数理解析研究所講究録
633巻 1987年 83-95

L-ホモロジー類の交叉公式

福島大教育　松井明徳
(Akinori MATSUI)

1. 序　Goresky と MacPherson [3] はコンパクトな向き付けられたPL-擬多様体で余次元が偶数の strata のみを許すものに対し、交叉ホモロジー理論を利用して符号数を定義した。さらにL-ホモロジー類を定義した。我々の目的はL-ホモロジー類の特徴付けを与えることと、交叉公式を示すことである。

X, Y は以下ことわりなしに使用する場合コンパクトな向き付けられたPL-擬多様体で余次元が偶数の strata のみを許すものとする。(定義は[3]を参照せよ。)又Mは PL多様体で向き付けられたものとする。

X, Y が M に PL的に埋め込まれていて、横断的(定義は[1]を見よ。)ならば $X \cap Y$ は自然に向き付けられたPL-擬多様体で余次元が偶数な strata のみを許すものとなる。以下向きもこめて考えたものを $X \cdot Y$ で表わす。向き付けられた余次元が偶数の strata のみを許すPL-擬多様体のボル

ディズムを Ω_*^{ev} で表わすことにする。(cf.[3])

ここで L-ホモロジー類の定義を[3]に従って復習する。Xを n-次元で境界をもたないものとする。$[X, S^k]$ をXから k-球面 S^k への連続写像のホモトピー類の集合とする。$\theta : [X, S^k] \longrightarrow \mathbb{Z}$ を $\theta(f) = \sigma(f^{-1}(p))$ で定義する。但し f は PL-写像で p に横断的とする。$u \in H_k(S^k; \mathbb{Z})$ を生成元とすると k-次 L-ホモロジー類 $L_k(X) \in H_k(X; \mathbb{Q})$ は次の様になる。$2k > n+1$ とすると任意の $f \in [X, S^k]$ に対し $\langle L_k(X), f^* u \rangle = \theta(f)$ を満すホモロジーの元 $L_k(X)$ として定義される。又制限 $2k > n+1$ は X と球面の積をとることによりのぞかれる。Xが境界をもつ場合はダブル $X \underset{\partial X}{\cup} X$ の L-ホモロジー類 $L_k(X \underset{\partial X}{\cup} X)$ を X に引きもどすことにより X の L-ホモロジー類 $L_k(X) \in H_k(X, \partial X; \mathbb{Q})$ が定義される。$L_*(X) = L_0(X) + L_1(X) + \cdots + L_n(X) \in H_*(X, \partial X; \mathbb{Q})$ とおく。

交叉公式をのべるためにホモロジー類 $a, b \in H_*(M, \partial M; \mathbb{Q})$ に対しての積 $a \cdot b$ を次で定義する。

$$a \cdot b = [M] \cap (([M] \cap)^{-1} a \cup ([M] \cap)^{-1} b).$$

<u>定理(交叉公式)</u> XとYが PL-的にMに埋め込まれていてかつ横断的であるとする。$f: X \to M$, $g: Y \to M$, $h: X \cdot Y \to M$ を包含写像とする。$\ell(M)$ は M の L-コホモ

ロジー類とすると次が成りたつ。

$$f_*L_*(X)\cdot g_*L_*(Y) = h_*L_*(X\cdot Y)\cap \ell(M) .$$

2. L-ホモロジー類の特徴付け.

Mをコンパクトな向き付けられた $(m+k)$-次元PL-多様体とし、$\hat{M}$, $\bar{M}$ を∂Mの余次元0の部分多様体で$\partial M=\hat{M}\cup\bar{M}$, $\hat{M}\cap\bar{M}=\partial\hat{M}=\partial\bar{M}$なものとする。$X$の次元は$n$として $f:(X,\partial X)\longrightarrow(M,\hat{M})$を包含写像とする。ここで2つの準同型写像を定義する：

$$\alpha_f : \Omega_*(M,\bar{M})\otimes\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$$
$$\bar{\alpha}_f : \Omega_*^{ev}(M,\bar{M})\otimes\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q} .$$

もし $\bar{\alpha}_f$が定義されたら $\alpha_f=b\circ\bar{\alpha}_f$ で α_f は定義する。ここで $b:\Omega_*(M,\bar{M})\longrightarrow\Omega_*^{ev}(M,\bar{M})$ は自然な準同型写像とする。
$(\varphi,V)\in\Omega_*^{ev}(M,\bar{M})$ を与えられたとき、十分大きな $i>0$ に対して PL的埋め込み $\psi:(V,\partial V)\longrightarrow(M\times D^i,\ \bar{M}\times D^i)$ で

(1) $\psi \simeq \varphi\times\{0\}$

(2) $M\times D^i$の中で $\psi(V)\perp X\times D^i$

なものがとれる。そこで $\bar{\alpha}_f$ を $\bar{\alpha}_f(\varphi,V)=\alpha(\psi(V)\cdot(X\times D^i))$ で定義する。この準同型写像を使って L-ホモロジー類の別な定義を与える。そのために次の補題が必要である。

補題 2.1　任意の $(\varphi, V)\in\Omega_*(M,\tilde{M})$ に対し $\langle \varphi_*([V]\cap \ell(V)), \Phi(f)\rangle = \sigma_f(\varphi,V)$ をみたすコホモロジー類 $\Phi(f)\in H^*(M,\tilde{M};\mathbb{Q})$ が存在し一意である。さらに $\Phi(f)=\Phi^0+\Phi^1+\cdots+\Phi^{n+k}$ $(\Phi^i\in H^i(M,\tilde{M};\mathbb{Q}))$ とすると $\Phi^{k+i}=0$ $(i\not\equiv 0 \pmod 4$ or $i<0)$ となる。

略証　$\Phi^0, \Phi^0+\Phi^1, \cdots, \Phi^0+\Phi^1+\cdots+\Phi^{n+k}$ の順に帰納的に構成することが出来る。自然な写像 $\Omega_*^{ev}(M,\tilde{M})\otimes\mathbb{Q}\longrightarrow H_*(M,\tilde{M};\mathbb{Q})$ が全射であることから一意性がわかる。$\Phi^{k+i}=0$ $(i\not\equiv 0 \pmod 4$ or $i<0)$ は関係式からわかる。

定義 2.2　補題2.1 において M を X の D^N での中での正則近傍で $\partial D^N\cap M=\tilde{M}$ とする。そのとき $L(X)$ を $L(X)=f_*^{-1}([M]\cap\Phi(f))$ で定義する。

次の定理が成りたつ。

定理 2.3　$f:(X,\partial X)\longrightarrow(M,\tilde{M})$ を包含写像とする。任意の $(\varphi,V)\in\Omega_*(M,\tilde{M})$ に対し $\langle\varphi_*([V]\cap\ell(V)), ([M]\cap)^{-1}(f_*L(X)\cap \bar{\ell}(M))\rangle=\sigma_f(\varphi,V)$ が成りたつ。さらに $f_*L(X)$ はこの関係式で特徴付けられる。

系 2.4 $L_*(X) = L(X)$.

証明 $f \in [X, S^k]$ が与えられたとする。そのとき PL 的埋め込み $\hat{f}: X \longrightarrow S^k \times D^N$ で $\hat{f} \simeq f \times \{0\}$ なものが十分大きな $N > 0$ に対して存在する。 $M = S^k \times D^N$, $\dot{M} = \phi$, $\bar{M} = S^k \times \partial D^N$, $V = D^N$ とし $\varphi: D^N \longrightarrow S^k \times D^N$ を $\varphi(x) = (*, x)$ で定義し 定理2.3 を使うと $\langle \varphi_* [D^N], ([S^k \times D^N] \cap)^{-1} \hat{f}_* L(X) \rangle = \sigma_{\hat{f}}(\varphi, D^N)$。又定義より. $\theta(f) = \sigma_{\hat{f}}(\varphi, D^N)$. 故に $\langle f_* L(X), u \rangle = \theta(f)$。従って $L(X) = L_*(X)$。

定理2.3 が証明された後は $L(X)$ が L-ホモロジー類であるのだから, 定理2.3 は L-ホモロジー類 $L_*(X)$ に対して成りたつ。定理2.3 の証明は次の章で与える。以下では $L(X)$ の別な特徴付けを与える。

$f: X \longrightarrow Y$ を向きを保つ余次元 0 の PL 的埋め込みとする。このとき

(1) $f(X)$ が Y の閉集合である。

(2) $f(\mathrm{Int}\, X) \cap \partial Y = \phi$

(3) $f | \mathrm{Int}\, X$ が開写像である。

の条件をみたすとき f を正則と呼ぶことにする。

正則なPL的埋め込み $f: X \to Y$ が与えられたとき準同型写像 $f^{\#}: H_*(Y, \partial Y; \mathbb{Q}) \to H_*(X, \partial X; \mathbb{Q})$ が $f^{\#} = (f_*)^{-1} \circ i_*$ で定義される。但し $i: (Y, \partial Y) \to (Y, Y - f(\mathrm{Int}\, X))$ は包含写像とし f は $f: (X, \partial X) \to (Y, Y - \mathrm{Int}(X))$ とみなす。$\mathcal{E}$ をコンパクトな向き付けられたPL-擬多様体で余次元偶数の strata のみを許すものの category で morphisms は正則な埋め込みとする。

任意の $X \in \mathcal{E}$ ($\dim X = n$) のホモロジー類

$L_A(X) = L_0(X) + L_1(X) + \cdots + L_n(X) \in H_*(X, \partial X; \mathbb{Q})$

で次の様な公理をみたすものを考える。

A 1. $L_i(X) \in H_i(X, \partial X; \mathbb{Q})$ で

$L_{n-i}(X) = 0 \quad (i \not\equiv 0 \pmod 4)$.

A 2. $L_n(X) = [X]$

A 3. $f: X \to Y$ が $\mathcal{E}$ の morphism なら

$L_A(X) = f^{\#} L_A(Y)$.

A 4. $L_A(X \times Y) = L_A(X) \times L_A(Y)$.

A 5. $\partial X = \phi$ なら $\langle L_A(X), 1^0 \rangle = \alpha(X)$.

公理 A1.2.3.4.5 をみたすホモロジー類をここでは公理的L-ホモロジー類と呼ぶことにする。実際には一意でL-ホモロジー類に一致する。

命題 2.5　$L(X)$はA1, 2, 3, 4, 5をみたす。

補題2.1の$\Phi(f)$の構成から大部分わかるので証明は省く。

系 2.6　$f:(X,\partial X)\longrightarrow(M,\tilde{M})$を包含写像とする。
任意の$(\varphi,V)\in\Omega_*^{ev}(M,\tilde{M})$に対して
$\langle\varphi_* L(V),\ ([M]\cap)^{-1}(f_* L(X)\cap\bar{\ell}(M))\rangle=\bar{\sigma}_f(\varphi,V)$　をみたす。

証明　補題2.1の関係式の$[V]\cap\ell(V)$を$L(V)$にσ_fを$\bar{\sigma}_f$におきかえたものに対し同様なコホモロジー類$\Phi'(f)\in H^*(M,\tilde{M};\mathbb{Q})$が存在し一意である。$(\varphi,V)\in\Omega_*(M,\tilde{M})$に対し$L(V)=[V]\cap\ell(V)$であるから定理2.3より$\Phi'(f)=([M]\cap)^{-1}(f_* L(X)\cap\bar{\ell}(M))$である。

この系は交叉公式を証明する計算の途中で必要であり、定理2.3が証明されたらとすれば$L_*(V)$, $L_*(X)$でなりたつ。

3. 定理2.3の証明

コンパクト多面体上の向き付けられたブロック-バンドルのℓ-コホモロジー類とL-ホモロジー類との関連を調べる必要がある。そのために次の2つの準同型写像を定義する。

$$a_\xi : \Omega_*(E,\dot{E})\otimes\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$\bar{a}_\xi : \Omega_*^{ev}(E,\dot{E})\otimes\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

ここで $\xi=(E,\tau,B)$ はコンパクト多面体B上の向き付けられたブロックバンドルとし $\dot{E}$ は ξ に付随した球面バンドルの全空間とする。

B を $\mathbb{R}^N$ に埋め込んだときの正則近傍を A とし $p:A\to B$ を deformation retraction とする $p^*\xi=(E(p^*\xi),\tau',A)$ を誘導バンドルとする。$(\tilde{p},p):(E(p^*\xi),A)\longrightarrow(E,B)$ と $(\tilde{i},i):(E,B)\longrightarrow(E(p^*\xi),A)$ をバンドル写像とし i と $\tilde{i}$ を包含写像とする。a_ξ と $\bar{a}_\xi$ を $a_\xi(\varphi,V)=a_{\tau'}(\tilde{i}\circ\varphi,V)$, $\bar{a}_\xi(\varphi,V)=\bar{a}_{\tau'}(\tilde{i}\circ\varphi,V)$ で定義する。

<u>命題3.1</u>　任意の $(\varphi,V)\in\Omega_*^{ev}(E,\dot{E})$ に対して
$\langle\varphi_*L(V),U_\xi\cup\tau^{*-1}\bar{\ell}(\xi)\rangle=\bar{a}_\xi(\varphi,V)$ がなりたち
さらに $\bar{\ell}(\xi)$ は上の関係式で特徴付けられる。

この命題を証明するのに次の補題を使う。

<u>補題3.2</u>　任意の $(\varphi,V)\in\Omega_*(E,\dot{E})$ に対して
$\langle\varphi_*L(V),U_\xi\cup\tau^{*-1}\ell(\xi)\rangle=a_\xi(\varphi,V)$ がなりたち
さらに $\ell(\xi)$ は上の関係式で特徴付けられる。

<u>証明</u>　$(\varphi, V) \in \Omega_*(E, \Xi)$ だから $L(V) = [V] \cap \ell(V)$。
又 PL的埋め込み $\psi : V \longrightarrow E(p^*\xi)$ で $\psi \simeq \bar{i} \circ \varphi$ かつ $\psi(V) \perp A$
なものがとれる。$j : \psi(V) \cap A \longrightarrow V$ を $j(x) = \psi^{-1}(x)$ で
定義する。以上より

$$
\begin{aligned}
&\langle \varphi_* L(V), U_\xi \cup \tau^{*-1} \bar{\ell}(\xi) \rangle \\
&= \langle \psi_* ([V] \cap \ell(V)), \bar{p}^* U_\xi \cup \bar{p}^* \tau^{*-1} \bar{\ell}(\xi) \rangle \\
&= \langle [V] \cap \psi^* U_{p^*\xi}, \ell(V) \cup \psi^* \tau'^{*-1} \bar{\ell}(p^*\xi) \rangle \\
&= \langle j_* [\psi(V) \cdot A], \ell(V) \cup \psi^* \tau'^{*-1} \bar{\ell}(p^*\xi) \rangle \\
&= \langle [\psi(V) \cdot A], \ell(\psi(V) \cdot A) \rangle \\
&= \alpha_{\tau'} (\bar{i} \circ \varphi) \\
&= \alpha_\xi (\varphi, V)。
\end{aligned}
$$

又 一意性は 補題2.1 と同様である。

<u>命題 3.1 の証明</u>

任意の $(\varphi, V) \in \Omega_*^{ev}(E, \Xi)$ に対し
$\langle \varphi_* L(V), \Phi' \rangle = \bar{\alpha}_\xi(\varphi, V)$ をみたす Φ' は存在して一意で
ある。その Φ' は 補題 3.2 より $\Phi' = U_\xi \cup \tau^{*-1} \bar{\ell}(\xi)$。

<u>定理2.3 の証明</u>

$(\varphi, V) \in \Omega_*(M, \bar{M})$ が与えられたとき 特に
$\varphi : V \longrightarrow M$ が PL的埋め込みで $\varphi(V) \perp X$ とした場合

に関係式がなりたつことを示せば一般の場合はそれから簡単にわかる。そこでその様な場合に証明する。
φ の法ブロックバンドルを $\nu=(E,\varphi_E,V)$ とし X は ν に横断的であるとする。

$$P=\langle \varphi_*([V]\cap\ell(V)),([M]\cap)^{-1}(f_*L(X)\cap\bar{\ell}(M))\rangle$$ とおく。

又 $f_E:X\cap E\longrightarrow E$ を包含写像とすると計算により

$$P=(-1)^{\operatorname{codim}V\cdot\operatorname{codim}X}\langle f_{E*}L(X\cap E),U_\nu\cup\varphi_E^{*-1}\bar{\ell}(\nu)\rangle。$$

命題3.1より $P=(-1)^{\operatorname{codim}V\cdot\operatorname{codim}X}\bar{\alpha}_\nu(f_E,X\cap E)$。

$\bar{\alpha}_\nu$ と α_f の定義より

$$\begin{aligned}P&=(-1)^{\operatorname{codim}V\cdot\operatorname{codim}X}\alpha((X\cap E)\cdot V)\\&=\alpha(V\cdot X)\\&=\alpha_f(\varphi,V)。\end{aligned}$$

一意性は補題2.1による。

補題3.2を使わずに $\bar{\ell}(\xi)$ の公理的性質をみたすことだけを使って命題3.1を証明することが出来る。その方法だと命題3.1は $L(V)$ の変わりに $L_A(V)$ に対してなりたつ。その結果定理2.3も $L(X)$ のかわりに $L_A(X)$ でなりたつ。定理2.3の一意性から公理的L-ホモロジー類 $L_A(X)$ が $L(X)$ と一致することがわかる。
系2.4も考えに入れると $L_A(X)=L(X)=L_*(X)$ がわかる。

4. 交叉公式の証明

定理を証明する計算の途中で次のL-ホモロジー類に対するハルペリン型の公式が必要である。(ハルペリン型の公式は本来スティフェル-ホィットニーホモロジー類に対するもので [2] [5] [6] を参考にせよ。) 証明は [6] の場合と同様であるので省略する。実際の証明は定理2.3を使う。

<u>命題 4.1</u>　$\xi=(E,\tau,X)$ を向き付けられたブロックバンドルとすると次がなりたつ.

$$\tau_* L_*(X) = (L_*(E) \cap U_\xi) \cap \tau^{*-1}\bar{l}(\xi)\text{。}$$

<u>交叉公式の証明</u>　$h(\partial(X\cdot Y))$ の ∂M での近傍を $\hat{M}$ とし $\bar{M} = cl(\partial M - \hat{M})$ とする。定理2.3を利用して証明を与える。任意の $(\varphi, V) \in \Omega_*(M,\bar{M})$ が与えられたとする。

$P(f,g) = \langle \varphi_*([V] \cap l(V)), ([M]\cap)^{-1}\{(f_* L_*(X)\cdot g_* L_*(Y)) \cap \bar{l}(M)) \cap \bar{l}(M)\}\rangle$ とおく。$\varphi : (V,\partial V) \longrightarrow (M,\bar{M})$ はPL的埋め込みとし $\varphi(V) \perp X$, $\varphi(V) \perp Y$ として $P(f,g) = \sigma_h(\varphi, V)$ を示す。$\nu = (E, \varphi_E, V)$ を φ の法ブロックバンドルとする。$f_E : X\cap E \longrightarrow E$, $g_E : Y \cap E \longrightarrow E$ を包含写像とする.

$P(f,g) = (-1)^{\mathrm{codim}\,\varphi\cdot\mathrm{codim}\,h} \langle f_{E*}L_*(X\cap E), \{([E]\cap)^{-1} g_{E*}$
$(L_*(Y\cap E)\cap g_E^* U_\nu)\cap g_E^*\varphi_E^{*-1}\bar{l}(\nu)\}\cup\bar{l}(E)\rangle$ となる。

$\varphi_Y : Y\cap\varphi(V)\longrightarrow Y\cap E$ を包含写像とすると

$\nu' = (Y\cap E, \varphi_Y, Y\cap\varphi(V))$ はブロックバンドルとなり

$U_{\nu'} = g_E^* U_\nu$, $\varphi_Y^{*-1}\bar{l}(\nu') = g_E^*\varphi_E^{*-1}\bar{l}(\nu)$。又命題4.1

より $(L_*(Y\cap E)\cap U_{\nu'})\cap\varphi_{Y*}^{-1}\bar{l}(\nu') = \varphi_{Y*}L_*(Y\cdot\varphi(V))$。

従って $P(f,g) = (-1)^{\mathrm{codim}\,\varphi\cdot\mathrm{codim}\,h}\langle f_{E*}L(X\cap E),$
$([E]\cap)^{-1}(g_{E*}\varphi_{Y*}L_*(Y\cdot\varphi(V)))\cap\bar{l}(E)\rangle$。

$g_V = g_E\circ\varphi_Y$ とおくと 系2.6 より、

$$P(f,g) = (-1)^{\mathrm{codim}\,\varphi\cdot\mathrm{codim}\,h}\alpha_{g_V}(f_E, X\cap E)$$
$$= (-1)^{\mathrm{codim}\,\varphi\cdot\mathrm{codim}\,h}\alpha((X\cap E)\cdot(Y\cdot\varphi(V)))$$
$$= (-1)^{\mathrm{codim}\,\varphi\cdot\mathrm{codim}\,h}\alpha(X\cdot(Y\cdot\varphi(V)))$$
$$= \alpha(\varphi(V)\cdot(X\cdot Y))$$
$$= \alpha_h(\varphi, V)。$$

さらに一般の場合も D^N との積をとることにより $P(f,g) =$
$\alpha_h(\varphi,V)$ が示せる.

故に定理2.3より

$$f_*L_*(X)\cdot g_*L_*(Y)\cap\bar{l}(M) = h_*L_*(X\cdot Y)$$

が成りたつ。

参考文献

[1] S. Buoncristiano, C. R. Rourke and B. J. Sanderson, A geometric approach to homology theory, London Math. Soc. Lecture Notes 18, 1976.

[2] W. Fulton and R. MacPherson, Categorical framework for the study of singular spaces, Mem. Amer. Math. Soc. 243 1981.

[3] M. Goresky and R. MacPherson, Intersection homology theory, Topology 19, 135–162 (1980).

[4] M. Goresky and R. MacPherson, Intersection homology II, Invent. Math. 72, 77–129 (1983).

[5] A. Matsui and H. Sato, Stiefel-Whitney homology classes and homotopy type of Euler spaces, J. Math. Soc. Japan 37, 437–453 (1985).

[6] A. Matsui and H. Sato, Stiefel-Whitney homology classes and Riemann-Roch formula, Advanced Studies in Pure Math. 9, 129–134 (1986).

[7] A. Matsui, Intersection formula for Stiefel-Whitney homology classes, preprint.