varphi_{A,\nu,\chi}$ と $c\text{-}\mathrm{Ind}^{G}\varphi_{B,\nu',\chi'}$ が同値になる条件は $H(S)=H(S')$, $\nu=\nu'$, $A, B \in \mathfrak{g}_i^{\#}(S)$ が mod $\mathfrak{g}_{i+[\nu/2]}(S)$ で $H(S)$-共役かつ($Z_G(A)$ と $Z_G(B)$ を同一視した時に)$\chi=\chi'$ となる事である。

従って $\nu=$ even の時は $res_\nu^{-1}(A)=\{\mathrm{Ind}^{H}\varphi_{A,\nu,\chi} \mid \chi \in X_{A,\nu}\}$ と記述できる。$\nu=$ odd の時($S=1, 4$ の場合のみ起こりうる)は $\mathrm{Ind}_{Z_G(A)K_{\{\nu/2\}}}^{Z_G(A)K_{[\nu/2]}}\varphi_{A,\nu,\chi}$ の各既約因子に対して、定理3-2と同様の事が言える。そこで、以下では $S=1$ の場合に、この誘導表現の既約分解を行なう。

最初に $A \in \mathfrak{g}_0^{\#}(1)$ が定理2-5の(1)①型の時を扱う。この時 $Z_G(A) \cong T \cong \{\alpha \in M^\times \mid N_{M/E}(\alpha) \in F^\times\}$(定理1-4

の (5) 型の極大 torus (anisotropic) で M/F が不分岐)

となる。$\nu=2n+1$ $(n\in\mathbb{N})$ とおく。

$Z(G)$ を G の center とし，T の部分群を

$T_1=\{\alpha\in\mathcal{O}_M^\times \mid \alpha\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_M}\}Z(G)$

$T_E=\{\alpha\in T \mid \alpha\in\mathcal{O}_E^\times\}Z(G)$ と定め，

$\varphi_{A,\nu,\chi}$ を χ と略記し，$\chi_E=\chi|_{T_EK_{n+1}}$

$\chi_1=\chi|_{T_1K_{n+1}}$ とする。F の剰余体の元

の個数を q と書く時、次の定理を得る。

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
& TK_n \arrow[dd] \\
T_1K_n \arrow[ur] \arrow[dd, "q^8"'] & \\
& \underset{\chi}{TK_{n+1}} \\
\underset{\chi_1}{T_1K_{n+1}} \arrow[ur, "q^2+1"] &
\end{tikzcd}$$

定理 3-3　$\widehat{TK_n}\ni\Theta_\chi$ を

$\Theta_\chi=\mathrm{Ind}\,\chi-2/q^2\,\mathrm{Ind}\,\chi_E+1/q^4\,\mathrm{Ind}\,\chi_1$ と定める。

(1) Θ_χ は q^4 次の既約表現となる.

(2) $\mathrm{Ind}\,\chi=\sum\limits_{\eta=\chi|_{T_1K_{n+1}}}(q^2-2\delta_E+\delta)\,\Theta_\eta$ となる。但し和は

TK_{n+1} の character η で T_1K_{n+1} 上 χ と一致する物全体を

とる。δ, δ_E は(Kronecker のデルタで)，各々 χ と η

が TK_{n+1}, T_EK_{n+1} 上一致する時 1，その他の時 0 と定める。

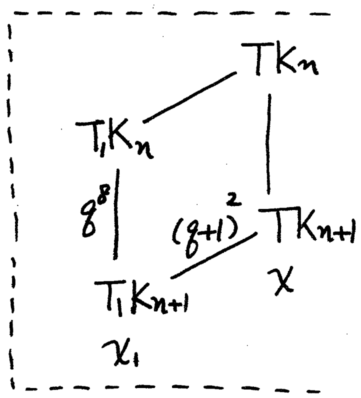
次に、$A\in\mathfrak{g}_0^\#(1)$ が定理 2-5 の (1) ② 型の時を扱う。こ

の時は $Z_G(A)\cong T\cong\{(\alpha,\beta)\in E_1^\times\times E_2^\times \mid N_{E_1/F}(\alpha)=N_{E_2/F}(\beta)\}$

(定理 1-4 の (4) 型の anisotropic torus で E_1, E_2 は F の

不分岐2次拡大（実は $E_1 \cong E_2 (\cong \overline{E})$）で, $t=1$）となる。

前と同様に T の部分群を



$T_1=\{(\alpha,\beta)\in T \mid \alpha\equiv\beta\equiv 1 \ (\mathfrak{p}_E)\}Z(G)$

$T_{E_1}=\{(\alpha,\beta)\in T \mid \beta\equiv 1 \ (\mathfrak{p}_E)\}Z(G)$

$T_{E_2}=\{(\alpha,\beta)\in T \mid \alpha\equiv 1 \ (\mathfrak{p}_E)\}Z(G)$

$T_{E}=\{(\alpha,\beta)\in T \mid \alpha\equiv \beta \ (\mathfrak{p}_E)\}Z(G)$

$T_{\overline{E}}=\{(\alpha,\beta)\in T \mid \alpha\equiv \overline{\beta} \ (\mathfrak{p}_E)\}Z(G)$

$T_{\pm 1}=\{(\alpha,\beta)\in T \mid \alpha\equiv \pm\beta\equiv 1 \ (\mathfrak{p}_E)\}Z(G)$ と定める。

$\varphi_{A,\nu,\chi}$ を χ と略記し, χ の T_1K_{n+1}, $T_{E_1}K_{n+1}$, $T_{E_2}K_{n+1}$, T_EK_{n+1}, $T_{\overline{E}}K_{n+1}$, $T_{\pm 1}K_{n+1}$ への制限を各々 χ_1, χ_{E_1}, χ_{E_2}, χ_E, $\chi_{\overline{E}}$, $\chi_{\pm 1}$ とおく時、次を得る。

定理3−4. $\widehat{TK_n} \ni \Theta_\chi$ を $\Theta_\chi = \mathrm{Ind}\,\chi - 1/q\,(\mathrm{Ind}\,\chi_{E_1} + \mathrm{Ind}\,\chi_{E_2} + \mathrm{Ind}\,\chi_E + \mathrm{Ind}\,\chi_{\overline{E}}) + 2/q^2\,\mathrm{Ind}\,\chi_{\pm 1} + (2q^2-2q+1)/q^4 \cdot \mathrm{Ind}\,\chi_1$ と定める。

(1) Θ_χ は q^4 次の既約表現になる。

(2) $$\mathrm{Ind}\,\chi = \sum_{\eta=\chi|_{T_1K_{n+1}}} \left((q^2-2q+2)+2\delta_{\pm 1}-(\delta_{E_1}+\delta_{E_2}+\delta_E+\delta_{\overline{E}})+\delta\right)\Theta_\eta$$

となる。和の取り方, δ 達は前定理と同様とする。

証明は、誘導表現達の間の *intertwining number* の計算

と，$1/q^4\,\mathrm{Ind}\,\chi_1$ 等が、本当に表現になる事を示すのがポイントである。

大雑把に言うと，ここで構成したGの既約 supercuspidal 表現は、定理 1−4 の (4) 型 torus (E_1, E_2 は共に分岐又は不分岐$/F$) と (5) 型 torus (M/F が不分岐，完全分岐の場合と，M/E が分岐．E/F が不分岐の場合) の quasi-character χ で ① $\chi|_{T\cap K_\nu}=1$ ② $W_T \ni {}^\forall w \neq 1$ に対して $T\cap K_{\nu-1}$ 上 $\chi \neq {}^w\chi$ (但し W_T は T の Weyl 群で，${}^w\chi$ は χ を w で twist した物) なる条件を満たすもので parametrize される物達である。他の分岐状態の拡大体で parametrize される極大 torus の quasi-character に対応する既約 supercuspidal 表現は，ここで除外した strongly cuspidal 退化元などを考える事によって得られると思われる。最後に直接引用した文献のみを下に挙げておく。

文献

[1] H. Carayol, *Représentations cuspidales du groupe linéaire*, preprint.

[2] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, *On class numbers of positive binary quaternion hermitian forms*,

東大紀要, 27, (1980).

[3] H. Hijikata, Some supercuspidal representations induced from parahoric subgroups, Automorphic Forms in Several Variables, Taniguchi Symposium, Katata 1983, Birkhäuser (1984).

[4] T. Hina and H. Masumoto, On representations of $\mathfrak{p}$-adic split and non-split symplectic groups, and their character relations, 東大紀要 31, (1984).

[5] Y. Ihara, On certain arithmetical Dirichlet series, J. Math. Soc. Japan 16, (1964).

[6] P. C. Kutzko, On the supercuspidal representations of GL(2), I, II, Amer. J. Math. Vol 100, (1978).